

## **ROZWIĄZYWANIE BELEK O ZMIENNEJ SZTYWNOŚCI METODĄ RÓŻNIC SKOŃCZONYCH**

Wiesław Buczkowski

Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu

**Streszczenie.** W pracy przedstawiono rozwiązania dla belek o zmiennej sztywności. Obliczenia wykonano metodą różnic skończonych. Pokazano sposób postępowania przy budowie macierzy układów równań przemieszczeniowych oraz przedstawiono rozwiązania dla kilku schematów statycznych belek o zmiennej sztywności, obciążonych w sposób masowy oraz różnicą temperatury między dolną i górną płaszczyzną belki. Przedstawione w pracy macierze ze współczynnikami o ogólnych oznaczeniach pozwalają w prosty sposób uzyskać rozwiązania dla belek o tym samym schemacie statycznym, ale o dowolnych sztywnościach.

**Słowa kluczowe:** belki o zmiennej sztywności, obciążenie temperaturą, metoda różnic skończonych

### **WSTĘP**

W powszechnie dostępnej literaturze technicznej nie można znaleźć rozwiązań analitycznych dla belek o zmiennej sztywności, obciążonych temperaturą (różnicą temperatury między dolną a górną płaszczyzną belki). Od wielu lat przy wykonywaniu obliczeń statycznych dla powłok, płyt i belek z dużym powrotem stosowana jest metoda różnic skończonych [Bielewicz i in. 1967, Podhorecki i Przedpełski 1982, Buczkowski 2007]. Metoda ta, stosunkowo prosta w stosowaniu, może być także zastosowana do poszukiwania rozwiązań dla dowolnych schematów statycznych belek o zmiennej sztywności, dowolnie obciążonych, w tym także temperaturą.

### **WARIACYJNE UJĘCIE METODY RÓŻNIC SKOŃCZONYCH W ZASTOSOWANIU DO ROZWIĄZYWANIA BELEK**

Funkcjonał energii całkowitej odkształcenia sprężystego zginanej belki o stałej sztywności dany jest zależnością:

---

Adres do korespondencji – Corresponding author: Wiesław Buczkowski, Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu, Wydział Melioracji i Inżynierii Środowiska, Katedra Mechaniki Budowli i Budownictwa Rolniczego, ul. Piątkowska 94, 60-649 Poznań, e-mail: [kmbibr@up.poznan.pl](mailto:kmbibr@up.poznan.pl)

$$V = \frac{EJ}{2} \int_l \left[ \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 + \frac{2\alpha_t \Delta t}{h} \frac{d^2 w}{dx^2} + 2 \left( \frac{\alpha_t \Delta t}{h} \right)^2 \right] dx - \int_l q w dx \quad (1)$$

gdzie:  $V$  – funkcjonal energii,

$E$  – moduł sprężystości materiału belki,

$J$  – moment bezwładności przekroju belki,

$\alpha_t$  – współczynnik liniowej rozszerzalności termicznej materiału belki,

$\Delta t$  – różnica temperatury między dolną i górną płaszczyzną belki ( $\Delta t = t_d - t_g$ ),

$h$  – wysokość przekroju belki,

$q$  – obciążenie równomiernie rozłożone na długości belki,

$l$  – długość belki,

$w(x)$  – funkcja opisująca ugięcie belki.

Poszukując rozwiązań dla konkretnego przypadku, należy długość belki podzielić na dowolną liczbę odcinków  $n$ , każdy długości  $s = \frac{l}{n}$ . Pochodne funkcji ugięcia, występujące

w funkcjonale energii, zastępuje się ilorazami różnicowymi, a całkowanie – sumowaniem po przedziałach podziału belki. Z twierdzenia, mówiącego, że dla ustroju będącego w stanie równowagi energia całkowita osiąga minimum, wynika, że warunkiem koniecznym jest zerowanie się pierwszych pochodnych, co w rozpatrywanym przypadku

oznacza  $\frac{\partial V}{\partial w_i} = 0$ , gdzie  $V$  jest funkcjonalem określonym równaniem (1). Z warunku tego

otrzymuje się liniowy układ równań algebraicznych na wyznaczenie przemieszczeń ( $w_i$ ) we wszystkich węzłach przyjętego podziału belki. Korzystając z otrzymanych wartości przemieszczeń ( $w_i$ ), można obliczyć momenty zginające dla wszystkich węzłów podziału z zależności:

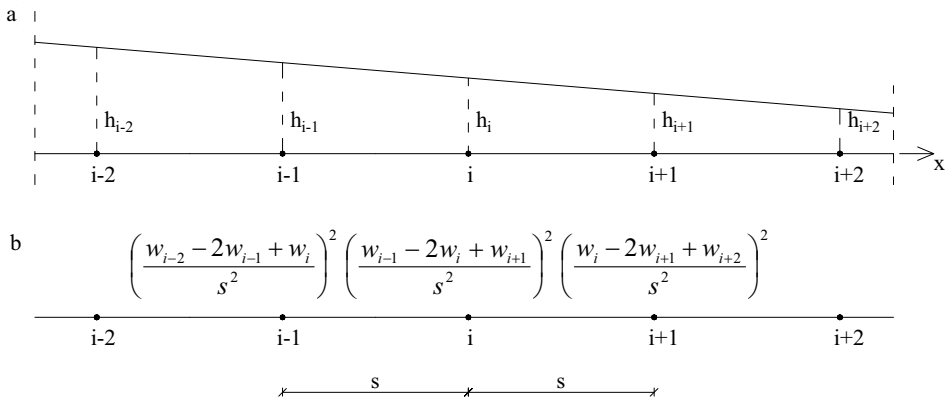
$$M_{xi} = -EJ_i \left( \frac{d^2 w}{dx^2} + \alpha_t \Delta t h_i^{-1} \right) \quad (2)$$

## ROZWIĄZYWANIE BELEK O LINIOWO ZMIENNEJ WYSOKOŚCI

Przy poszukiwaniu rozwiązań dla belek o liniowo zmiennej wysokości mamy do czynienia z przypadkiem, gdzie w każdym węźle podziału przyjętego do obliczeń występuje inna wysokość belki, a więc i inna sztywność belki. W takiej sytuacji sztywność występująca w funkcjonale ( $V$ ) musi znaleźć się pod całką.

Tworząc równanie przemieszczeniowe dla punktu  $i$ , wykorzystujemy drugie pochodne (ilorazy różnicowe) rozpisane w punktach:  $i - 1$ ,  $i$  oraz  $i + 1$  (rys. 1). Rodzi się zatem wątpliwość, czy poszczególnym pochodnym przypisywać sztywność ( $EJ_i$ ), występującą w punkcie  $i$ , dla którego tworzy się równanie, czy odpowiednie sztywności należy przypisać poszczególnym pochodnym, tzn. pochodnej napisanej w punkcie  $i - 1$  przypisać sztywność  $EJ_{i-1}$ , w punkcie  $i$  – sztywność  $EJ_i$ , a w punkcie  $i + 1$  – sztywność  $EJ_{i+1}$ .

Na rysunku 1 pokazano fragment belki o liniowo zmiennej wysokości wraz z przyjętymi oznaczeniami.



Rys. 1. Fragment belki z zaznaczonymi jej wysokościami w poszczególnych punktach przyjętego podziału (a), rozpisane w różnicach skończonych drugie pochodne funkcji ugięcia, w których występuje ugięcie w punkcie  $i$  (b)

Fig. 1. Beam fragment with its heights in individual points of section grid (a), second derivatives of deflection function in finite-differences (deflection in  $i$  point) (b)

Poniżej dla punktu  $i$  utworzono lewą stronę równania przemieszczeniowego, różniczkując rozpisane wyżej pochodne względem przemieszczenia  $w_i$ , a zamiast całkowania przypisano poszczególnym pochodnym odpowiednie odcinki przyjętego podziału belki.

W pierwszej kolejności (wersja A), postępując w sposób opisany wyżej, przypisano wszystkim pochodnym sztywność występującą w punkcie centralnym  $i$ :

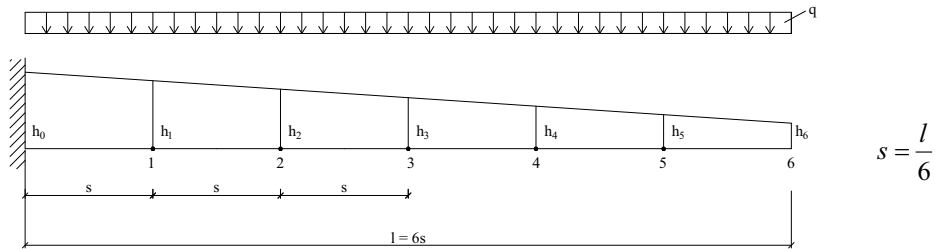
$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial w_i} &= \frac{EJ_i}{2} \left[ \frac{2(w_{i-2} - 2w_{i-1} + w_i) \cdot s}{s^4} + \frac{2(w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1}) \cdot (-2)s}{s^4} + \frac{2(w_i - 2w_{i+1} + w_{i+2}) \cdot s}{s^4} \right] = \\ &= \frac{EJ_i}{s^3} (w_{i-2} - 4w_{i-1} + 6w_i - 4w_{i+1} + w_{i+2}) \end{aligned} \quad (3)$$

W dalszej kolejności (wersja B) postąpiono w sposób opisany wyżej, z tą jednak różnicą, że odpowiednie sztywności, występujące w poszczególnych węzłach podziału belki, przypisano drugim pochodnym funkcji ugięcia (ilorazom różnicowym) rozpisanym w danym punkcie:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial w_i} &= \frac{EJ_{i-1}}{2} \frac{2(w_{i-2} - 2w_{i-1} + w_i) \cdot s}{s^4} + \frac{EJ_i}{2} \frac{2(w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1}) \cdot (-2)s}{s^4} + \frac{EJ_{i+1}}{2} \frac{2(w_i - 2w_{i+1} + w_{i+2}) \cdot s}{s^4} = \\ &= \frac{E}{s^3} [J_{i-1}w_{i-2} - 2(J_{i-1} + J_i)w_{i-1} + (J_{i-1} + 4J_i + J_{i+1})w_i - 2(J_i + J_{i+1})w_{i+1} + J_{i+1}w_{i+2}] \end{aligned} \quad (4)$$

W literaturze technicznej [np. Pietrzak i in. 1979, Jastrzębski i in. 1974, Orłowski i Słowański 1978] znaleźć można rozwiązania dla belek o zmiennej wysokości, gdzie równania przemieszczeniowe zbudowano według wersji A. Na fakt, że otrzymuje się w takim przypadku błędne rozwiązania, wskazali w swojej pracy Podhorecki i Przedpełski [1982].

Prawidłowy sposób postępowania powinien być zgodny z wersją B. Postępując w ten właśnie sposób, dla belki wspornikowej pokazanej na rysunku 2, o liniowo zmiennej wysokości, zbudowano układ równań (na ogólnych symbolach), służący do wyznaczenia przemieszczeń w poszczególnych węzłach przyjętego podziału belki.



Rys. 2. Belka wspornikowa o liniowo zmiennej wysokości – podstawowe oznaczenia  
Fig. 2. Semi-beam of lineary changeable height – basic designations

Założono, że belka będzie obciążona w sposób równomierny obciążeniem o intensywności  $q$  oraz że obciążenie belki stanowić będzie różnica temperatury  $\Delta t = \text{const}$  na całej jej długości ( $\Delta t = t_d - t_g$ ). Otrzymaną macierz układu równań przemieszczeniowych pokazano w tabeli 1.

**Przykład liczbowy.** W pracy Podhoreckiego i Przedpeńskiego [1982] zamieszczono przykład liczbowy dla belki o schemacie jak na rysunku 2 dla danych:  $h_0 = 6 \text{ cm}$ ,  $h_1 = 5,5 \text{ cm}$ ,  $h_2 = 5,0 \text{ cm}$ ,  $h_3 = 4,5 \text{ cm}$ ,  $h_4 = 4 \text{ cm}$ ,  $h_5 = 3,5 \text{ cm}$ ,  $h_6 = 3 \text{ cm}$ , szerokość belki  $b = 3 \text{ cm}$ , długość belki  $l = 60 \text{ cm}$ , długość odcinka podziału belki  $s = 10 \text{ cm}$ , moduł Younga  $E = 20,6 \cdot 10^{10} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ , obciążenie równomierne rozłożone  $q = 1000 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ . Dla powyższych danych przedstawiono rozwiązanie ściśle uzyskane metodą prac wirtualnych. Poniżej zamieszczono rozwiązanie tej samej belki uzyskane metodą wariacyjnego ujęcia różnic skończonych.

Po podstawieniu powyższych danych do macierzy pokazanej w tabeli 1 i po rozwiązaniu tak otrzymanego układu równań uzyskano wielkości ugięć w punktach podziału belki. W tabeli 2, dla porównania, zestawiono wartości ugięć dla obliczanej belki zamieszczone w pracy Podhoreckiego i Przedpeńskiego [1982], uzyskane metodą prac wirtualnych, oraz uzyskane przez autora niniejszej pracy metodą wariacyjnego ujęcia różnic skończonych.

Dla belki opisanej w powyższym przykładzie liczbowym wykonano obliczenia dla obciążenia temperaturą i w wyniku otrzymano następujące wartości przemieszczeń w poszczególnych punktach podziału belki:

$$\begin{aligned} w_1 &= -2,315 \cdot 10^{-3} \alpha_t \Delta t l^2 \\ w_2 &= -9,680 \cdot 10^{-3} \alpha_t \Delta t l^2 \\ w_3 &= -22,601 \cdot 10^{-3} \alpha_t \Delta t l^2 \\ w_4 &= -41,695 \cdot 10^{-3} \alpha_t \Delta t l^2 \\ w_5 &= -67,733 \cdot 10^{-3} \alpha_t \Delta t l^2 \\ w_6 &= -101,708 \cdot 10^{-3} \alpha_t \Delta t l^2 \end{aligned}$$

Tabela 1. Macierz układu równań przemieszczeniowych dla belki o schemacie pokazanym na rysunku 2  
 Table 1. Matrix of displacement system of equations for beam with scheme showed in Figure 2

	Ugięcie – Deflection						Obciążenie równomiernie rozłożone Uniform load	Obciążenie temperatura Load with temperature
	w <sub>1</sub>	w <sub>2</sub>	w <sub>3</sub>	w <sub>4</sub>	w <sub>5</sub>	w <sub>6</sub>		
$2h_0^3 + 4h_1^3 + h_2^3$	$-2(h_1^3 + h_2^3)$	$h_2^3$					$\frac{12qs^4}{Eb}$	$(2h_1^2 - h_6^2 - h_2^2) \alpha_t \Delta t s^2$
$-2(h_1^3 + h_2^3)$	$h_1^3 + 4h_2^3 + h_3^3$	$-2(h_2^3 + h_3^3)$	$h_3^3$				$\frac{12qs^4}{Eb}$	$(2h_2^2 - h_1^2 - h_3^2 - h_3^2) \alpha_t \Delta t s^2$
$h_2^3$	$-2(h_2^3 + h_3^3)$	$h_2^3 + 4h_3^3 + h_4^3$	$-2(h_3^3 + h_4^3)$	$h_4^3$			$\frac{12qs^4}{Eb}$	$(2h_3^2 - h_2^2 - h_4^2 - h_4^2) \alpha_t \Delta t s^2$
		$h_3^3$	$-2(h_3^3 + h_4^3)$	$h_3^3 + 4h_4^3 + h_5^3$	$-2(h_4^3 + h_5^3)$	$h_5^3$	$\frac{12qs^4}{Eb}$	$(2h_4^2 - h_3^2 - h_5^2 - h_5^2) \alpha_t \Delta t s^2$
		$h_4^3$	$-2(h_4^3 + h_5^3)$	$-2(h_4^3 + h_5^3)$	$h_4^3 + 4h_5^3$	$-2h_5^3$	$\frac{12qs^4}{Eb}$	$(2h_5^2 - h_4^2 - h_4^2 - h_4^2) \alpha_t \Delta t s^2$
			$h_5^3$	$-2h_5^3$	$h_5^3$		$\frac{6qs^4}{Eb}$	$-h_5^2 \alpha_t \Delta t s^2$

Oznaczenia – Explanations:

$b$  – szerokość belki – beam width,

$s$  – długość odcinka przyjętego podziału belki  $s = \frac{l}{6}$  – length of measuring segment of beam  $s = \frac{l}{6}$ ,

$l$  – długość belki – beam length,

$q$  – obciążenie równomiernie rozłożone – uniform load,

$E$  – moduł Younga – Young's modulus,

$\alpha_t$  – współczynnik termicznej rozszerzalności liniowej – coefficient of thermal linear expansion,

$\Delta t = t_f - t_g$  – różnica temperatury między dolną i górną płaszczyzną belki – temperature gradient between bottom and upper surface of beam.

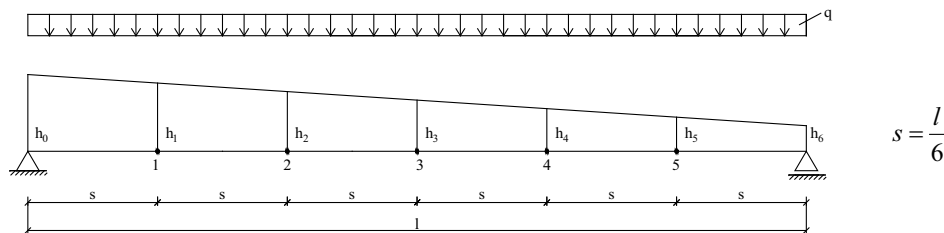
Tabela 2. Porównanie wyników ugięć uzyskanych w pracy Podhoreckiego i Przedpełskiego [1982] oraz przez autora dla belki o schemacie pokazanym na rysunku 2

Table 2. Beam with scheme showed in Figure 2 – comparison between results of deflections obtained in Podhorecki and Przedpełski [1982] and by the author

Ugięcie Deflection	Wyniki ścisłe według Podhoreckiego i Przedpełskiego [1982]	Wyniki uzyskane przez autora metodą wariacyjnego ujęcia różnic skończonych	Błąd względny Relative error [%]
	Precise results [cm]	Author's results obtained with use of variation finite-difference method [cm]	
$w_1$	0,00078	0,00081	3,8
$w_2$	0,00302	0,00308	2,0
$w_3$	0,00650	0,00659	1,4
$w_4$	0,01093	0,01106	1,2
$w_5$	0,01596	0,01613	1,1
$w_6$	0,02123	0,02144	1,0

Natomiast momenty zginające, obliczone według zależności (2), w każdym punkcie podziału belki były równe zero. Było to zgodne z oczekiwaniami, gdyż dla ustrojów statycznie wyznaczalnych obciążonych temperaturą występują przemieszczenia bez wywoływania naprężeń.

Poniżej przedstawiono kolejny przykład belki o zmiennej sztywności, a mianowicie belkę swobodnie podpartą, o liniowo zmieniającej się wysokości, obciążoną równomiernie oraz różnicą temperatury. Schemat statyczny oraz podstawowe zależności pokazano na rysunku 3.



Rys. 3. Belka swobodnie podparta, o liniowo zmiennej wysokości

Fig. 3. Free-ends beam of lineary changeable height

Obliczenia statyczne wykonano, posługując się opisaną wyżej metodą różnic skończonych w ujęciu wariacyjnym, przypisując drugim pochodnym funkcji ugięcia (ilorazom różnicowym) sztywności przekroju, występujące w punkcie, w którym utworzono odpowiedni iloraz różnicowy, a więc postępując w sposób przedstawiony w wersji B.

Utworzoną macierz układu równań przemieszczeniowych pokazano w tabeli 3.

Szczegółowe obliczenia wykonano, przyjmując dane:  $h_0 = 2,5h$ ,  $h_1 = 2,25h$ ,  $h_2 = 2h$ ,  $h_3 = 2,5h$ ,  $h_4 = 1,5h$ ,  $h_5 = 1,25h$ ,  $h_6 = h$ .

Po podstawieniu odpowiednich wartości do macierzy przedstawionej w tabeli 3 otrzymano układ równań przemieszczeniowych z pięcioma niewiadomymi. Po rozwiązaniu układu równań uzyskano ugięcia w punktach podziału belki.

Tabela 3. Układ równań przemieszczeniowych dla belki pokazanej na rysunku 3  
 Table 3. Displacement system of equations for beam showed in Figure 3

Ugięcia – Deflection		Obciążenie równo- mierne rozłożone Uniform load	Obciążenie temperatura Load with temperature			
$w_1$	$w_2$			$w_3$	$w_4$	$w_5$
$4h_1^3 + h_2^3$	$-2(h_1^3 + h_2^3)$	$h_2^3$				$(2h_1^2 - h_2^2) \alpha_t \Delta t s^2$
$-2(h_1^3 + h_2^3)$	$h_1^3 + 4h_2^3 + h_3^3$	$-2(h_2^3 + h_3^3)$	$h_3^3$			$(2h_2^2 - h_1^2 - h_3^2) \alpha_t \Delta t s^2$
$h_2^3$	$-2(h_2^3 + h_3^3)$	$h_2^3 + 4h_3^3 + h_4^3$	$-2(h_3^3 + h_4^3)$	$h_4^3$		$(2h_3^2 - h_2^2 - h_4^2) \alpha_t \Delta t s^2$
	$h_3^3$	$-2(h_3^3 + h_4^3)$	$h_3^3 + 4h_4^3 + h_5^3$	$-2(h_4^3 + h_5^3)$		$(2h_4^2 - h_3^2 - h_5^2) \alpha_t \Delta t s^2$
		$h_4^3$	$-2(h_4^3 + h_5^3)$	$h_4^3 + 4h_5^3$		$(2h_5^2 - h_4^2) \alpha_t \Delta t s^2$

Dla obciążenia równomiernego otrzymano:

$$w_1 = 0,0143 \frac{ql^4}{Ebh^3}$$

$$w_2 = 0,0266 \frac{ql^4}{Ebh^3}$$

$$w_3 = 0,0342 \frac{ql^4}{Ebh^3}$$

$$w_4 = 0,0341 \frac{ql^4}{Ebh^3}$$

$$w_5 = 0,0230 \frac{ql^4}{Ebh^3}$$

Dla obciążenia belki temperaturą otrzymano:

$$w_1 = 0,0374 \alpha_t \Delta t l^2 h^{-1}$$

$$w_2 = 0,0624 \alpha_t \Delta t l^2 h^{-1}$$

$$w_3 = 0,0735 \alpha_t \Delta t l^2 h^{-1}$$

$$w_4 = 0,0688 \alpha_t \Delta t l^2 h^{-1}$$

$$w_5 = 0,0455 \alpha_t \Delta t l^2 h^{-1}$$

Korzystając z zależności (2), obliczono momenty zginające w poszczególnych punktach przyjętego podziału belki:

$$M_{x1} = 0,06945 ql^2$$

$$M_{x2} = 0,11109 ql^2$$

$$M_{x3} = 0,12501 ql^2$$

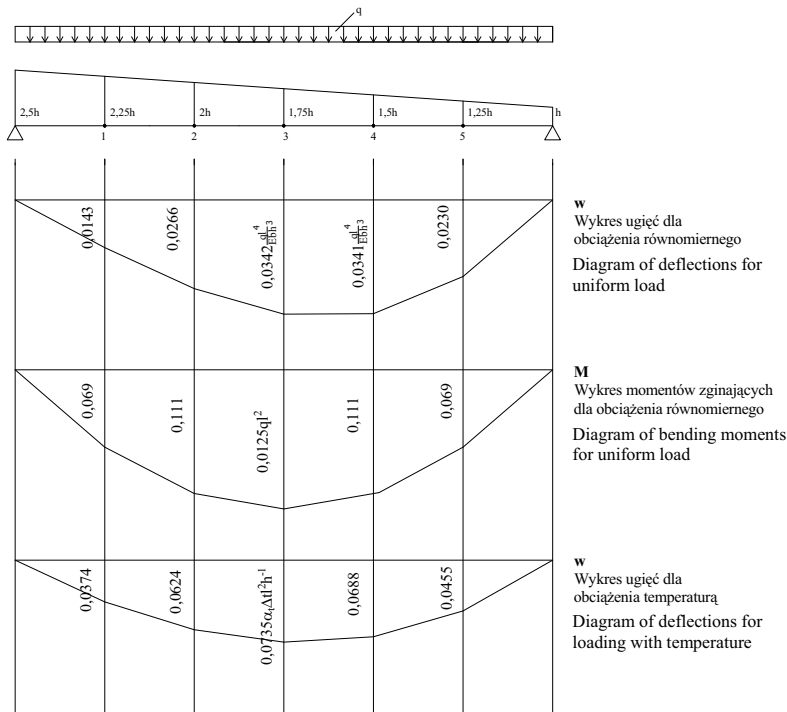
$$M_{x4} = 0,11110 ql^2$$

$$M_{x5} = 0,06945 ql^2$$

Wartości momentów zginających dla obciążenia belki temperaturą, obliczone według zależności (2), w każdym punkcie podziału belki były równe zeru.

Wykresy ugięć oraz momentów zginających pokazano na rysunku 4.





Rys. 4. Wykresy ugięć i momentów zginających dla belki swobodnie podpartej o liniowo zmiennej wysokości

Fig. 4. Deflection and moment diagrams for free-ends beam of lineary changeable height

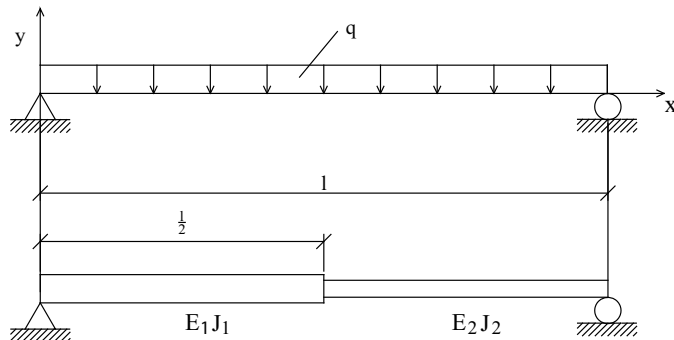
## ROZWIĄZYWANIE BELEK O SKOKOWO ZMIENNEJ WYSOKOŚCI

Przy rozwiązywaniu belek o skokowo zmiennej wysokości metodą różnic skończonych uzyskanie poprawnych wyników uzależnione jest od właściwego przyjęcia sztywności belki w punkcie, w którym następuje zmiana wysokości. Korzystający z tej metody mogą mieć wątpliwości, czy w punkcie zmiany wysokości belki przyjąć do obliczeń średnią arytmetyczną obliczoną ze sztywności stykających się fragmentów belki, czy może średnią harmoniczną lub średnią geometryczną? (Średnia arytmetyczna jest ilorazem sumy liczb przez ich liczbę. Średnia harmoniczną dwóch liczb jest odwrotnością średniej arytmetycznej odwrotności tych liczb. Średnia geometryczna dwóch liczb jest pierwiastkiem z ich iloczynu).

Jeżeli mamy dwie liczby  $C$  i  $D$ , to:

- średnia arytmetyczna jest równa  $\frac{C + D}{2}$ ,
- średnia harmoniczną jest równa  $\frac{2CD}{C + D}$ ,
- średnia geometryczna wynosi  $\sqrt{CD}$ .

Sprawę właściwego przyjęcia sztywności w punkcie skokowej zmiany grubości belki można rozstrzygnąć na wiele sposobów. W pracy Kurowskiego i Parszewskiego [1970] zamieszczono rozwiązanie dla belki pokazanej na rysunku 5 uzyskane na drodze obliczeń analitycznych poprzez całkowanie równań różniczkowych osi ugiętej oddzielnie dla lewej i prawej części belki. Stałe całkowania wyznaczono z uzgodnienia warunków brzegowych na granicy przedziałów (ugięcie i kąt obrotu) oraz z warunków, wynikających ze sposobu podparcia belki.



Rys. 5. Przykład belki swobodnie podpartej, o skokowo zmiennej wysokości, równomiernie obciążonej, dla której podano rozwiązanie w pracy Kurowskiego i Parszewskiego [1970]

Fig. 5. Example of free-ends beam with a piece-wise constant stiffness and uniformly loaded solution given in Kurowski i Parszewski [1970]

Otrzymane równania osi ugiętej belki przedstawiają się zależnościami:

– dla  $0 \leq x \leq l/2$

$$E_1 J_1 y_1 = -\frac{qx^4}{24} + \frac{qlx^3}{12} - \frac{ql^3}{384} \left( 11 + 5 \frac{E_1 J_1}{E_2 J_2} \right) x \quad (5)$$

– dla  $l/2 \leq x \leq l$

$$E_2 J_2 y_2 = -\frac{qx^4}{24} + \frac{qlx^3}{12} + ql^3 \left( \frac{5}{384} \frac{E_2 J_2}{E_1 J_1} - \frac{7}{128} \right) x + \frac{5ql^4}{384} \left( 1 - \frac{E_2 J_2}{E_1 J_1} \right) \quad (6)$$

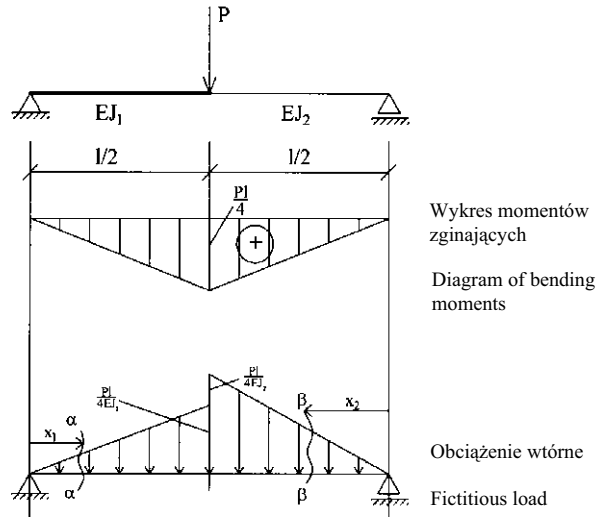
Korzystając z powyższych zależności dla  $x = \frac{l}{2}$ , a więc dla punktu, w którym następuje zmiana sztywności belki, otrzymano:

$$y_1 = y_2 = -\frac{5}{384} \frac{ql^4}{\frac{2E_1 J_1 \cdot E_2 J_2}{E_1 J_1 + E_2 J_2}} = -\frac{5}{384} \frac{ql^4}{(EJ)_H} \quad (7)$$

$$\text{gdzie } (EJ)_H = \frac{2E_1 J_1 \cdot E_2 J_2}{E_1 J_1 + E_2 J_2}.$$

Jak z powyższego wynika, chcąc uzyskać dokładną wartość ugięcia w punkcie o skokowej zmianie wysokości belki, należy przyjąć w tym punkcie sztywność obliczoną jako średnią harmoniczną ze sztywności sąsiednich odcinków belki.

Kolejny przykład, mogący dać odpowiedź w sprawie właściwego przyjmowania sztywności przy obliczaniu belek o skokowo zmiennej wysokości, przedstawiono poniżej.



Rys. 6. Schemat statyczny oraz podstawowe zależności wykorzystywane przy obliczaniu ugięcia belki metodą obciążeń wtórnych

Fig. 6. Static scheme and basic relations applied in calculations of beam deflection with use of fictitious method

Dla belki pokazanej na rysunku 6, stosując metodę obciążeń wtórnych, wyznaczono równania linii ugięcia dla obydwóch różniących się sztywnościami odcinków belki:

– dla lewej części belki o sztywności  $EJ_1$  dla  $0 \leq x_1 \leq l/2$

$$y_1 = \frac{Pl^2}{48} \left( \frac{2}{EJ_1} + \frac{1}{EJ_2} \right) x_1 - \frac{Px_1^3}{12EJ_1} \quad (8)$$

– dla prawej części belki o sztywności  $EJ_2$  dla  $0 \leq x_2 \leq l/2$

$$y_2 = \frac{Pl^2}{48} \left( \frac{2}{EJ_2} + \frac{1}{EJ_1} \right) x_2 - \frac{Px_2^3}{12EJ_2} \quad (9)$$

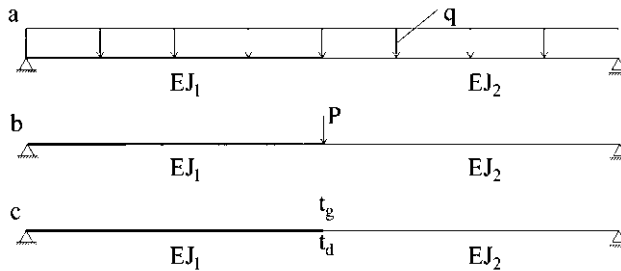
Korzystając z powyższych zależności dla  $x_1 = x_2 = \frac{l}{2}$ , otrzymano:

$$y_1 = y_2 = \frac{Pl^3}{48 \cdot \frac{2 \cdot EJ_1 \cdot EJ_2}{EJ_1 + EJ_2}} = \frac{Pl^3}{48EJ_H} \quad (10)$$

W obu przedstawionych przykładach obliczenia ugięć okazało się, że w miejscu zmiany wysokości belki należy uwzględnić sztywność obliczoną jako średnią harmoniczną ze sztywności sąsiednich odcinków.

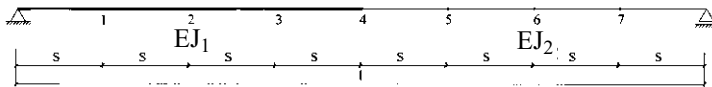
Do podobnego wniosku doszli Podhorecki i Przedpełski [1982], którzy wskazywali również na inne publikacje [Jastrzębski i in. 1974, Orłowski i Słowański 1978, Pietrzak i in. 1979], w których uwzględniono sztywność obliczoną jako średnią arytmetyczną ze sztywności sąsiednich odcinków i z tego powodu otrzymano błędne wyniki.

Poniżej przedstawiono rozwiązania dla belki swobodnie podpartej, o skokowo zmiennej wysokości w środku jej rozpiętości. Rozwiązania uzyskano metodą różnic skończonych (MRS). Jako obciążenie uwzględniono: obciążenie równomierne ( $q$ ), obciążenie siłą skupioną ( $P$ ) przyłożoną w środku rozpiętości belki oraz obciążenie różnicą temperatury ( $\Delta t$ ) między dolną a górną płaszczyzną belki. Przyjęte do obliczeń schematy obciążeń pokazano na rysunku 7, a przyjęty w obliczeniach podział belki oraz podstawowe oznaczenia pokazano na rysunku 8.



Rys. 7. Belka o skokowo zmiennej wysokości: a – obciążona równomiernie, b – obciążona siłą skupioną, c – obciążona temperaturą

Fig. 7. Beam with a piece-wise constant stiffness: a – uniformly loaded, b – pointly loaded, c – loaded with temperature



Rys. 8. Belka swobodnie podparta o skokowo zmiennej wysokości – podstawowe oznaczenia przyjęte do obliczeń

Fig. 8. Free-ends beam with a piece-wise constant stiffness – basic designations taken for calculations

Macierz układu równań przemieszczeniowych dla dowolnych wielkości  $J_1$  i  $J_2$  przedstawia tabela 4.

Poniżej wykonano obliczenia szczegółowe dla danych:  $h_1 = 6$  cm,  $h_2 = 3$  cm.

$$J_1 = \frac{b \cdot h_1^3}{12} = \frac{b \cdot 6^3}{12} = 18b \text{ cm}^4$$

$$J_2 = \frac{b \cdot h_2^3}{12} = \frac{b \cdot 3^3}{12} = 2,25b \text{ cm}^4$$

Tabela 4. Macierz układu równań przemieszczeniowych dla belki pokazanej na rysunku 8  
 Table 4. Matrix displacement system of equations for beam showed in Figure 8

$w_1$	Ugięcie – Deflection							Obciążenie równo- mierne Uniform load	Obciążenie siłą skupioną Point load	Obciążenie temperaturą Load with temperature
	$w_2$	$w_3$	$w_4$	$w_5$	$w_6$	$w_7$				
$5J_1$	$-4J_1$	$J_1$					$\frac{qs^4}{E}$	0	$J_1 h_1^{-1} \alpha_t \Delta t s^2$	
$-4J_1$	$6J_1$	$-4J_1$	$J_1$				$\frac{qs^4}{E}$	0	0	
$J_1$	$-4J_1$	$5J_1 + J_{sr}$	$-2(J_1 + J_{sr})$	$J_{sr}$			$\frac{qs^4}{E}$	0	$(J_1 h_1^{-1} - J_{sr} h_{sr}^{-1}) \alpha_t \Delta t s^2$	
	$J_1$	$-2(J_1 + J_{sr})$	$J_1 + 5J_{sr} + J_2$	$-2(J_{sr} + J_2)$	$J_2$		$\frac{qs^4}{E}$	$\frac{Ps^3}{E}$	$(2J_{sr} h_{sr}^{-1} - J_1 h_1^{-1} - J_2 h_2^{-1}) \alpha_t \Delta t s^2$	
		$J_{sr}$	$-2(J_{sr} + J_1)$	$5J_2 + J_{sr}$	$-4J_2$	$J_2$	$\frac{qs^4}{E}$	0	$(J_2 h_2^{-1} - J_{sr} h_{sr}^{-1}) \alpha_t \Delta t s^2$	
			$J_2$	$-4J_2$	$6J_2$	$-4J_2$	$\frac{qs^4}{E}$	0	0	
			$J_2$	$-4J_2$	$-4J_2$	$5J_2$	$\frac{qs^4}{E}$	0	$(J_2 h_2^{-1}) \alpha_t \Delta t s^2$	

$$J_{\text{śr}} = \frac{2J_1 \cdot J_2}{J_1 + J_2} = \frac{2 \cdot 18b \cdot 2,25b}{18b + 2,25b} = 4b \text{ cm}^4$$

$$h_{\text{śr}} = \frac{2h_1 \cdot h_2}{h_1 + h_2} = \frac{2 \cdot 6 \cdot 3}{6 + 3} = 4 \text{ cm}$$

$$J_1 \cdot h_1^{-1} = 18b \cdot 6^{-1} = 3b$$

$$J_1 \cdot h_1^{-1} - J_{\text{śr}} \cdot h_{\text{śr}}^{-1} = 18b \cdot 6^{-1} - 4b \cdot 4^{-1} = 2b$$

$$2J_{\text{śr}} \cdot h_{\text{śr}}^{-1} - J_1 \cdot h_1^{-1} - J_2 \cdot h_2^{-1} = 2 \cdot 4b \cdot 4^{-1} - 18b \cdot 6^{-1} - 2,25b \cdot 3^{-1} = -1,75b$$

$$J_2 \cdot h_2^{-1} - J_{\text{śr}} \cdot h_{\text{śr}}^{-1} = 2,25b \cdot 3^{-1} - 4b \cdot 4^{-1} = -0,25b$$

$$J_2 \cdot h_2^{-1} = 2,25b \cdot 3^{-1} = 0,75b$$

Po podstawieniu szczegółowych danych do macierzy pokazanej w tabeli 4 otrzymano układ równań przedstawiony w tabeli 5, a jego rozwiązanie zamieszczono w tabeli 6.

Uwaga! Aby uzyskać wartości przemieszczeń  $w_i$  w centymetrach, należy do obliczeń podstawić dane w następujących jednostkach:  $q$  [ $\text{kN} \cdot \text{cm}^{-1}$ ],  $s$  [cm],  $b$  [cm],  $E$  [ $\text{kN} \cdot \text{cm}^{-2}$ ],

$$P \text{ [kN]}, \Delta t \text{ [}^\circ\text{C]}, \alpha_t \left[ \frac{1}{^\circ\text{C}} \right].$$

Tabela 5. Macierz układu równań przemieszczeniowych

Table 5. Matrix of system of displacement equations

Ugięcie							Obciążenie równomierne Uniform load	Obciążenie siłą skupioną Point load	Obciążenie temperaturą Load with temperature
$w_1$	$w_2$	$w_3$	$w_4$	$w_5$	$w_6$	$w_7$			
90	-72	18					1	0	3
-72	108	-72	18				1	0	0
18	-72	94	-44	4			1	0	2
	18	-44	36,25	12,5	2,25		1	1	-1,75
		4	12,5	15,25	-9	2,25	1	0	-0,25
			2,25	-9	13,5	-9	1	0	0
				2,25	-9	11,25	1	0	0,75
Mnożnik do prawych stron Multiplier for right sides							$\frac{qs^4}{Eb}$	$\frac{Ps^3}{Eb}$	$\alpha_t \Delta t s^2$

Tabela 6. Wyniki obliczeń układu równań przedstawionego w tabeli 5  
 Table 6. Calculation results of system equations are shown in Table 5

Ugięcie Deflection	Obciążenie równomierne Uniform load	Obciążenie siłą skupioną Point load	Obciążenie temperaturą Load with temperature
$w_1$	$3,7917 \frac{qs^4}{Eb}$	$0,7569 \frac{Ps^3}{Eb}$	$0,75 \alpha_t \Delta t s^2$
$w_2$	$7,3889 \frac{qs^4}{Eb}$	$1,4861 \frac{Ps^3}{Eb}$	$1,3333 \alpha_t \Delta t s^2$
$w_3$	$10,6528 \frac{qs^4}{Eb}$	$2,1597 \frac{Ps^3}{Eb}$	$1,75 \alpha_t \Delta t s^2$
$w_4$	$13,5 \frac{qs^4}{Eb}$	$2,75 \frac{Ps^3}{Eb}$	$2 \alpha_t \Delta t s^2$
$w_5$	$14,3472 \frac{qs^4}{Eb}$	$2,8403 \frac{Ps^3}{Eb}$	$2 \alpha_t \Delta t s^2$
$w_6$	$11,8611 \frac{qs^4}{Eb}$	$2,2639 \frac{Ps^3}{Eb}$	$1,6667 \alpha_t \Delta t s^2$
$w_7$	$6,7083 \frac{qs^4}{Eb}$	$1,2431 \frac{Ps^3}{Eb}$	$1 \alpha_t \Delta t s^2$

Poniżej zamieszczono obliczone wartości momentów zginających w punkcie środkowym belki dla poszczególnych rodzajów obciążeń:

– obciążenie równomierne

$$M_{x4} = -EJ_{\text{sr}} \frac{10,6528 - 2 \cdot 13,5 + 14,3472}{s^2} \frac{qs^4}{Eb} = 0,12498ql^2$$

– obciążenie siłą skupioną

$$M_{x4} = -EJ_{\text{sr}} \frac{2,1597 - 2 \cdot 2,75 + 2,8403}{s^2} \frac{Ps^3}{Eb} = 0,25Pl$$

– obciążenie temperaturą

$$M_{x4} = -EJ_{\text{sr}} \left[ \frac{1,75 - 2 \cdot 2 + 2}{s^2} \alpha_t \Delta t s^2 + \alpha_t \Delta t \cdot 4^{-1} \right] = 0$$

## PODSUMOWANIE

W pracy przedstawiono wykorzystanie wariacyjnego ujęcia metody różnic skończonych do poszukiwania rozwiązań belek o liniowo oraz skokowo zmieniających się wysokościach, obciążonych oprócz tradycyjnego typu obciążeniami, także temperaturą. Istotną sprawą było rozstrzygnięcie właściwego przyjmowania w obliczeniach sztywności

belki w miejscu skokowej zmiany wysokości. Wykazano, że w takich przypadkach należy przyjąć sztywność obliczoną jako średnią harmoniczną ze sztywności stykających się fragmentów belki o różnej wysokości. Wyniki uzyskane metodą różnic skończonych dla obciążeń masowych porównano z dostępnymi w literaturze wynikami ścisłymi. Zgodność wyników była bardzo duża.

Rozwiązania przedstawione w niniejszej pracy stanowią przyczynek do poszukiwania rozwiązań metodą różnic skończonych dla zbiorników prostopadłościennych ze ścianami o przekroju trapezowym lub ze ścianami o zmiennej skokowo grubości z uwzględnieniem przestrzennej pracy statycznej ustroju, a także z uwzględnieniem obciążeń temperaturą.

## PIŚMIENNICTWO

- Bielewicz E., Wachowiak J., Wilde P., 1967. Analiza statyczna przekrycia jednosłupowego. *Archiwum Inżynierii Lądowej* XIII, 167–180.
- Buczkowski W., 2007. Obciążenia termiczne belek, płyt i konstrukcji inżynierskich. Wydawnictwo SGGW, Warszawa.
- Jastrzębski P., Mutermilch J., Orłowski W., 1974. Wytrzymałość materiałów. Arkady, Warszawa.
- Kurowski R., Parszewski Z., 1970. Zbiór zadań z wytrzymałości materiałów. PWN, Warszawa.
- Orłowski W., Słowański L., 1978. Wytrzymałość materiałów. Przykłady obliczeń. Arkady, Warszawa.
- Pietrzak J., Rakowski G., Wrześniowski K., 1979. Macierzowa analiza konstrukcji. PWN, Warszawa-Poznań.
- Podhorecki A., Przedpełski J., 1982. Niektóre problemy obliczania prętów o zmiennej sztywności metodą różnic skończonych. *Archiwum Inżynierii Lądowej* XXVIII, 1–2, 67–77.

## SOLUTION OF BEAMS OF CHANGEABLE RIGIDITY WITH USE OF FINITE-DIFFERENCE METHOD

**Abstract.** The paper presents solutions of beams with changeable rigidity. The finite-difference method was used for calculations. The way of construction of matrixes of displaced equation systems was presented. A solution for several static schemes of changeable rigidity beams loaded with mass and temperature gradient between bottom and upper plane of beams was given. Matrixes with their coefficients of general designations make it possible to get solutions for beams of the same static schemes but different rigidities.

**Key words:** beams of changeable rigidity, loading with temperature, finite-difference method