

OBLICZANIE PIERWSZEJ CZĘSTOŚCI DRGAŃ WŁASNYCH SŁUPÓW STALOWYCH O ZMIENNYM PRZEKROJU POPRZECZNYM CZĘŚĆ I. WYPROWADZENIE WZORÓW

Jacek Jaworski, Marta Boniecka, Marcin Nycz
Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie

Streszczenie. W pracy rozwinięto przybliżony sposób wyznaczania okresu drgań własnych konstrukcji wieżowych (według normy PN-77/B-02011), zastępując podział słupa na skończoną liczbę mas skupionych i sumowanie iloczynów mas i kwadratów ugięć przez całkowanie. Wyprowadzono wzory do obliczeń pierwszej częstości (okresu) drgań własnych dla słupów w kształcie ściętego stożka i ściętego ostrosłupa prawidłowego. Rozwiązano także szczególny przypadek słupów w kształcie rur stożkowych (o ściankach zbieżnych), kiedy tworzące stożka (lub ostrosłupa) zewnętrznego i wewnętrznego przecinają oś stożka (lub ostrosłupa) w tym samym punkcie. Przykłady obliczeń i porównanie wyników zostaną zamieszczone w drugiej części pracy.

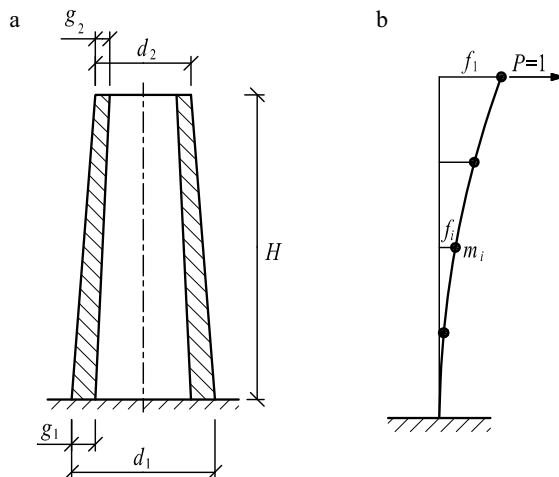
Słowa kluczowe: słup stalowy, okres drgań własnych, pierwsza częstość drgań własnych

WSTĘP

Słupy, a także wieże i kominy należą do konstrukcji podatnych na dynamiczne oddziaływanie wiatru. W celu oszacowania wielkości obciążenia wiatrem należy określić współczynnik działania porywów wiatru, do czego z kolei potrzebne jest wyznaczenie częstości (lub okresu) drgań własnych konstrukcji. Największa amplituda, a także największe obciążenia dynamiczne występują podczas drgań giętych z pierwszą (najniższą) częstością drgań własnych.

PRZYBLIŻONE WZORY DO OBLICZEŃ DRGAŃ WŁASNYCH KONSTRUKCJI WIEŻOWYCH WEDŁUG PN-77/B-02011

W załączniku 2 do normy PN-77/B-02011 zaproponowano trzy schematy konstrukcji wieżowych i podano dla nich wzory na obliczenie okresu drgań własnych konstrukcji. W niniejszej pracy interesuje nas schemat pierwszy i trzeci; pokazano je na rysunku 1.



Rys. 1. Schematy do obliczeń okresu drgań słupów według PN-77/B-02011: a – schemat pierwszy, b – schemat trzeci (słup o masie rozłożonej na n mas skupionych); H – wysokość, d_1, d_2 – średnica przy podstawie i przy wierzchołku, P – siła poprzeczna, m_i – i -ta masa skupiona ($i = 1, \dots, n$), f_i – ugięcie na wysokości i -tej masy pod działaniem siły poprzecznej $P = 1$ przyłożonej do swobodnego końca słupa, f_1 – ugięcie przy wierzchołku słupa

Fig. 1. Schemes for calculations of natural period of columns after PN-77/B-02011 standard: a – the first scheme, b – the third scheme (mass of column divided in n concentrated masses); H – height, d_1, d_2 – diameter at the footing and head of column, P – transverse force, m_i – concentrated mass ($i = 1, \dots, n$), f_i – deflection at the height of mass m_i when the transverse force $P = 1$ is applied to the column head, f_1 – deflection at the column head

Pierwszy schemat (rys. 1a) przedstawia konstrukcję wspornikową w kształcie rury stożkowej (wydrążonego stożka). Odpowiada to budowie niektórych konstrukcji wieżowych i kominów, a także słupów. Do obliczenia okresu drgań własnych podano w normie wzór:

$$T = KH^2 \sqrt{\frac{G}{gEJ}} \quad (1)$$

gdzie: H – wysokość wieży,

G – ciężar wieży na jednostkę długości na poziomie podstawy,

g – przyspieszenie ziemskie,

E – moduł sprężystości podłużnej,

J – moment bezwładności przekroju podstawy,

K – współczynnik zależny od proporcji wymiarów geometrycznych (stosunku średnic i stosunku grubości ścianek przy wierzchołku i przy podstawie).

Wartość współczynnika K można odczytać z wykresów lub obliczyć ze wzorów podanych w tablicy Z2-2 na str. 35 normy PN-77/B-02011 – dla słupa o stałym przekroju rurowym norma zaleca przyjąć $K = 1,79$.

Trzeci schemat (rys. 1b) przedstawia konstrukcję wspornikową, której masę zastąpiono pewną liczbą mas skupionych. Zastępując masę słupa przez n mas skupionych i obliczając przemieszczenia od statycznie obciążającej wierzchołek słupa poziomej siły jednostkowej $P = 1$, obliczyć można okres drgań własnych z podanego w normie wzoru:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n Q_i f_i^2}{g f_1}} \quad (2)$$

gdzie: Q_i – ciężar i -tej masy skupionej,

f_i – przemieszczenie słupa na wysokości i -tej masy pod działaniem siły $P = 1$,

f_1 – przemieszczenie wierzchołka słupa pod działaniem siły $P = 1$.

Podobną postać do wzoru (1) ma jeden ze wzorów do obliczania podstawowego okresu drgań własnych kominów stalowych podany w załączniku 3 normy PN-93/B-03201 – wzór (Z3-7).

METODYKA

Istotą zaprezentowanego ujęcia jest zastosowanie do schematu słupa, jak na rysunku 1a, obliczeń według wzoru (2), w którym obliczanie wielkości dla mas skupionych zastąpione zostanie, ze względu na ciągły rozkład masy, całkowaniem:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\int_0^M f(x)^2 dm}{f_1}} = 2\pi \sqrt{\frac{\int_0^H f(x)^2 m(x) dx}{f_1}} \quad (3)$$

Dla przejrzystości zapisów i obliczeń ciężary zastąpiono masami – dm jest masą elementarną, a M – całkowitą masą słupa. Masa elementarna może być wyrażona jako iloczyn stałej gęstości materiału (ρ), pola powierzchni przekroju poprzecznego (F), będącego funkcją współrzędnej x i elementarnej grubości warstwy (dx):

$$dm = \rho F(x) dx \quad (4)$$

Po określeniu masy elementarnej w funkcji dx całkujemy jak we wzorze (3) po współrzędnej x , w granicach od 0 do H . Przyjęto założenia, że materiał jest jednorodny i sprężysty ($E = \text{const}$), zależności opisujące elementarną masę, momenty bezwładności i ugięcia od wysokości słupa są funkcjami ciągłymi, a przemieszczenia są małe.

Zaletą tego ujęcia jest wyrugowanie niedokładności związanej z odwzorowaniem konstrukcji przez niewielką liczbę mas skupionych. Pozostają natomiast właściwe dla tej metody niedokładności związane z arbitralnym przyjęciem kształtu drgań w postaci linii ugięcia, uproszczenia związane z obliczeniem ugięć metodą Clebscha lub Maxwella-Mohra, pominięcie sił bezwładności w ruchu obrotowym. Obszerniejsze omówienie tych uproszczeń znaleźć można na przykład w pracach Awrejcewicza i Kryski [2000] i Bijaka-Żochowskiego i innych [2006].

Opierając się na przykładach rozwiązań dla prętów o stałym przekroju, wielu autorów wskazuje, że metody uproszczone, w których przyjmuje się, że postać drgań pręta odpowiada kształtowi ugięcia przy obciążeniu statycznym, prowadzą do małych niedokładności, poniżej 1–1,5% [Sułocki 1957, Solecki i Szymkiewicz 1964, Dyląg i in. 2000]. Także w tej pracy okres pierwszej postaci drgań własnych belki wspornikowej o stałym przekroju obliczony według wzoru (3) różni się o niecałe 1,5% od okresu wynikającego z rozwiązania cząstkowego równania różniczkowego czwartego rzędu dla swobodnych drgań poprzecznych belki, które określa tzw. falę stojącą. Rozwiązanie to, uważane za dokładne, pozwala na obliczenie kolejnych częstości drgań swobodnych pręta wspornikowego o stałym przekroju [Chmielewski i Zemбаты 1998, Dyląg i in. 2000]. Zapisując w tym rozwiązaniu okres pierwszej postaci drgań jak we wzorze (1), otrzymujemy, że $K = 1,7870188$.

ŚLUP W KSZTAŁCIE ŚCIĘTEGO STOŻKA

Dla pokazanego na rysunku 2 słupa w kształcie ściętego stożka można zapisać następujące zależności geometryczne:

$$\frac{D_p}{L} = \frac{D_k}{H+L} \quad (5); \quad L = \frac{D_k}{D_k - D_p} H \quad (6); \quad a = \frac{D_p}{L} = \frac{D_k - D_p}{H} \quad (7); \quad n = \frac{D_k}{D_p} \quad (8)$$

gdzie: H – wysokość słupa,

L – odległość wierzchołka słupa od punktu przecięcia tworzącej z osią słupa,

D_p – średnica przy wierzchołku słupa,

D_k – średnica przy podstawie słupa,

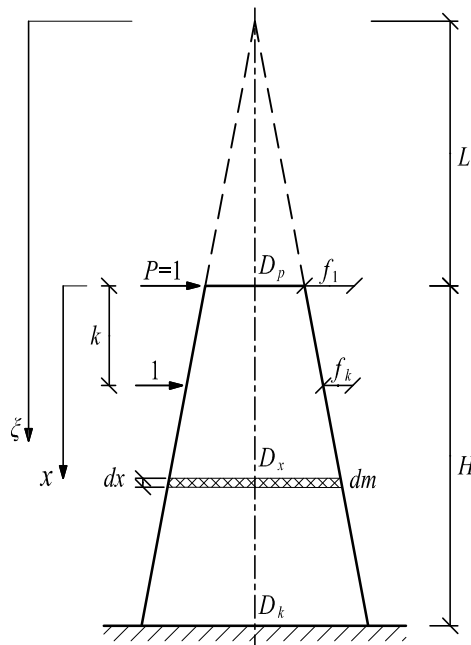
a – wielkość stała dla danego słupa.

Między współrzędnymi x i ξ zachodzi związek $x = \xi - L$, a więc:

$$D_\xi = a\xi; \quad D_x = D_\xi = a\xi = a(x+L) = \frac{D_k - D_p}{H}(x+L) \quad (9)$$

Elementarna masa (dm) może być wyrażona jako:

$$dm = \rho \frac{\pi D_x^2 dx}{4} = \rho \frac{\pi (D_k - D_p)^2}{4 H^2} (x+L)^2 dx \quad (10)$$



Rys. 2. Schemat do obliczeń okresu drgań własnych dla ściętego stożka: x, ξ – osie współrzędnych, H – wysokość, L – odległość wierzchołka słupa od punktu przecięcia tworzącej stożka z osią słupa, D_p, D_x, D_k – średnice przy wierzchołku dla współrzędnej x i przy podstawie, P – siła poprzeczna, 1 – siła jednostkowa, k – odległość od wierzchołka do punktu przyłożenia siły jednostkowej, f_1, f_k – ugięcia słupa, dx – elementarna długość, dm – elementarna masa

Fig. 2. Scheme for calculations of natural period for frustum of cone: x, ξ – coordinate axes, H – height, L – distance between the head of column and the point of intersection of the generating line with a cone axis, D_p, D_x, D_k – diameters at head, for coordinate x and at footing, P – transverse force, 1 – unit force, k – distance between the head of column and the point of application of the unit force, f_1, f_k – deflections, dx – infinitesimal length, dm – infinitesimal mass

a moment bezwładności przekroju jako:

$$J_x = \frac{\pi D_x^4}{64} = \frac{\pi (D_k - D_p)^4}{64 H^4} (x + L)^4 \quad (11)$$

Ugięcia na jednostkę siły w odległości k od wierzchołka słupa ($0 \leq k \leq H$) można określić metodą Maxwella-Mohra, przykładając siłę $P = 1$ do wierzchołka słupa, a siłę jednostkową w punkcie odległym o k od wierzchołka:

$$f_k = \int_k^H \frac{M_{P=1} M_1}{EJ_x} dx = \int_k^H \frac{\left(-\frac{P_x}{P}\right) [-1(x-k)]}{EJ_x} dx = \int_k^H \frac{x(x-k)}{EJ_x} dx \quad (12)$$

a po scałkowaniu:

$$f_k = \frac{64H^4}{E\pi(D_k - D_p)^4} \left[-\frac{L^2}{3(H+L)^3} + \frac{L}{(H+L)^2} - \frac{1}{H+L} + \frac{L^2}{3(k+L)^3} - \frac{L}{(k+L)^2} + \frac{1}{k+L} + \frac{k}{2(H+L)^2} - \frac{kL}{3(H+L)^3} - \frac{k}{2(k+L)^2} + \frac{kL}{3(k+L)^3} \right] \quad (13)$$

Przy wprowadzeniu wzoru (13) do dalszego całkowania k zostanie zastąpione przez x , a f_k przez f_x . Ugięcie swobodnego końca słupa (siła 1 przyłożona do wierzchołka) wynosi:

$$f_1 = \int_k^H \frac{x^2}{Ej_x} dx = \frac{64H^4}{E\pi(D_k - D_p)^4} \int_0^H \frac{x^2}{(x+L)^4} dx \quad (14)$$

a po scałkowaniu:

$$f_1 = \frac{64H^4}{E\pi(D_k - D_p)^4} \left[-\frac{1}{H+L} + \frac{L}{(H+L)^2} - \frac{L^2}{3(H+L)^3} + \frac{1}{3L} \right] \quad (15)$$

Wszystkie całkowania w tej pracy wykonano, korzystając z rozwiązań całek podanych w tablicach matematycznych [Spiegel i Abellanas 1991].

Podstawiając wyrażenia ze wzorów (10), (11), (13) i (15) do wzoru (3), otrzymamy wyrażenie na okres drgań słupa w postaci:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{64\rho H^2 \int_0^H A(x)^2 (x+L)^2 dx}{4E(D_k - D_p)^2 B}} \quad (16)$$

gdzie przez $A(x)$ i B oznaczono wyrażenia:

$$A(x) = -\frac{L^2}{3(H+L)^3} + \frac{L}{(H+L)^2} - \frac{1}{H+L} + \frac{L^2}{3(x+L)^3} - \frac{L}{(x+L)^2} + \frac{1}{x+L} + \frac{x}{2(H+L)^2} - \frac{xL}{3(H+L)^3} - \frac{x}{2(x+L)^2} + \frac{xL}{3(x+L)^3} \quad (17)$$

$$B = -\frac{1}{H+L} + \frac{L}{(H+L)^2} - \frac{L^2}{3(H+L)^3} + \frac{1}{3L} \quad (18)$$

Wyrażenie pod znakiem całkowania w liczniku wzoru (16) może być przekształcone do postaci:

$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{x(3H+L) - 2(3H^2 + 3HL + L^2)}{6(H+L)^3} + \frac{3x^2 + 5xL + 2L^2}{6(x+L)^3} \right]^2 (x+L)^2 = \\
 & = \left[\frac{x(3H+L) - 2(3H^2 + 3HL + L^2)}{6(H+L)^3} \right]^2 (x+L)^2 + \\
 & + 2 \frac{x(3H+L) - 2(3H^2 + 3HL + L^2)}{6(H+L)^3} \frac{3x^2 + 5xL + 2L^2}{6(x+L)^3} (x+L)^2 + \\
 & + \left[\frac{3x^2 + 5xL + 2L^2}{6(x+L)^3} \right]^2 (x+L)^2 = D + E + F
 \end{aligned} \tag{19}$$

Należy teraz policzyć następującą całkę:

$$\int_0^H (D + E + F) dx = \int_0^H D dx + \int_0^H E dx + \int_0^H F dx \tag{20}$$

Przekształcając wyrazy D , E i F do wygodniejszej postaci, całkując i porządkując wyniki całkowania, otrzymamy:

$$\begin{aligned}
 D = & \frac{1}{6^2 (H+L)^6} \left\{ (3H+L)^2 (x^4 + 2x^3L + x^2L^2) - 4(3H+L)x \right. \\
 & \left. \times (3H^2 + 3HL + L^2)(x^3 + 2x^2L + xL^4) + 4(3H^2 + 3HL + L^2)^2 (x^2 + 2xL + L^2) \right\}
 \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^H D dx = & \frac{H}{6^2 (H+L)^6} \left(\frac{24}{5} H^6 + \frac{297}{10} H^5 L + \frac{391}{5} H^4 L^2 + \right. \\
 & \left. + \frac{203}{2} H^3 L^3 + 71 H^2 L^4 + 26 H L^5 + 4 L^6 \right)
 \end{aligned} \tag{22}$$

$$E = \frac{3H+L}{18(H+L)^3} \frac{3x^3 + 5x^2L + 2xL^2}{x+L} - \frac{3H^2 + 3HL + L^2}{9(H+L)^3} \frac{3x^2 + 5xL + 2xL^2}{x+L} \tag{23}$$

$$\int_0^H E dx = -\frac{H}{9(H+L)^3} \left(3H^5 + \frac{17}{2} H^2 L + 7HL^2 + 2L^5 \right) \tag{24}$$

$$F = \frac{1}{36} \left[\frac{9x^4}{(x+L)^4} + \frac{30Lx^3}{(x+L)^4} + \frac{37L^2x^2}{(x+L)^4} + \frac{20L^3x}{(x+L)^4} + \frac{4L^4}{(x+L)^4} \right] \quad (25)$$

$$\int_0^H F dx = \frac{1}{36} \left[\frac{7x^4}{(x+L)^3} + 2H + 22L - 6L \ln \frac{H+L}{L} - \frac{43L^2}{H+L} + \frac{28L^3}{(H+L)^2} - \frac{7L^4}{(H+L)^3} \right] \quad (26)$$

Powyższe wyrażenia stanowią już rozwiązanie całkowania według wzoru (3), postać rozwiązania można natomiast jeszcze uprościć. Po innym uporządkowaniu wyrazów wynik wzoru (20) można przedstawić jako:

$$\begin{aligned} \int_0^H (D+E+F) dx &= \frac{H}{36(H+L)^6} \left[1,8H^6 + 14,7H^5L + 52,2H^4L^2 + \right. \\ &+ 85,5H^3L^3 + 74H^2L^4 + 33HL^5 + 6L^6 - \\ &\left. - \left(6H^5L + 36H^4L^2 + 90H^3L^3 + 120H^2L^4 + 90HL^5 + 36L^6 + \frac{6}{H}L^7 \right) \ln \frac{H+L}{L} \right] \end{aligned} \quad (27)$$

a wyrażenie w nawiasie kwadratowym wzoru (15) jako:

$$-\frac{1}{H+L} + \frac{L}{(H+L)^2} - \frac{L^2}{3(H+L)^3} + \frac{1}{3L} = \frac{1}{9(H+L)^6} \left(3\frac{H^6}{L} + 9H^5 + 9H^4L + 3H^3L^2 \right) \quad (28)$$

Uwzględniając w przekształceniach stosunek średnicy dolnej do górnej (n) – wzór (8), i uwzględniając, że:

$$L = \frac{H}{n-1} \quad (29)$$

$$\ln \frac{H+L}{L} = \ln n \quad (30)$$

otrzymuje się po dalszych przekształceniach i uproszczeniach poniższą, wygodną do pewnych zastosowań postać wzoru na okres drgań słupa w kształcie ściętego stożka, określony przez gęstość materiału (ρ), moduł Younga (E), wysokość (H), średnicę przy wierzchołku (D_p) i stosunek średnic dolnej do górnej (n):

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{16\rho H^2}{ED_p^2(n-1)^2} \sqrt{\frac{H^2(1,8n^7 + 2,1n^6 + 1,8n^5 - 18n^4 + 23n^3 - 15,3n^2 + 5,4n - 0,8 - 6n^6 \ln n)}{12(n-1)^5 n^3}}} \quad (31)$$

Do bezpośrednich obliczeń okresu drgań słupa w kształcie stożka wygodniejsza jest natomiast następująca postać wzoru:

$$T = \frac{4\pi H^2}{D_p (n-1)^3} \sqrt{\frac{\rho(1,8n^7 + 2,1n^6 + 1,8n^5 - 18n^4 + 23n^3 - 15,3n^2 + 5,4n - 0,8 - 6n^6 \ln n)}{3E(n-1)n^3}} \quad (32)$$

We wzorach (31) i (32) musi być spełniony warunek, że $n \neq 1$. Oznacza to, że z wzorów tych nie wynika rozwiązanie dla walca, jako szczególnego przypadku stożka, gdy $n = 1$.

SŁUP W KSZTAŁCIE RURY STOŻKOWEJ O ZMIENNEJ GRUBOŚCI ŚCIANKI

Schemat obliczeniowy dla takiego przypadku przedstawiono na rysunku 3a. Słup ma kształt ściętego stożka z współosiowym wydrążeniem też w kształcie ściętego stożka. Ścianka określonej w ten sposób bryły obrotowej ma w ogólnym przypadku zmienną grubość.

Wymiary opisujące budowę geometryczną stożka pokazano na rysunku 3a. Można określić podane poniżej związki dla stożka zewnętrznego:

$$n = \frac{D_k}{D_p} \quad (33)$$

$$a = \frac{D_p}{L} = \frac{D_k - D_p}{H} = \frac{D_p(n-1)}{H} \quad (34)$$

$$L = \frac{D_k}{D_k - D_p} H = \frac{H}{n-1} \quad (35)$$

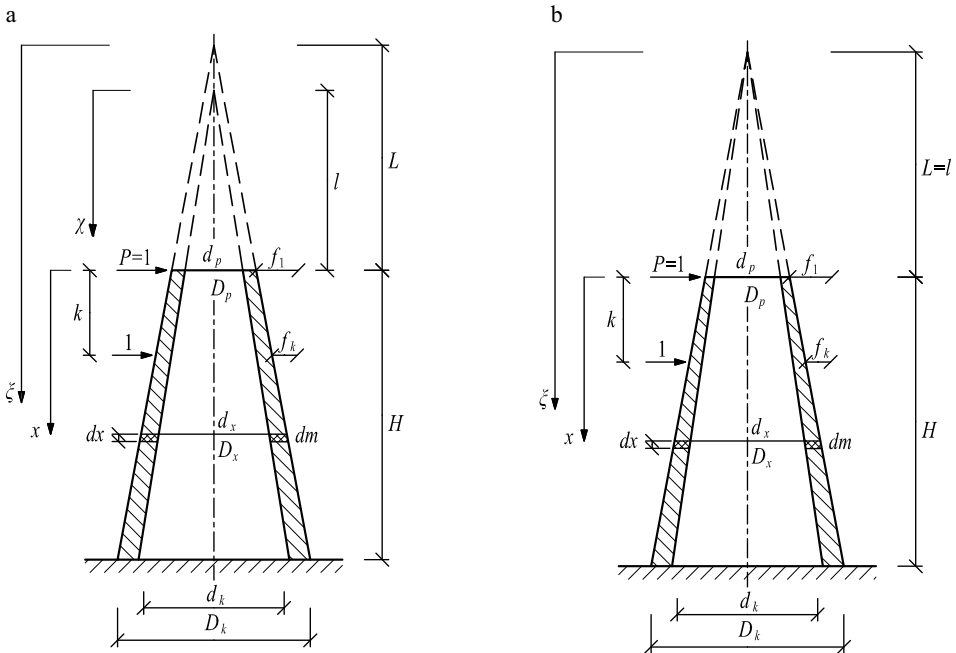
$$L + H = H \frac{n}{n-1} \quad (36)$$

i dla stożka wewnętrznego:

$$m = \frac{d_k}{d_p} \quad (37)$$

$$b = \frac{d_p}{l} = \frac{d_k - d_p}{H} = \frac{d_p(m-1)}{H} \quad (38)$$

$$l = \frac{d_k}{d_k - d_p} H = \frac{H}{m-1} \quad (39)$$



Rys. 3. Schemat do obliczeń okresu drgań własnych dla rury w kształcie stożka: a – przypadek ogólny, b – przypadek szczególny, gdy tworzące stożka zewnętrznego i wewnętrznego przecinają oś stożka w jednym punkcie; x , ξ , χ – osie współrzędnych, H – wysokość, L , l – odległości wierzchołka słupa od punktów przecięcia tworzących stożka z osią słupa, D_p , D_x , D_k , d_p , d_x , d_k – zewnętrzne i wewnętrzne średnice przy wierzchołku, dla współrzędnej x i przy podstawie, P – siła poprzeczna, 1 – siła jednostkowa, k – odległość od wierzchołka do punktu przyłożenia siły jednostkowej, f_1, f_k – ugięcia słupa, dx – elementarna długość, dm – elementarna masa

Fig. 3. Scheme for calculations of natural period for tube shaped like a cone: a – general case, b – special case when generating lines of external and internal cone are crossing the cone axis in the same point; x , ξ , χ – coordinate axes, H – height, L , l – distances between the head of column and points of intersection of generating lines of external and internal cones with a cone axis, D_p , D_x , D_k , d_p , d_x , d_k – external and internal diameters at head, for coordinate x and at footing, P – transverse force, 1 – unit force, k – distance between the head of column and the point of application of the unit force, f_1, f_k – deflections, dx – infinitesimal length, dm – infinitesimal mass

$$l + H = H \frac{m}{m-1} \quad (40)$$

oraz związki między wymiarami stożka wewnętrznego i zewnętrznego:

$$\alpha = \frac{d_p}{D_p} \quad (41); \quad \beta = \frac{d_k}{D_k} \quad (42)$$

Pomiędzy współrzędnymi zachodzą następujące związki:

$$\xi = x + L \quad (43); \quad \chi = x + l \quad (44)$$

Kształt geometryczny słupa określony jest przez następujące wielkości: wysokość (H), średnicę przy wierzchołku (D_p) i stosunki średnic n i α , przy czym zamiast n i α możemy używać m i β .

Z proporcji wymiarów

$$\frac{D_x}{x+L} = \frac{D_p}{L} \quad (45); \quad \frac{d_x}{x+l} = \frac{d_p}{l} \quad (46)$$

wynikają związki:

$$D_x = \frac{D_p(x+L)}{L} \quad (47); \quad d_x = \frac{d_p(x+l)}{l} \quad (48)$$

Pozwala to na wyrażenie elementarnej masy i momentu bezwładności w funkcji x jako:

$$dm = \rho \frac{\pi}{4} (D_x^2 - d_x^2) dx = \rho \frac{\pi D_p^2}{4} \left[\frac{(x+L)^2}{L^2} - \alpha^2 \frac{(x+l)^2}{l^2} \right] dx \quad (49)$$

$$J_x = \frac{\pi}{64} (D_x^4 - d_x^4) = \frac{\pi D_p^4}{64} \left[\frac{(x+L)^4}{L^4} - \alpha^4 \frac{(x+l)^4}{l^4} \right] \quad (50)$$

Postępując podobnie jak w poprzednim punkcie, możemy analogicznie do równań (12) i (14) zapisać wzory na f_k i f_1 . Podstawiając zaś powyższe związki do wzoru (3), otrzymamy wyrażenie na okres drgań w postaci:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{64\rho}{4ED_p^2} \frac{\int_k^H \frac{x(x-k)}{\frac{(x+L)^4}{L^4} - \alpha^4 \frac{(x+l)^4}{l^4}} dx}{\int_0^H \frac{x^2}{\frac{(x+L)^4}{L^4} - \alpha^4 \frac{(x+l)^4}{l^4}} dx}} \quad (51)$$

W wyrażeniu tym po scałkowaniu wyrażenia w liczniku parametr k , podobnie jak w zagadnieniu rozwiązywanym w poprzednim punkcie, stanie się zmienną x . Ze względu na stopień skomplikowania całkowań we wzorze (51) rozwiązanie tak sformułowanego problemu ogólnego nie zostało dotychczas przez autorów znalezione.

SŁUP W KSZTAŁCIE RURY STOŻKOWEJ – PRZYPADEK SZCZEGÓLNY, GDY $L = l$

Uwzględniony tu zostanie szczególny przypadek, gdy tworzące stożka zewnętrznego i wewnętrznego (otworu) przecinają się w jednym punkcie, leżącym na osi stożków (rys. 3b). Możemy tu wykorzystać zależności uzyskane w poprzednim punkcie z uwzględnieniem upraszczającego warunku, że $L = l$.

Otrzymamy więc:

$$dm = \rho \frac{\pi D_p^2 (1 - \alpha^2) (n-1)^2}{4H^2} (x+L)^2 dx \quad (52)$$

$$J_x = \frac{\pi D_p^4}{64H^4} (1 - \alpha^4) (n-1)^4 (x+L)^4 \quad (53)$$

$$f_k = \frac{64H^4}{E\pi D_p^4 (1 - \alpha^4) (n-1)^4} \int_k^H \frac{x(x-k)}{(x+L)^4} dx \quad (54)$$

$$f_l = \frac{64H^4}{E\pi D_p^4 (1 - \alpha^4) (n-1)^4} \int_0^H \frac{x^2}{(x+L)^4} dx \quad (55)$$

Uwzględniając, że:

$$\int_0^M f_x^2 dm = \frac{\rho\pi D_p^2 (1 - \alpha^2) (n-1)^2}{4H^2} \int_0^H f_x^2 (x+L)^2 dx \quad (56)$$

i wykonując dalsze obliczenia analogicznie jak w poprzednich punktach, podstawiając powyższe zależności do równania (3), otrzymujemy wzór na okres drgań w postaci:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{16\rho H^2 (1 - \alpha^2)}{E D_p^2 (1 - \alpha^4) (n-1)^2}} \times \sqrt{\frac{H^2 (1,8n^7 + 2,1n^6 + 1,8n^5 - 18n^4 + 23n^3 - 15,3n^2 + 5,4n - 0,8 - 6n^6 \ln n)}{12(n-1)^5 n^3}} \quad (57)$$

W najbardziej złożonych fragmentach tych obliczeń możemy wykorzystać wyniki całkowań przeprowadzonych dla przypadku słupa w kształcie stożka, co w decydujący sposób upraszcza otrzymanie rozwiązań.

Wprowadzając do wzoru (57) zależność:

$$\frac{1-\alpha^2}{1-\alpha^4} = \frac{1}{1-\alpha^2} \quad (58)$$

można przedstawić ostateczny wynik w postaci:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{16\rho H^2}{ED_p^2(1+\alpha^2)(n-1)^2}} \quad (59)$$

$$\sqrt{\frac{H^2(1,8n^7 + 2,1n^6 + 1,8n^5 - 18n^4 + 23n^3 - 15,3n^2 + 5,4n - 0,8 - 6n^6 \ln n)}{12(n-1)^5 n^3}}$$

lub też w najprostszej formie jako:

$$T = \frac{4\pi H^2}{D_p(n-1)^3} \sqrt{\frac{\rho(1,8n^7 + 2,1n^6 + 1,8n^5 - 18n^4 + 23n^3 - 15,3n^2 + 5,4n - 0,8 - 6n^6 \ln n)}{3E(1+\alpha)^2(n-1)n^3}} \quad (60)$$

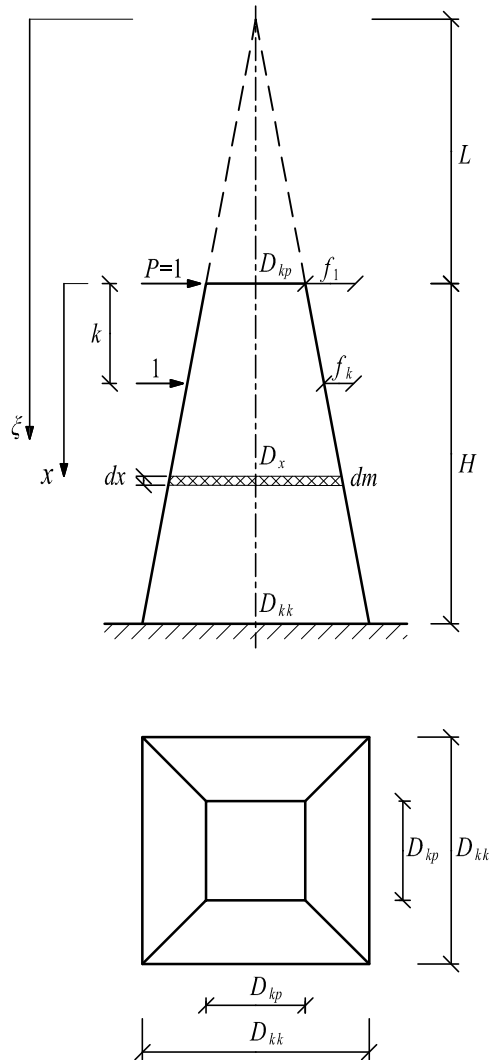
Porównując wyrażenia (31) i (59), widać, że między okresem drgań dla ściętego stożka i dla rury stożkowej (ściętego stożka wydrążonego w szczególnym przypadku, gdy tworzące stożka zewnętrzne i wewnętrzne przecinają się w tym samym punkcie na osi stożka, czyli $L = l$) zachodzi prosta zależność:

$$T_{(59)} = T_{(31)} \sqrt{\frac{1}{1+\alpha^2}} \quad (61)$$

gdzie zgodnie ze wzorem (41) α jest stosunkiem średnicy wewnętrznej do zewnętrznej przy wierzchołku słupa: $\alpha = \frac{d_p}{D_p}$. Także w powyższych wzorach obowiązuje warunek, że $n \neq 1$.

SŁUP W KSZTAŁCIE OSTROSŁUPA ŚCIĘTEGO PRAWIDŁOWEGO

Wyprowadzone uprzednio wzory dla stożków ściętych mogą być – po prostym ich dostosowaniu – wykorzystane dla ostrosłupów ściętych prawidłowych. Wymagane jest jedynie określenie pola powierzchni i momentu bezwładności przekroju poprzecznego. Poniżej pokazano to na przykładzie słupa w kształcie ostrosłupa ściętego prawidłowego kwadratowego, dla którego wszystkie przekroje poprzeczne są kwadratami (rys. 4).



Rys. 4. Schemat do obliczeń okresu drgań własnych dla ściętego ostrosłupa prawidłowego czworokątnego: x, ξ – osie współrzędnych, H – wysokość, L – odległość wierzchołka słupa od punktu przecięcia tworzącej stożka z osią słupa, D_{kp}, D_{ks}, D_{kk} – długości boków przy wierzchołku dla współrzędnej x i przy podstawie, P – siła poprzeczna, 1 – siła jednostkowa, k – odległość od wierzchołka do punktu przyłożenia siły jednostkowej, f_1, f_k – ugięcia słupa, dx – elementarna długość, dm – elementarna masa

Fig. 4. Scheme for calculations of natural period for frustum of square pyramid; x, ξ – coordinate axes, H – height, L – distance between the head of column and the point of intersection of the generating line with a pyramid axis, D_{kp}, D_{ks}, D_{kk} – lengths of sides of square cross sections, P – transverse force, 1 – unit force, k – distance between the head of column and the point of application of the unit force, f_1, f_k – deflections, dx – infinitesimal length, dm – infinitesimal mass

Wprowadzając jak poprzednio oznaczenie:

$$\frac{D_{kk}}{D_{kp}} = n \quad (62)$$

otrzymamy zależność

$$D_{kx} = \frac{(D_{kk} - D_{kp})(x+L)}{H} = \frac{D_{kp}(n-1)(x+L)}{H} \quad (63)$$

gdzie: D_{kp} , D_{kk} i D_{kx} są długościami boków kwadratów dla odpowiednich przekrojów słupa.

Określenie poniższych związków (jak poprzednio z zastrzeżeniem, że $n \neq 1$):

$$dm = \rho D_{kx}^2 dx = \rho \frac{D_{kp}^2 (n-1)^2}{H^2} (x+L)^2 dx \quad (64)$$

$$J_x = \frac{D_{kx}^4}{12} = \frac{D_{kp}^4 (n-1)^4}{12H^4} (x+L)^4 \quad (65)$$

$$f_k = \frac{12H^4}{ED_{kp}^4 (n-1)^4} \int_k^H \frac{x(x-k)}{(x+L)^4} dx \quad (66)$$

$$f_1 = \frac{12H^4}{ED_{kp}^4 (n-1)^4} \int_0^H \frac{x^2}{(x+L)^4} dx \quad (67)$$

i przeprowadzenie analogicznych jak dla stożka obliczeń, z wykorzystaniem wyniku całkowania jak w przypadku stożka ściętego, prowadzi do wzoru na okres drgań w postaci:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{12\rho H^2}{ED_{kp}^2 (n-1)^2} \sqrt{\frac{H^2 (1,8n^7 + 2,1n^6 + 1,8n^5 - 18n^4 + 23n^3 - 15,3n^2 + 5,4n - 0,8 - 6n^6 \ln n)}{12(n-1)^5 n^3}}} \quad (68)$$

lub też w najprostszej formie jako:

$$T = \frac{2\pi H^2}{D_{kp} (n-1)^3} \sqrt{\frac{\rho (1,8n^7 + 2,1n^6 + 1,8n^5 - 18n^4 + 23n^3 - 15,3n^2 + 5,4n - 0,8 - 6n^6 \ln n)}{3E(1+\alpha)^2 (n-1)^3}} \quad (69)$$

Porównując wyrażenia (31) i (68), widać, że między okresem drgań dla ściętego stożka i dla ściętego ostrosłupa kwadratowego zachodzi prosta zależność:

$$T_{(67)} = T_{(30)} \sqrt{\frac{12}{16}} = T_{(30)} \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (70)$$

PODSUMOWANIE WYNIKÓW

Otrzymane wyniki dla stożka ściętego umożliwiają proste obliczenia pierwszej części drgań własnych (giętnych) słupów o takim kształcie. Dla słupów w kształcie rury stożkowej otrzymano rozwiązanie dla szczególnego przypadku, gdy tworzące stożka zewnętrzne i wewnętrzne przecinają się na osi stożka w jednym punkcie ($L = l$). Inaczej mówiąc, jest to przypadek, w którym dla dwóch dowolnych przekrojów poprzecznych stożka 1 i 2 stosunki grubości ścianek (g_2/g_1), średnic wewnętrznych (d_2/d_1) i zewnętrznych (D_2/D_1) są stałe i równe sobie. Otrzymane rozwiązania dla stożka (pełnego i wydrążonego w szczególnym przypadku, gdy $L = l$) można w prosty sposób wykorzystać dla ostrosłupów ściętych prawidłowych (pełnych i wydrążonych w szczególnym przypadku, gdy $L = l$). Wymagane jest jedynie określenie pola powierzchni i momentu bezwładności odpowiednich wielokątów foremnych. Odpowiednie związki dla ostrosłupów: trójkątnego, czworokątnego i sześciokątnego, są łatwe do wyprowadzenia [Boniecka 2009].

Otrzymane wzory są podobne do wzorów dla słupa w kształcie walca (o stałym przekroju poprzecznym):

$$T = \frac{4\pi H^2}{D} \sqrt{\frac{11\rho}{35E}} \quad (71)$$

Niemniej udowodnienie, że wzór dla walca jest szczególnym przypadkiem wzoru dla ściętego stożka nie jest proste. Wyprowadzone wzory dla ściętego stożka (i rury stożkowej) mają sens matematyczny tylko dla przypadku, gdy $n \neq 1$ (a to odpowiada zastrzeżeniu, że $D_p \neq D_k$).

Ponieważ istotą zaprezentowanego ujęcia jest zastąpienie sumowania odpowiednich wyrażeń dla modelu konstrukcji wieżowej, składającego się z pewnej liczby mas skupionych, przez całkowanie tych wyrażeń dla modelu o masie rozłożonej w sposób ciągły, dlatego interesujące jest pytanie, jak dokładność uzyskanych wyników zależy od przyjętej liczby mas skupionych. Tabela 1 obrazuje wpływ liczby mas skupionych na dokładność rozwiązania (dla słupów stalowych w kształcie walca i ściętego stożka o wysokości $H = 6$ m, średnicy walca $D = 20$ cm, średnicy stożka przy podstawie $D_k = 20$ cm i przy wierzchołku $D_p = 10$ cm). Za punkt odniesienia przyjęto wyniki dla mas rozłożonych w sposób ciągły (∞ liczba mas).

Można zauważyć, że o ile dla walca już przy zastąpieniu słupa 4 masami skupionymi otrzymujemy wyniki zbliżone, a przy 8 masach dokładne w stosunku do rozwiązania dla mas rozłożonych w sposób ciągły, o tyle w przypadku stożka do uzyskania zbliżonych wyników potrzebne jest przyjęcie 16 mas skupionych. Zastosowanie wzorów podanych w pracy skraca i upraszcza obliczenia, które są znacznie łatwiejsze od obliczeń potrzebnych w przypadku zastąpienia masy słupa przez 8 lub 16 mas skupionych.

Tabela 1. Wpływ liczby zastępczych mas skupionych na dokładność rozwiązania
 Table 1. Effect of the number of concentrated masses on the solution accuracy

Liczba mas Number of masses	Błąd względny okresu drgań własnych Relative error of natural period	
	$\frac{T - T_{\infty}}{T_{\infty}} [\%]$	
	Walec Cylinder	Stożek ścięty Frustum of cone
2	12,59	35,29
4	3,27	13,47
8	0,83	5,95
16	0,21	2,79
∞	0	0

Opisany sposób wyznaczania częstości drgań własnych nie jest natomiast konkurencją dla powszechnie dziś stosowanych programów komputerowych, pracujących najczęściej z wykorzystaniem MES, które umożliwiają wykonanie analizy modalnej konstrukcji.

Przykłady uzyskanych wyników i ich porównanie z rezultatami obliczeń wykonanych według normy PN-77/B-02011 i z użyciem programu komputerowego przedstawione zostaną w drugiej części tej pracy.

PIŚMIENNICTWO

- Awrejcewicz J., Krysko W., 2000. Drgania układów ciągłych. WNT, Warszawa.
- Bijak-Żochowski M., Jaworski A., Krzesiński G., Zagrajek T., 2006. Mechanika materiałów i konstrukcji. T. 1. Oficyna Wydawnicza PW, Warszawa.
- Boniecka M., 2009. Analiza częstości drgań własnych słupów stalowych. Praca inżynierska. SGGW, Warszawa.
- Chmielewski T., Zembaty Z., 1998. Podstawy dynamiki budowli. Arkady, Warszawa.
- Dylağ Z., Jakubowicz A., Orłoś Z., 2000. Wytrzymałość materiałów. T. 2. WNT, Warszawa.
- PN-77/B-02011 Obciążenia w obliczeniach statycznych. Obciążenia wiatrem.
- PN-93/B-03201 Konstrukcje stalowe. Kominy. Obliczenia statyczne i projektowanie.
- Solecki R., Szymkiewicz J., 1964. Układy prętowe i powierzchniowe. Obliczenia dynamiczne. Arkady, Warszawa.
- Spiegel M.R., Abellanas L., 1991. Formulas y tablas de matematica aplicada. McGraw-Hill / Interamericana, Madryt.
- Sułocki J., 1957. Dynamika budowli w przykładach. Politechnika Szczecińska, Szczecin.

CALCULATION OF FIRST NATURAL FREQUENCY OF STEEL COLUMNS WITH VARIABLE CROSS-SECTIONS PART I DERIVATION OF FORMULAS

Abstract. An approximated method for calculations of the natural period for towers and columns (after PN-77/B-02011 standard) is evolved in the paper using the integration instead of the summation of products of concentrated masses and squares of deflections. Formulas for calculations of first natural frequency (period) for columns shaped like frustum of cone

or pyramid are derived. The special case of tube columns shaped like a cone (or pyramid) when generating lines of external and internal cone are crossing the cone (or pyramid) axis in the same point is also solved. Examples of calculations and a comparison of results will be published in the second part.

Key words: steel column, post, natural period, first natural frequency

Zaakceptowano do druku – Accepted for print: 20.08.2009