

OBLICZANIE PIERWSZEJ CZĘSTOŚCI DRGAŃ WŁASNYCH SŁUPÓW STALOWYCH O ZMIENNYM PRZEKROJU POPRZECZNYM CZĘŚĆ II. WYNIKI

Jacek Jaworski, Marta Boniecka, Marcin Nycz
Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie

Streszczenie. W pracy dla wybranych przykładów przedstawiono wyniki obliczeń okresu drgań własnych słupów stalowych otrzymane ze wzorów wyprowadzonych w pierwszej części tego artykułu. Wyniki te dotyczą słupa w kształcie stożka ściętego, szczególnego przypadku wydrążonego stożka ściętego (rury stożkowej) i ściętych ostrosłupów prawidłowych – pełnych i wydrążonych. Wyniki obliczeń własnych porównano z obliczeniami według załącznika 2 do normy PN-77/B-02011 i obliczeniami wykonanymi w programie komputerowym ANSYS.

Słowa kluczowe: słup stalowy, okres drgań własnych, pierwsza częstość drgań własnych

WSTĘP

Do szacunkowego obliczenia obciążeń konstrukcji wiatrem według normy PN-77/B-02011 wymagane jest określenie okresu drgań własnych konstrukcji, związanego z pierwszą częstością drgań. Dotyczy to między innymi stalowych słupów, wież, kominów, które należą do konstrukcji podatnych na dynamiczne oddziaływanie porywów wiatru.

W przypadku słupów w kształcie ściętego stożka lub ściętego ostrosłupa prawidłowego wygodną alternatywą wobec obliczeń okresu drgań, według załącznika 2 wyżej wymienionej normy, jest skorzystanie ze wzorów wyprowadzonych w pierwszej części tego artykułu [Jaworski i in. 2009].

METODYKA I ZAKRES OBLICZEŃ

W celu pokazania możliwości praktycznego zastosowania wzorów podanych w pierwszej części tej pracy porównano wyniki uzyskane z ich wykorzystaniem z wynikami obliczeń według załącznika 2 do normy PN-77/B-02011 i obliczeniami wykonanymi w programie komputerowym ANSYS.

Do porównania wyników obliczeń okresu drgań własnych wybrano słupy stalowe o wysokości $H = 6$ m, będące konstrukcjami wspornikowymi utwierdzonymi w podstawie. Średnica przy podstawie słupów o kształcie stożka wynosi $D_k = 20$ cm, średnica przy wierzchołku jest zmienna (rys. 2). Dla słupów o kształcie stożka wydrążonego (rury stożkowej) średnica zewnętrzna przy podstawie wynosi $D_k = 20$ cm, a średnice przy wierzchołku i grubości ścianek są zmienne. W każdym z tych przypadków tworzące stożka zewnętrznego i wewnętrznego przecinają się w jednym punkcie na osi stożka (rys. 1d). Inaczej mówiąc, zachowana jest stała wartość ilorazu grubości ścianki i średnicy:

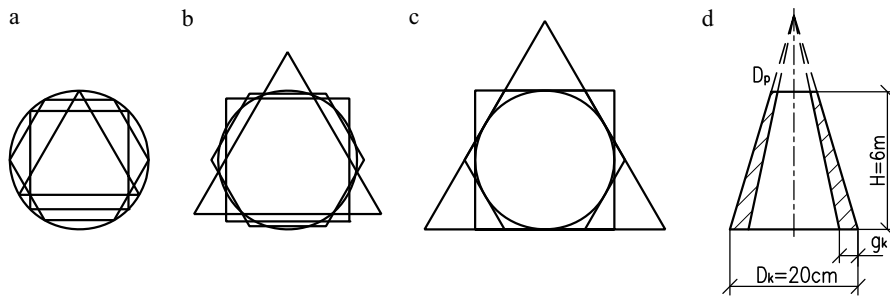
$$\frac{g_p}{D_p} = \frac{g_k}{D_k}$$

gdzie: g_p, D_p – grubość ścianki i średnica zewnętrzna przy wierzchołku słupa [cm],
 g_k, D_k – grubość ścianki i średnica zewnętrzna przy podstawie słupa [cm].

Dokładniej kształty tych słupów pokazano na rysunkach 2 i 3b w pierwszej części tej pracy [Jaworski i in. 2009]. Dla stali przyjęto: moduł Younga $E = 205$ GPa i gęstość $\rho = 7850$ kg·m⁻³.

Wyniki obliczeń dla stożka ściętego i rury stożkowej (dla przypadku szczególnego, gdy tworzące stożka zewnętrznego i wewnętrznego przecinają się w tym samym punkcie na osi stożka) otrzymane ze wzorów (31), (32), (59), (60), wyprowadzonych w pierwszej części tego artykułu [Jaworski i in. 2009], porównano z wynikami otrzymanymi według schematu 1 załącznika 2 normy PN-77/B-02011 – wzór (1) z pierwszej części tej pracy i z wynikami analizy modalnej wykonanej w pracującym z wykorzystaniem MES programie komputerowym ANSYS.

Dodatkowo porównano okres pierwszej postaci drgań własnych dla słupów w kształcie pełnego i wydrążonego stożka i pełnych i wydrążonych ostrosłupów prawidłowych (trójkątnego, czworokątnego i sześciokątnego) – według wzorów (68)–(70) dla przekroju kwadratowego (jak na rys. 4 z pierwszej części tej pracy [Jaworski i in. 2009]) i analogicznie wyprowadzonych wzorów dla pozostałych przekrojów. Przekrój poprzeczny przy podstawie słupów był zróżnicowany, przy czym uwzględniono tu następujące przypadki: wielokąty foremne wpisane w okrąg o średnicy $D_k = 20$ cm (rys. 1a), wielokąty foremne o polu równym polu koła o średnicy $D_k = 20$ cm (rys. 1b), wielokąty foremne opisane na okręgu o średnicy $D_k = 20$ cm (rys. 1c). Analogicznie, przekrój poprzeczny przy wierzchołku słupów był wielokątem wpisanym, wielokątem o równym polu i wielokątem opisanym na okręgu o średnicy D_p .



Rys. 1. Zasada tworzenia przekrojów ostrosłupów prawidłowych porównywanych w tej pracy: a – wielokąty foremne wpisane w okrąg o średnicy $D_k = 20$ cm, b – wielokąty foremne o polu równym polu koła o średnicy $D_k = 20$ cm, c – wielokąty foremne opisane na okręgu o średnicy $D_k = 20$ cm, d – kształt stożka i ostrosłupa prawidłowego wydrążonego; D_k – średnica przy podstawie słupa, D_p – średnica przy wierzchołku słupa, g_k – grubość ścianki przy podstawie słupa, H – wysokość słupa

Fig. 1. Principle of generating of transversal sections for pyramids compared in this paper: a – regular polygons inscribed of a circle with a diameter $D_k = 20$ cm, b – regular polygons with an area equal to area of a circle with a diameter $D_k = 20$ cm, c – regular polygons circumscribed about a circle with a diameter $D_k = 20$ cm, d – form of a frustum of cone and tube shaped like a pyramid; D_k – diameter at column footing, D_p – diameter at column head, g_k – wall thickness at column footing, H – height

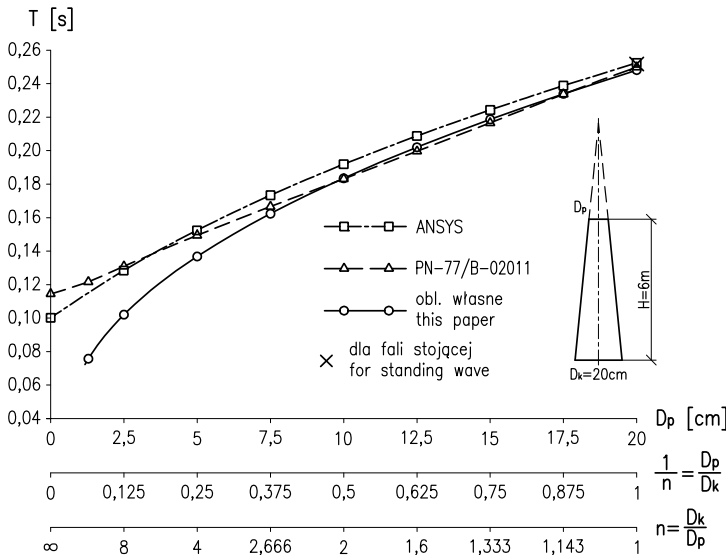
WYNIKI OBLICZEŃ

Słupy w kształcie ściętego stożka

Wyniki obliczeń pierwszej postaci okresu drgań dla stalowych słupów w kształcie ściętego stożka o średnicy przy podstawie $D_k = 20$ cm i różnych wartościach średnicy przy wierzchołku (odpowiadających różnym zbieżnościom stożka) przedstawiono na rysunku 2. Na osi odciętych podano średnice przy wierzchołku (D_p), ale warto zauważyć, że ten sam wykres można przedstawić, przyjmując na osi odciętych stosunek średnic $\frac{1}{n} = \frac{D_p}{D_k}$ lub $n = \frac{D_k}{D_p}$. W tym ostatnim przypadku, jeśli wartości n uporządkować w skali

liniowej lub logarytmicznej, to otrzymane zależności będą tworzyły krzywe o zupełnie innych kształtach.

Analizując uzyskaną ze wzorów wyprowadzonych w pierwszej części tej pracy [Jaworski i in. 2009] zależność okresu drgań (T) od średnicy (D_p), można stwierdzić, że jest ona funkcją ciągłą. Dla dużych zbieżności stożka (małych wartości D_p) okres drgań gwałtownie rośnie wraz ze wzrostem D_p . Dla małych zbieżności stożka (dużych wartości D_p) okres rośnie w przybliżeniu proporcjonalnie do D_p . Gdy wartość D_p zbliża się do $D_k = 20$ cm, okres drgań zbliża się do wartości obliczonej ze wzorów dla walca. Na wykresie zaznaczono też okres drgań dla słupa w kształcie walca, obliczony zgodnie z rozwiązaniem dla fali stojącej [np. Chmielewski i Zembaty 1998, Dyląg i in. 2000]. Pokrywa się on praktycznie z wynikiem z programu ANSYS (różnica nie przekracza 0,25%) i jest o niecałe 1,5% większy od wartości okresu obliczonego przez autorów.



Rys. 2. Porównanie wyników obliczeń okresu drgań własnych stalowego słupa w kształcie ściętego stożka o różnym stopniu nachylenia ścianek: T – okres drgań, D_k – średnica przy podstawie słupa, D_p – średnica przy wierzchołku słupa, n – stosunek średnic, H – wysokość słupa

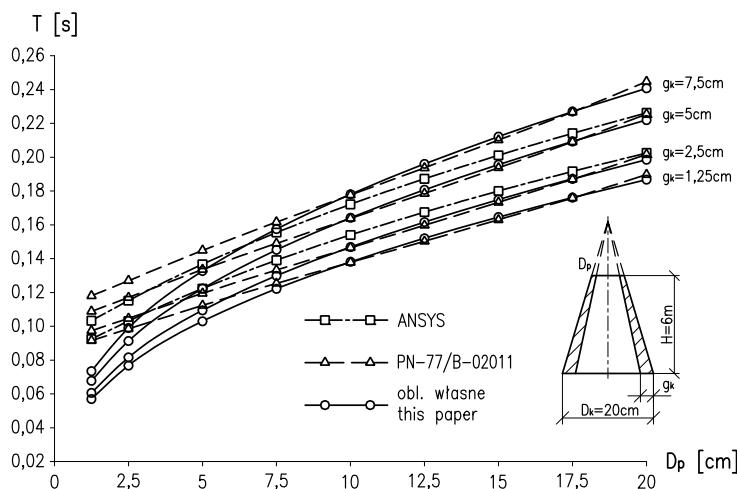
Fig. 2. Comparison of calculation results of natural period of steel columns in form of frustum of cone with different inclination of generating line: T – period, D_k – diameter at column footing, D_p – diameter at column head, n – diameters ratio, H – height

Krzywa wyznaczona według schematu 1 załącznika 2 do normy PN-77/B-02011 ma w zakresie średnic $D_p = 10\text{--}20\text{ cm}$ bardzo podobny kształt i wartości bardzo bliskie wynikom z rozwiązania autorów, ale wyraźnie odbiega od wyników obliczeń własnych dla dużych zbieżności stożka (małych średnic D_p). Kształt tej linii jest zbliżony do prostej aż do $D_p = 0$ (czyli w całym zakresie zbieżności – od walca do stożka).

Krzywa wyznaczona przy użyciu programu ANSYS dla małych zbieżności ściętego stożka (w zakresie średnic $D_p = 10\text{--}20\text{ cm}$) dość dobrze odpowiada dwóm pozostałym krzywom, a dla dużych zbieżności stożka jej przebieg jest bliższy krzywej obliczonej według normy PN-77/B-02011.

Słupy w kształcie rury stożkowej – przypadek szczególny, gdy $L = l$

Wyniki obliczeń własnych, obliczeń według normy PN-77/B-02011 i obliczeń w programie ANSYS dla stożka wydrążonego i ostrosłupów prawidłowych wydrążonych porównano na rysunku 3. Uwzględniono cztery grubości ścianek. Im mniejsza grubość ścianki, tym mniejsza wartość okresu drgań. Widoczna jest duża zbieżność wyników wszystkich trzech wykresów dla dużych i średnich wartości D_p , natomiast dla małych wartości D_p okres drgań obliczony za pomocą wzorów wyprowadzonych w tej pracy jest mniejszy. Ogólny charakter zależności okresu drgań od stopnia nachylenia tworzącej stożka zewnętrznego (średnicy przy wierzchołku D_p) jest dla słupa w kształcie rury stożkowej podobny jak przy słupie w kształcie ściętego stożka (rys. 2).



Rys. 3. Porównanie wyników obliczeń okresu drgań własnych stalowego słupa w kształcie wydrążonego ściętego stożka (rury stożkowej) i o różnym stopniu nachylenia i różnych grubościach ścianek: T – okres drgań, D_k – średnica przy podstawie słupa, D_p – średnica przy wierzchołku słupa, g_k – grubość ścianki przy podstawie słupa, H – wysokość słupa

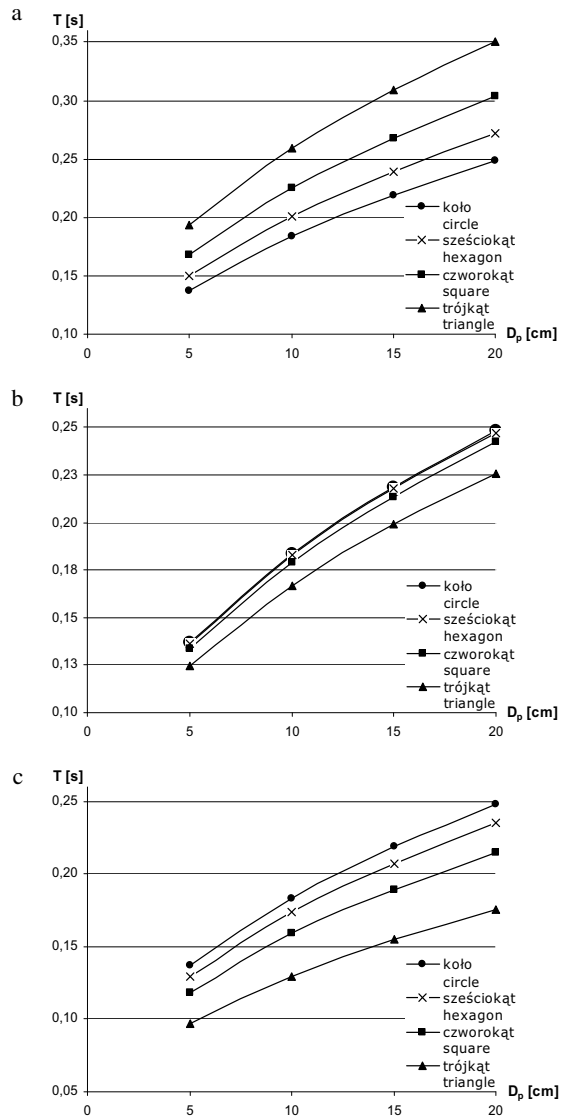
Fig. 3. Comparison of calculation results of natural period of steel columns in form of tube shaped like a cone with different inclination of generating lines and different wall thicknesses: T – period, D_k – diameter at column footing, D_p – diameter at column head, g_k – wall thickness at column footing, H – height

Niewielka różnica między wynikami obliczeń własnych i według normy PN-77/B-02011 dla $D_p = 20$ cm bierze się stąd, że w schemacie 1 załącznika 2 do normy podano, żeby dla walca przyjmować $K = 1,79$ (i tak obliczone wyniki zamieszczono na rysunku 3), wartość zaś tego współczynnika odczytana z wykresu wynosi około 1,8, a obliczona z podanych w normie wzorów $K = 1,774$.

Porównanie uzyskanych wyników własnych z wynikami z programu ANSYS ukazuje sytuację podobną do opisanej w przypadku słupów o kształcie pełnego stożka ściętego. Dla słupa w kształcie rury walcowej wyniki wykazują dużą zgodność. Dla stożków o małej zbieżności ścianki bocznej (w zakresie średnic $D_p > 10$ cm) wykresy mają podobny charakter, a różnice wynoszą od 1% (dla $D_p = 20$ cm) do 10% (dla $D_p = 10$ cm). Dla większych kątów nachylenia tworzącej stożka do jego osi (dla średnic $D_p < 10$ cm) krzywe mają różny kształt, a wartości okresu drgań są, wraz ze zmniejszaniem się średnicy D_p , coraz bardziej odległe od siebie.

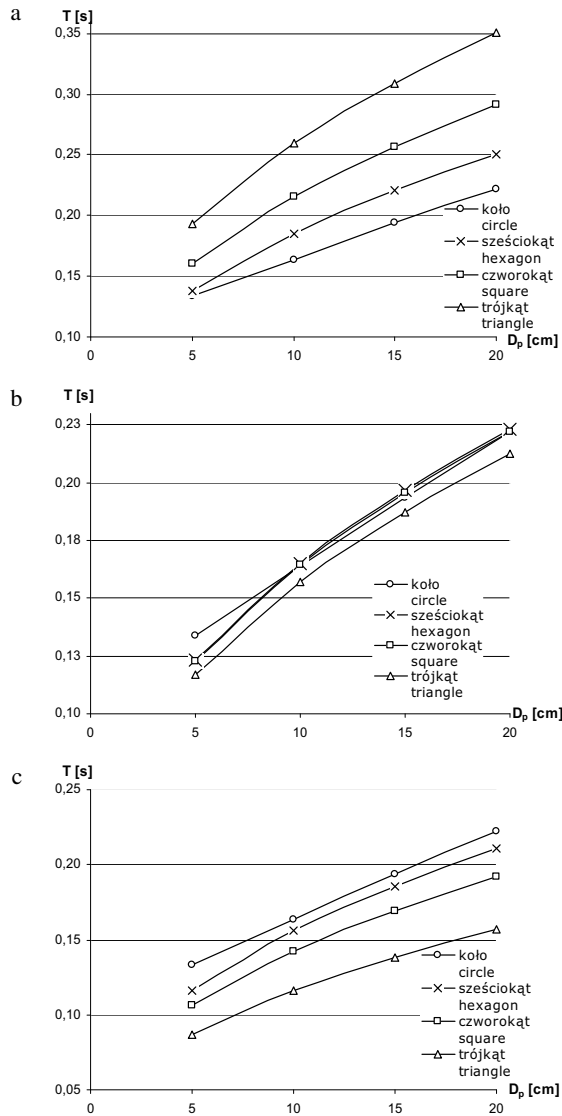
Słupy w kształcie ostrosłupów ściętych prawidłowych

Wyniki obliczeń okresu drgań własnych słupów w kształcie ściętego stożka i w kształcie ostrosłupów prawidłowych o podstawie trójkątnej, czworokątnej i sześciokątnej porównano na rysunkach 4, 5 i 6. Rysunek 4 dotyczy słupów pełnych, rysunki 5 i 6 słupów wydrążonych. Grubość ścianki przy podstawie (określona jak na rys. 1d) wynosi dla słupów na rysunku 5: $g_k = 5$ cm, a na rysunku 6: $g_k = 1,25$ cm. Rysunki 4a, 5a i 6a dotyczą ostrosłupów o podstawach, będących wielokątami foremnymi wpisanymi



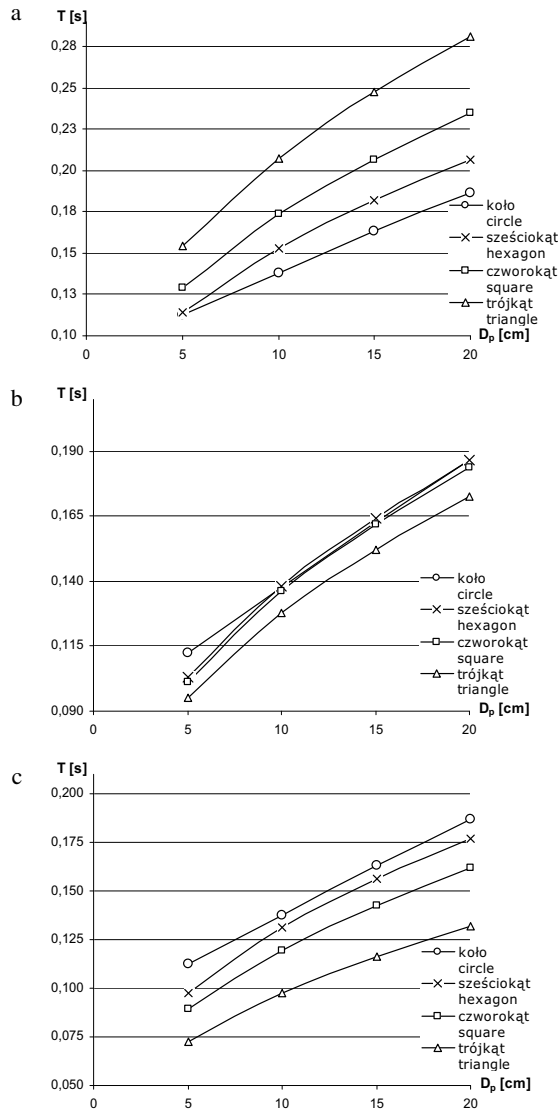
Rys. 4. Okresy drgań słupów w kształcie ściętego stożka i ściętych ostrosłupów prawidłowych o podstawie trójkątnej, kwadratowej i sześciokątnej: a – wielokąty wpisane w okrąg o średnicy $D_k = 20$ cm, b – wielokąty o polu równym polu koła o średnicy $D_k = 20$ cm, c – wielokąty opisane na okręgu o średnicy $D_k = 20$ cm; T – okres drgań, D_p – średnica przy wierzchołku słupa

Fig. 4. Natural periods for columns shaped like frustum of cone and frustum of pyramid with triangle, square and hexagon basis: a – regular polygons inscribed of a circle with a diameter $D_k = 20$ cm, b – regular polygons with an area equal to area of a circle with a diameter $D_k = 20$ cm, c – regular polygons circumscribed about a circle with a diameter $D_k = 20$ cm; T – period, D_p – diameter at column head



Rys. 5. Okresy drgań słupów w kształcie wydrążonego ściętego stożka i wydrążonych ostrosłupów prawidłowych o podstawie trójkątnej, kwadratowej i sześciokątnej dla $g_k = 5$ cm: a – wielokąty wpisane w okrąg o średnicy $D_k = 20$ cm, b – wielokąty o polu równym polu koła o średnicy $D_k = 20$ cm, c – wielokąty opisane na okręgu o średnicy $D_k = 20$ cm; T – okres drgań, D_p – średnica przy wierzchołku słupa, g_k – grubość ścianki przy podstawie słupa

Fig. 5. Natural periods for columns shaped like tubes in form of cone and of pyramid with triangle, square and hexagon basis for $g_k = 5$ cm: a – polygons inscribed of a circle with a diameter $D_k = 20$ cm, b – polygons with an area equal to area of a circle with a diameter $D_k = 20$ cm, c – polygons circumscribed about a circle with a diameter $D_k = 20$ cm; T – period, D_p – diameter at column head, g_k – wall thickness at column footing



Rys. 6. Okresy drgań słupów w kształcie wydrążonego ściętego stożka i wydrążonych ostrosłupów prawidłowych o podstawie trójkątnej, kwadratowej i sześciokątnej dla $g_k = 1,25$ cm: a – wielokąt wpisane w okrąg o średnicy $D_k = 20$ cm, b – wielokąt o polu równym polu koła o średnicy $D_k = 20$ cm, c – wielokąt opisane na okręgu o średnicy $D_k = 20$ cm; T – okres drgań, D_p – średnica przy wierzchołku słupa, g_k – grubość ścianki przy podstawie słupa

Fig. 6. Natural periods for columns shaped like tubes in form of cone and of pyramid with triangle, square and hexagon basis for $g_k = 1,25$ cm: a – polygons inscribed of a circle with a diameter $D_k = 20$ cm, b – polygons with an area equal to area of a circle with a diameter $D_k = 20$ cm, c – polygons circumscribed about a circle with a diameter $D_k = 20$ cm; T – period, D_p – diameter at column head, g_k – wall thickness at column footing

w okrąg średnicy $D_k = 20$ cm, jak pokazano na rysunku 1a. Rysunki 4b, 5b i 6b dotyczą ostrosłupów o podstawach, będących wielokątami foremnymi o polu równym polu koła o średnicy $D_k = 20$ cm, jak pokazano na rysunku 1b. Rysunki 4c, 5c i 6c dotyczą ostrosłupów o podstawach, będących wielokątami foremnymi opisanymi na okręgu o średnicy $D_k = 20$ cm, jak pokazano na rysunku 1c. Przekroje poprzeczne przy wierzchołkach słupów były, podobnie jak w przypadku podstawy słupów, wielokątami wpisanymi, wielokątami o równym polu i wielokątami opisanymi na okręgu o średnicy D_p .

Dla wszystkich badanych kształtów słupów zależność okresu drgań od zbieżności ścianek bocznych ma podobny charakter. Im większa zbieżność ścianek, tym mniejsza średnica przekroju słupa przy jego wierzchołku. Okres drgań na rysunkach 4, 5 i 6 podano w zależności od średnicy D_p . Dla średnic $D_p > 10$ cm zależność jest zbliżona do prostej, dla $D_p < 10$ cm – przechodzi w krzywoliniową. Z rysunków 5 i 6 widoczna jest tendencja, że – podobnie jak na rysunku 3 – im cieńsze są ścianki słupa wydrążonego, tym mniejsza jest wartość okresu drgań.

Porównując słupy o przekroju poprzecznym kołowym i w kształcie wielokątów o tym samym polu powierzchni (rys. 4b, 5b i 6b) widzimy, że najmniejsza wartość okresu drgań występuje dla słupów trójkątnych, a między pozostałymi przypadkami różnice są bardzo niewielkie. Dla wielokątów wpisanych w okrąg i opisanych na okręgu (rys. 4a, c, 5a, c i 6a, c) występują natomiast wyraźne różnice wyników w zależności od liczby boków wielokąta. Dodać jeszcze trzeba, że przypadek trójkąta wpisanego w okrąg o średnicy $D_k = 20$ cm i grubości ścianki $g_k = 5$ cm oznacza w rzeczywistości słup pełny.

WNIOSKI

Z przeprowadzonych w pracy rozważań i z porównania wyników obliczeń wynikają następujące wnioski:

1. Wyprowadzone w pierwszej części tej pracy [Jaworski i in. 2009] wzory na obliczenie okresu (lub pierwszej częstości) drgań własnych słupów pozwalają na wykonanie obliczeń dla słupów w kształcie stożka ściętego pełnego i wydrążonego (w szczególnym przypadku, gdy $L = l$, czyli gdy tworzące stożka wewnętrznego i zewnętrznego przecinają się w jednym punkcie na osi stożka) oraz pełnych i wydrążonych ściętych ostrosłupów prawidłowych.

2. Z analizy modalnej wykonanej w programie ANSYS wynika, że w zakresie badanych kształtów słupa wyznaczony przez program kształt osi słupa przy pierwszej postaci drgań nie odbiega znacznie od przyjętej przy wyprowadzaniu wzorów linii ugięcia słupa pod statycznym działaniem poziomej siły przyłożonej do jego wierzchołka.

3. Dla słupów o stałym przekroju (w kształcie walca, rury, graniastosłupa prawidłowego pełnego i wydrążonego) otrzymano dużą zbieżność wyników obliczeń własnych, obliczeń według załącznika 2 do normy PN-77/B-0201, obliczeń w programie ANSYS i rozwiązań dla fali stojącej.

4. Dla słupów o zmiennym przekroju, w kształcie ściętego stożka:

– w zakresie niewielkich zbieżności stożka, gdy D_p jest większe od 10 cm (co odpowiada stosunkowi średnic $\frac{1}{n} = \frac{D_p}{D_k} > 0,5$ i kątowi nachylenia tworzącej do osi stożka

$\alpha < 0,95^\circ$) wyniki obliczeń własnych i według załącznika 2 do normy PN-77/B-0201 oraz wyniki z programu ANSYS cechują się znaczną zbieżnością,

– w zakresie większych zbieżności stożka, gdy D_p jest mniejsze od 10 cm (co odpowiada stosunkowi średnic $\frac{1}{n} = \frac{D_p}{D_k} < 0,5$ i kątowni nachylenia tworzącej do osi stożka $\alpha >$

$0,95^\circ$) obliczenia wykonane z użyciem wzorów wyprowadzonych w tej pracy prowadzą do mniejszych okresów drgań; różnica ta jest tym wyraźniejsza, im bardziej wartość D_p zbliża się do zera.

5. Podobną zależność między wynikami obliczeń własnych, według PN-77/B-02011 i w programie ANSYS zaobserwowano także w pozostałych badanych przypadkach, to jest dla słupów w kształcie stożka wydrążonego, czyli rury stożkowej, i w kształcie ściętych ostrosłupów prawidłowych pełnych i wydrążonych.

6. Zbieżność ścian bocznych ściętego stożka wydrążonego lub ostrosłupa prawidłowego (zarówno pełnego, jak i wydrążonego) ma istotny wpływ na częstość drgań słupa. Im większa zbieżność, tym mniejsza wartość okresu drgań. Dodać tu należy, że wszystkie badane w tej pracy słupy charakteryzowały się małą zbieżnością ścian bocznych, kąt nachylenia tworzącej do osi stożka lub ostrosłupa był zawsze mniejszy od 2° .

7. Uzyskane wykresy pozwalają na określenie wpływu na okres drgań różnych elementów kształtu słupa, takich jak zbieżność ścianek stożka lub ostrosłupa, grubość ścianek czy kształt wielokąta tworzącego przekrój poprzeczny słupa.

8. Podany w pracy sposób obliczania pierwszej częstości drgań własnych nadaje się do zastosowania dla konstrukcji o ciągłym rozkładzie mas, dla których zależność momentu bezwładności przekroju od wysokości jest opisana funkcją ciągłą. W większości przypadków konstrukcji wieżowych występują jednak masy skupione i wtedy obliczenia trzeba prowadzić, dzieląc konstrukcję na skończoną liczbę elementów. Dotyczy to także stalowych wież kratowych o zbieżnych liniowo krawężnikach o stałym przekroju [Jaworski i Zadrozny 2008], w których można w uproszczeniu przyjąć, że wartość momentu bezwładności trzonu wieży jest proporcjonalna do kwadratu wysokości.

Podziękowanie

Autorzy składają serdeczne podziękowanie dr. Janowi Grudzińskiemu za wykonanie obliczeń w programie komputerowym ANSYS.

PIŚMIENNICTWO

- Chmielewski T., Zembaty Z., 1998. Podstawy dynamiki budowli. Arkady, Warszawa.
 Dyląg Z., Jakubowicz A., Orłowski Z., 2000. Wytrzymałość materiałów. T. 2. WNT, Warszawa.
 Jaworski J., Zadrozny M., 2008. Obliczanie pierwszej częstości drgań własnych wież kratowych o zbieżnych liniowo krawężnikach. Acta Scientiarum Polonorum, Architectura 7 (1), 3–17.
 Jaworski J., Boniecka M., Nycz M., 2009. Obliczanie pierwszej częstości drgań własnych słupów stalowych o zmiennym przekroju poprzecznym. Część I. Wyprowadzenie wzorów. Acta Scientiarum Polonorum, Architectura 8 (1–2), 3–20.
 PN-77/B-02011 Obciążenia w obliczeniach statycznych. Obciążenia wiatrem.

CALCULATION OF FIRST NATURAL FREQUENCY OF STEEL COLUMNS WITH VARIABLE CROSS-SECTIONS PART II. RESULTS

Abstract. Results of calculations of the natural period of steel columns, determined using formulas developed in the first part of this paper, are presented for selected examples. Results concern columns in form of frustum of cone, special case of a tube shaped like a cone and frustum of regular pyramid. Results of calculations were compared with calculations according to the PN-77/B-02011 standard and calculations by the computer program ANSYS.

Key words: steel column, post, natural period, first natural frequency

Zaakceptowano do druku – Accepted for print: 21.12.2009