

## OCENA WRAŻLIWOŚCI SIŁY KRYTYCZNEJ PRĘTÓW ŚCISKANYCH NIEKONSERWATYWNA SIŁĄ OSIOWĄ

Wojciech Gilewski<sup>1</sup>, Paulina Obara<sup>2</sup>,

Politechnika Warszawska<sup>1</sup>, Warszawa Politechnika Świętokrzyska, Kielce<sup>2</sup>

**Streszczenie.** W pracy poddano ocenie siłę krytyczną w pręcie wspornikowym poddanym działaniu niekonserwatywnej siły osiowej. Zastosowano statyczne i dynamiczne kryterium utraty stateczności przez bifurkację i flater. Wpływ parametru  $\alpha$ , charakteryzującego obciążenie niekonserwatywne, przeanalizowano z punktu widzenia analizy wrażliwości.

**Słowa kluczowe:** stateczność, siła niekonserwatywna, wrażliwość

### WSTĘP

Przedmiotem pracy jest analiza wrażliwości stateczności pręta prostego na niewielkie zmiany parametru  $\alpha$ , który określa niekonserwatywny charakter obciążenia osiowego. Podano dynamiczne i statyczne kryteria utraty stateczności przez flater i bifurkację stanu równowagi. Analiza funkcji wrażliwości pozwala określić, dla jakich parametrów zadanie jest czułe na niewielkie zmiany kąta nachylenia siły osiowej, oraz, co bardziej istotne, czy i przy jakich parametrach zadanie jest nieczułe na takie zmiany.

### STATECZNOŚĆ PRĘTÓW ŚCISKANYCH NIEKONSERWATYWNA SIŁĄ OSIOWĄ

Przedmiotem rozważań będzie stateczność cienkiego wspornikowego pręta prostego długości  $L$ , o stałym przekroju poprzecznym (moment bezwładności przekroju  $J$ ), ściskanego przyłożoną na swobodnym końcu siłą osiową  $S$  (rys. 1). Zakładamy, że pręt pierwotnie posiadał oś doskonale prostą oraz że jest doskonale sprężysty (moduł Younga  $E$ ), a naprężenia nie przekraczają granicy proporcjonalności. Gęstość masy pręta na jednostkę długości oznaczono przez  $\mu$ . Rozważać będziemy przypadek, gdy siła  $S$  działa w kierunku nachylonym względem kierunku konserwatywnego pod kątem  $\alpha$ , czyli jest

częściowo śledząca, a częściowo konserwatywna. Kąt  $\alpha$  przeskalowano tak, aby zmienił się w przedziale od 0 do 1, gdzie 0 charakteryzuje obciążenie konserwatywne, a 1 obciążenie śledzące (Timoshenko i Gere 1963, Gomuliński i Witkowski 1992, 1993).



Rys. 1. Oddziaływanie niekonserwatywnej siły osiowej  
Fig. 1. Effect of non-conservative axial force

Do wyznaczenia siły krytycznej posłużą nam równanie amplitud w zadaniu dynamicznym w postaci:

$$\frac{d^4 w}{d\xi^4} + \sigma^2 \frac{d^2 w}{d\xi^2} + \lambda^4 w = 0 \quad (1)$$

gdzie zastosowano standardowe oznaczenia:  $\sigma^2 = \frac{SL^2}{EJ}$ ;  $\lambda^4 = \frac{\mu\omega^2 L^4}{EJ}$ ;  $\xi = \frac{x}{L}$ .

Całka ogólna tego równania różniczkowego ma postać:

$$w(\xi) = C_1 \cosh \chi \xi + C_2 \sinh \chi \xi + C_3 \cos \varepsilon \xi + C_4 \sin \varepsilon \xi \quad (2)$$

$$\text{gdzie } \chi = \sqrt{\frac{\sqrt{\sigma^4 + 4\lambda^4} - \sigma^2}{2}}; \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{\sqrt{\sigma^4 + 4\lambda^4} + \sigma^2}{2}}$$

Warunki brzegowe w zadaniu przedstawionym na rysunku 2 są następujące:

$$w(0) = 0; \quad w'(0) = 0; \quad M(1) = 0; \quad T(1) = 0 \quad (3)$$

gdzie siła poprzeczna i moment zginający wyrażają się wzorami:

$$T(\xi) = -\frac{EJ}{L^3} \left[ \frac{d^3 w}{d\xi^3} + \sigma^2 (1-\alpha) \frac{dw}{d\xi} \right]; \quad M(\xi) = -\frac{EJ}{L^2} \frac{d^2 w}{d\xi^2} \quad (4)$$

Z warunków brzegowych (3) otrzymujemy układ równań jednorodnych na stałe całkowania. Warunek istnienia niezerowego rozwiązania można przedstawić w następującej postaci:

$$2\lambda^4 + \alpha\sigma^4 + [2\lambda^4 + \sigma^4(1-\alpha)] \cosh \chi \cos \varepsilon + (2\alpha - 1)\lambda^2\sigma^2 \sinh \chi \sin \varepsilon = 0 \quad (5)$$

Równanie (5) stanowi dynamiczne kryterium utraty stateczności belki wspornikowej poddanej działaniu niekonserwatywnej siły nachylonej pod kątem opisanym przez współczynnik  $\alpha$ . Równanie to obrazuje zależność parametru  $\sigma$  (czyli wartości siły, która

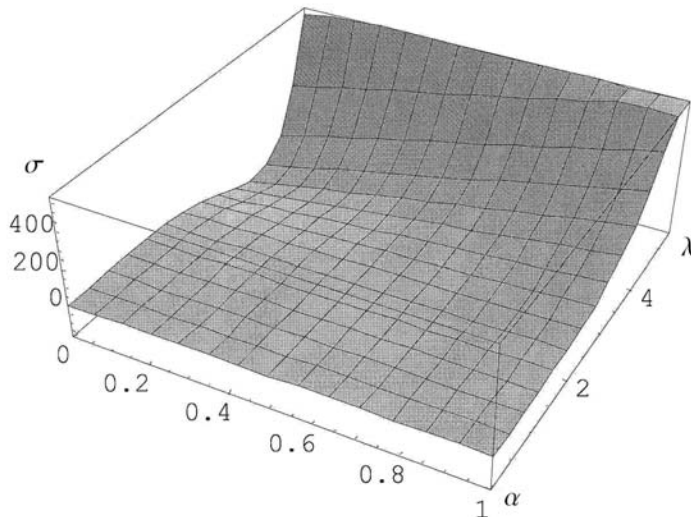
powoduje utratę stateczności stanu równowagi) od wartości  $\lambda$  (czyli od częstości drgań pręta) dla określonej wartości współczynnika  $\alpha$  (Thomson i Hunt 1973, Huseyin 1975).

### STATYCZNE KRYTERIUM UTRATY STATECZNOŚCI

Szczególny przypadek równania (5) otrzymujemy, przyjmując  $\lambda = 0$  ( $\chi = 0$ ,  $\varepsilon = \sigma$ ):

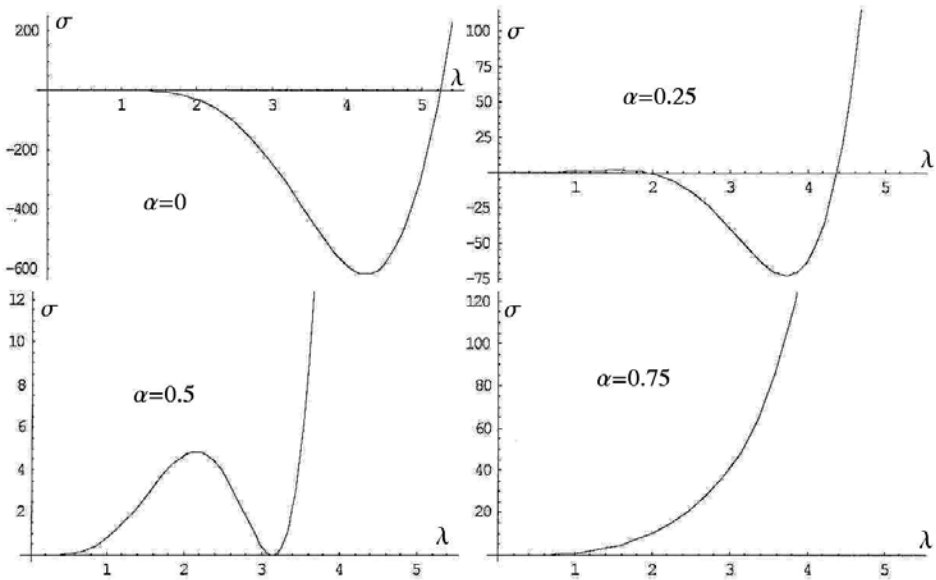
$$\alpha\sigma^4 + \sigma^4(1-\alpha)\cos\sigma = 0 \quad (6)$$

Jest to statyczne kryterium utraty stateczności przy niekonserwatywnym działaniu siły osiowej, którego spełnienie jest warunkiem bifurkacji stanu równowagi rozważanego pręta. Na rysunku 2 przedstawiono wykres zależności parametru krytycznego ( $\sigma$ ) od kąta nachylenia siły, a na rysunku 3 przekroje tego wykresu dla wybranych parametrów  $\alpha$ . Parametr  $\sigma$ , przy współczynniku  $\alpha$  bliskim jedności osiąga bardzo duże wartości, które nie mieszczą się na skali rysunku – stąd obserwujemy w tym obszarze „ścięcie” powierzchni na rysunku.



Rys. 2. Zależności parametru krytycznego ( $\sigma$ ) od kąta nachylenia siły ( $\alpha$ ) i parametru  $\lambda$   
Fig. 2. Dependence of the critical parameter ( $\sigma$ ) on the force angle ( $\alpha$ ) and parameter  $\lambda$

Równanie (6) pozwala uzyskać informację o krytycznej wartości siły osiowej tylko dla  $\alpha \leq 0,5$ . Dla większych  $\alpha$  rozwiązanie równania nie istnieje, co oznacza, że nie jest możliwa utrata stateczności konstrukcji przez bifurkację. Konieczne jest wtedy zastosowanie dynamicznego kryterium utraty stateczności opisane równaniem (5).



Rys. 3. Zależności parametru krytycznego ( $\sigma$ ) od parametru  $\lambda$  w wybranych przekrojach dla wybranych wartości współczynnika  $\alpha$

Fig. 3. Dependence of the critical parameter ( $\sigma$ ) on the parameter  $\lambda$  in selected cross-sections for several values of  $\alpha$

## DYNAMICZNE KRYTERIUM UTRATY STATECZNOŚCI

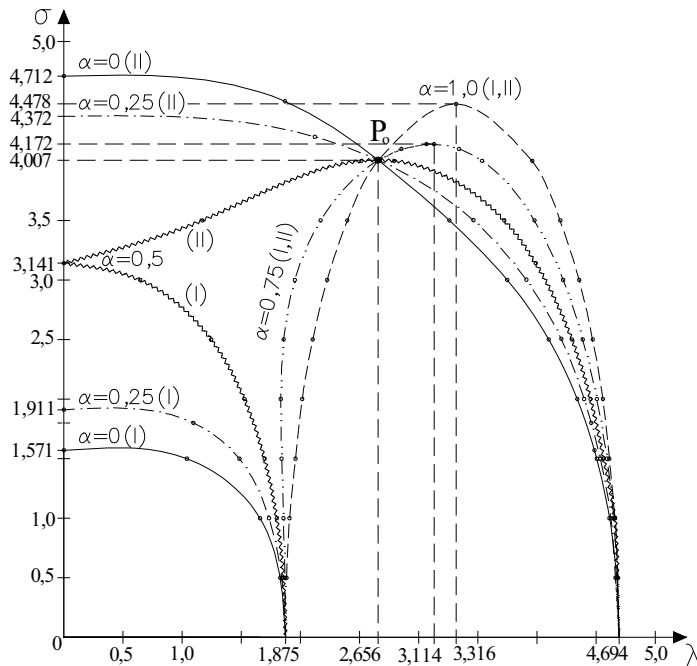
Dynamiczne kryterium (5) opisuje utratę stateczności przez flater. Na rysunku 4 przedstawiono wykresy zależności parametru krytycznego ( $\sigma$ ) od wymuszenia  $\lambda$  dla kilku wartości kąta  $\alpha$ . W każdym z przypadków analizowano po dwie pary wartości własnych, oznaczając je jako (I) i (II) obok wartości parametru  $\alpha$ . Zauważmy, że flater może wystąpić zarówno dla współczynnika  $\alpha \leq 0,5$ , jak i dla  $\alpha > 0,5$ . Rozpatrując przypadek  $\lambda = 0$ , obserwujemy zbliżanie się wartości pierwszej i drugiej wartości parametru  $\sigma$ , przy rosnącym współczynniku  $\alpha$ , aż do  $\alpha = 0,5$ , przy którym otrzymujemy pierwiastek podwójny. Interesujący jest fakt przechodzenia kilku krzywych przez wspólny punkt o współrzędnych  $\lambda = 2,656$ ,  $\sigma = 4,007$ . Wyjaśnienia tego faktu poszukiwaliśmy w analizie wrażliwości rozwiązania na zmiany kąta  $\alpha$ , którą przedstawiamy w następnym rozdziale pracy.

## ANALIZA WRAŻLIWOŚCI ROZWIĄZANIA NA ZMIANY KĄTA $\alpha$

Rozważmy wrażliwość funkcji dynamicznego kryterium utraty stateczności:

$$f(\sigma, \lambda, \alpha) = 2\lambda^4 + \alpha\sigma^4 + [2\lambda^4 + \sigma^4(1-\alpha)] \cosh \chi \cos \varepsilon + (2\alpha - 1)\lambda^2\sigma^2 \sinh \chi \sin \varepsilon \quad (7)$$

na zmiany kąta nachylenia  $\alpha$ . Wrażliwość definiowana jest jako pochodna rozważanej funkcji względem parametru, którego wpływ analizujemy [Kleiber i in. 1997]. Analizujemy zatem funkcję postaci:



Rys. 4. Rozkład parametrów krytycznych flateru  $\alpha$ ,  $\lambda$  przy różnych współczynnikach  $\alpha$   
 Fig. 4. Distribution of critical parameters of flutter  $\alpha$ ,  $\lambda$  for various coefficients  $\alpha$

$$g(\sigma, \lambda) = \frac{\partial f}{\partial \alpha} = \sigma^4 - \sigma^4 \cosh \chi \cos \varepsilon + 2\lambda^2 \sigma^2 \sinh \chi \sin \varepsilon \quad (8)$$

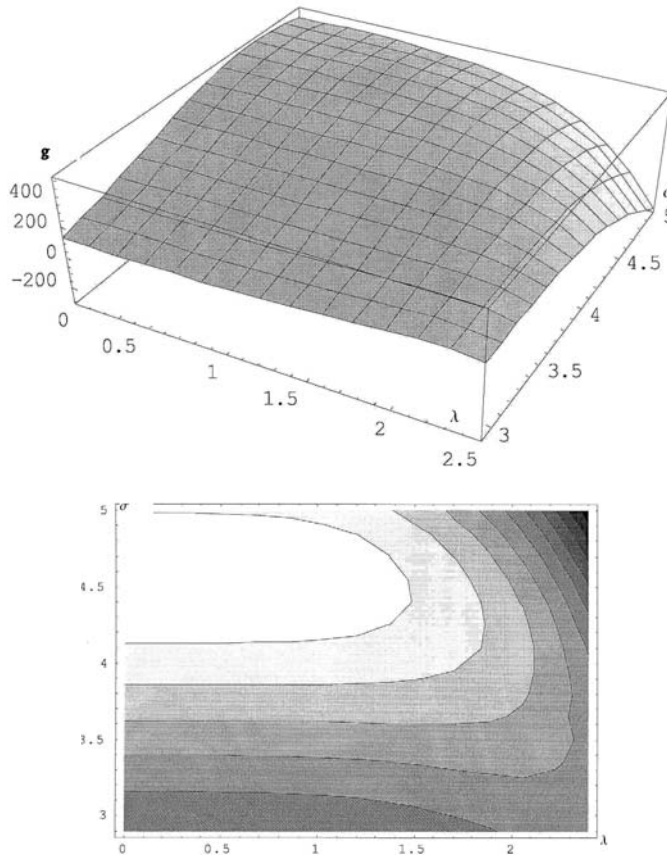
Wykresy funkcji wrażliwości przedstawiono, dla przejrzystości, na dwóch komplektach rysunków (aksonometrycznych i warstwicznych) – rysunku 5 dla  $\sigma \in (3; 5)$ ,  $\lambda \in (0; 2,5)$  i rysunku 6 dla  $\sigma \in (0; 6)$ ,  $\lambda \in (0; 4)$ . Rysunki w szerszej skali nie są czytelne.

Dodatkowo na rysunku 7 przedstawiono przekroje analizowanej funkcji wrażliwości dla wybranych wartości parametrów  $\lambda$  i  $\sigma$ . Zauważmy, że funkcja wrażliwości nie zależy od współczynnika  $\alpha$ . Przedstawione rysunki mogą służyć do określenia, dla jakich parametrów  $\lambda$  i  $\sigma$  zadanie utraty stateczności konstrukcji według kryterium dynamicznego jest czułe na niewielkie zmiany współczynnika  $\alpha$ , a dla jakich parametrów jest nieczułe na te zmiany.

Flater stanu równowagi konstrukcji może wystąpić przy różnych parametrach  $\lambda$  odpowiedzialnych za częstość drgań. Wartość siły, która wywołuje flater, zależy od współczynnika śledzenia ( $\alpha$ ) i jest w różnym stopniu czuła na niewielkie zaburzenia tego kąta. Funkcja wrażliwości wykazuje dla założonych częstości  $\lambda$  ekstrema (rys. 5–7), co oznacza, że przy pewnych kombinacjach parametrów  $\sigma$ ,  $\lambda$  zadanie utraty stateczności jest szczególnie czułe na niewielkie zmiany współczynnika śledzenia ( $\alpha$ ).

W szczególności zauważmy, że:

1. Ekstrema te dla małych parametrów  $\lambda$  odpowiadają wartościom  $\sigma$  około 4,5, co odpowiada drugiej wartości krytycznej przy kątach  $\alpha$  zawartych w przedziale  $(0; 0,25)$ .

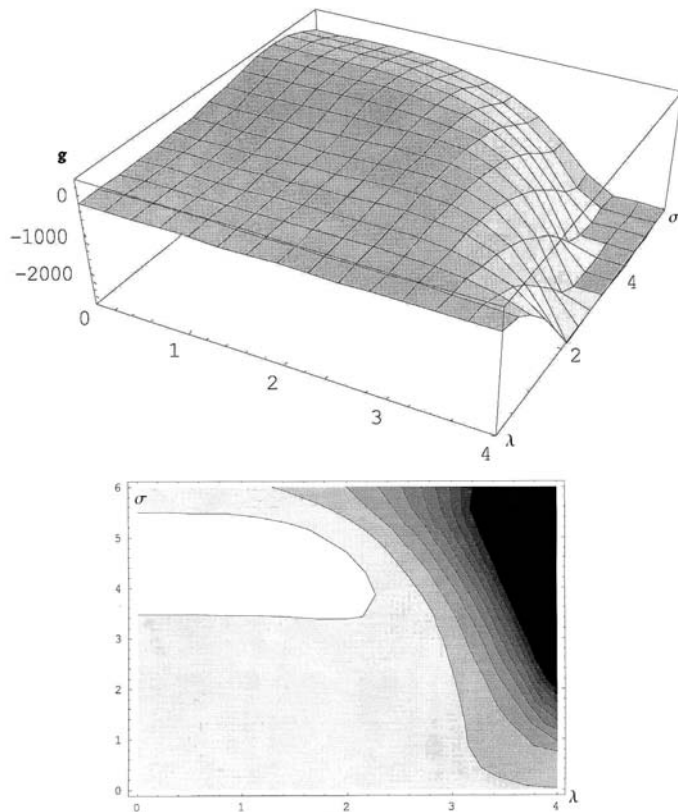


Rys. 5. Funkcja wrażliwości w przedziale parametrów  $\sigma \in (3; 5)$ ,  $\lambda \in (0; 2,5)$   
 Fig. 5. Sensitivity function for the parameters  $\sigma \in (3; 5)$ ,  $\lambda \in (0; 2,5)$

Dla kątów większych, z przedziału  $(0,25; 0,5)$ , wrażliwość na zaburzenie kąta śledzenia gwałtownie maleje. Analiza pierwszej wartości krytycznej wskazuje, że jest ona najbardziej wrażliwa na zaburzenia kąta  $\alpha$  przy kątach śledzenia bliskich 0,5 oraz łagodnie maleje, gdy kąt zbliża się do wartości 0.

2. Dla parametrów  $\lambda$  z przedziału  $(0; 2)$  lokalne ekstremum „przesuwa” się w kierunku mniejszych wartości  $\sigma$ .

3. Funkcja wrażliwości stateczności konstrukcji na zmiany kąta  $\alpha$  osiąga wartość 0 dla zbioru parametrów  $\sigma, \lambda$  przedstawionego na rysunku 8. Gruba linia na tym rysunku przedstawia ślad powierzchni wrażliwości na płaszczyźnie  $\sigma$ - $\lambda$ . Parametry, które znajdują się na tej linii, oznaczają brak wrażliwości zadania stateczności na zaburzenia kąta  $\alpha$ . Okazuje się, że w klasie rozwiązań, pochodzących z dynamicznego kryterium utraty stateczności, jedynie punkt o współrzędnych  $\sigma = 4,004$ ,  $\lambda = 2,6565$  znajduje się na tej linii. Inaczej mówiąc, flater, który następuje przy parametrze  $\lambda = 2,6565$ , jest nieczuły na zaburzenia kąta śledzenia siły.



Rys. 6. Funkcja wrażliwości w przedziale parametrów  $\sigma \in (0; 6)$ ,  $\lambda \in (0; 4)$

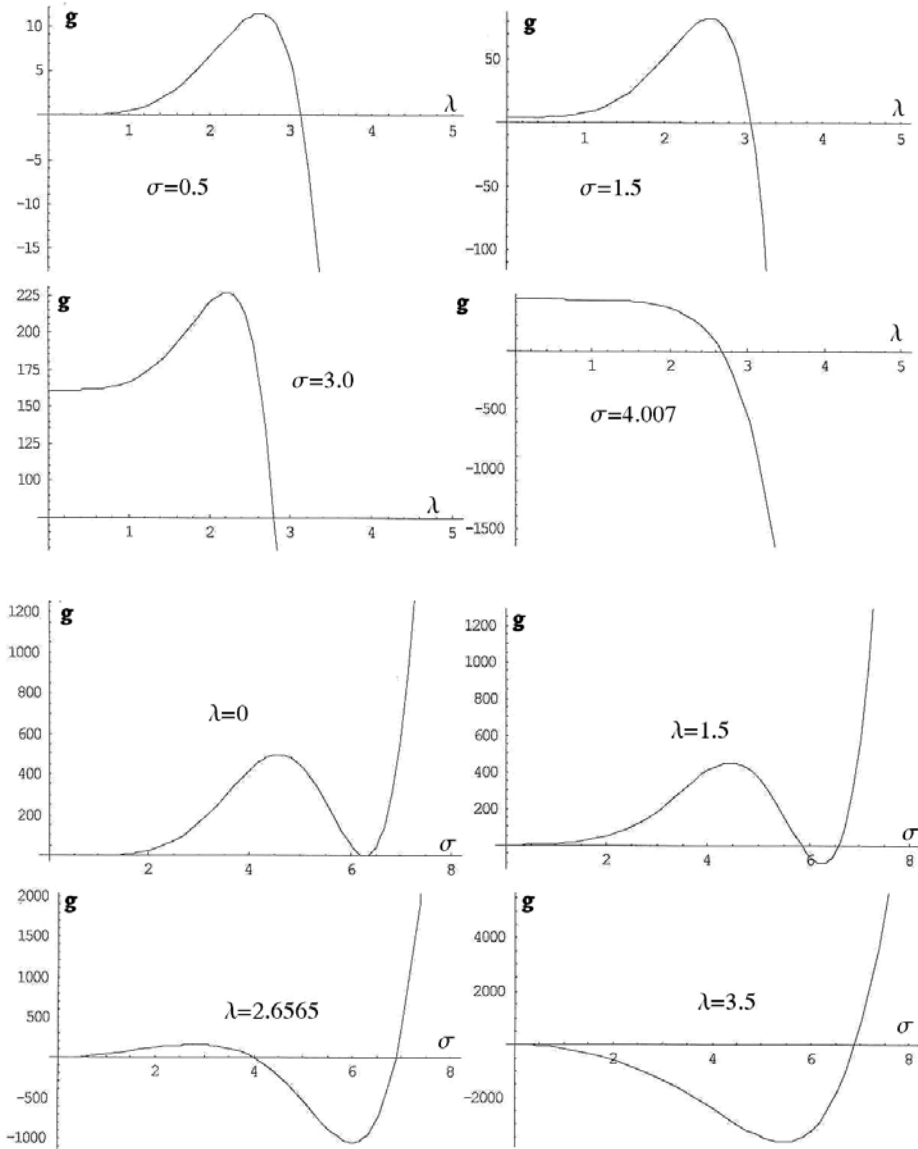
Fig. 6. Sensitivity function for the parameters  $\sigma \in (0; 6)$ ,  $\lambda \in (0; 4)$

4. Analiza rysunku 6 wskazuje, że dla parametrów  $\lambda > 3$  funkcja wrażliwości gwałtownie maleje. Szczegółowa analiza w tym zakresie, jak też analiza wrażliwości dla  $\sigma > 5$  wymaga dalszych badań.

## PODSUMOWANIE

W pracy przedstawiono analizę utraty stateczności pręta wspornikowego poddanego działaniu niekonserwatywnej siły. Wykazano, że statyczne kryterium utraty stateczności przez bifurkację daje rozwiązanie jedynie przy parametrze śledzenia  $\alpha \leq 0,5$ . Dla większych  $\alpha$  rozwiązanie nie istnieje, co oznacza, że nie jest możliwa utrata stateczności konstrukcji przez bifurkację. Konieczne jest wtedy zastosowanie dynamicznego kryterium utraty stateczności, które pozwala określić parametry utraty stateczności przez flater. Flater może wystąpić zarówno dla współczynnika  $\alpha \leq 0,5$ , jak i dla  $\alpha > 0,5$ .

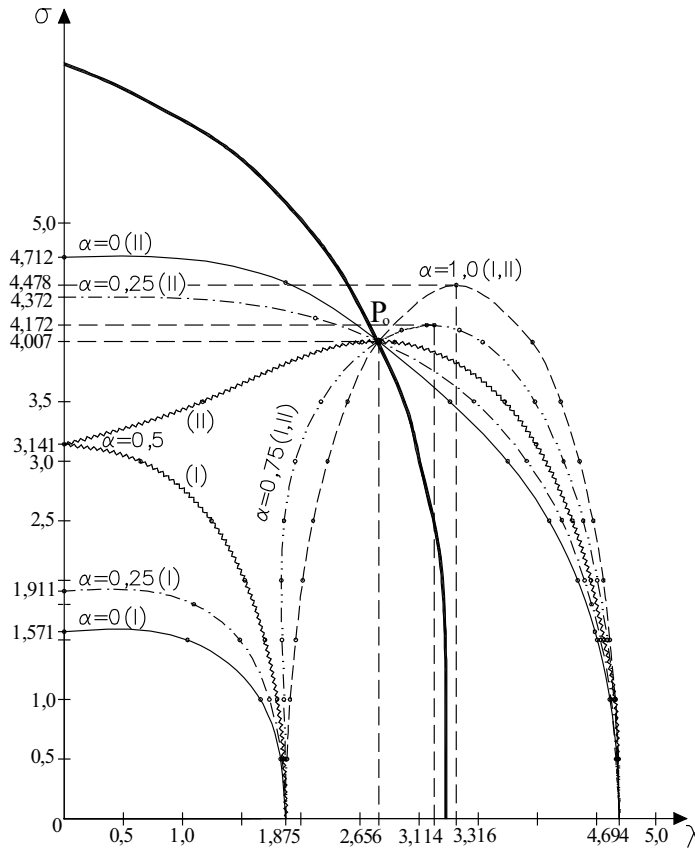
W drugiej części pracy podano ocenę wrażliwości parametrów krytycznych na niewielkie zmiany parametru śledzenia  $\alpha$ . Wskazano obszary parametrów krytycznych, przy których rozwiązanie wykazuje bardzo dużą wrażliwość, i zbiór parametrów  $\sigma$ ,  $\lambda$ , dla



Rys. 7. Funkcja wrażliwości w wybranych przekrojach  
 Fig. 7. Sensitivity function in selected cross-sections

kórych funkcja wrażliwości stateczności konstrukcji na zmiany kąta  $\alpha$  osiąga wartość 0. W klasie rozwiązań, pochodzących z dynamicznego kryterium utraty stateczności, jedynie punkt o współrzędnych  $\sigma = 4,004$ ,  $\lambda = 2,6565$  znajduje się na linii o zerowej wrażliwości. Inaczej mówiąc, flater, który następuje przy parametrze  $\lambda = 2,6565$ , jest nieczuły na zaburzenia kąta śledzenia siły.





Rys. 8. Rozkład parametrów  $\sigma$ ,  $\lambda$ , dla których otrzymujemy zerową wrażliwość na niewielkie zmiany współczynnika  $\alpha$

Fig. 8. Distribution of parameters  $\sigma$ ,  $\lambda$  for which we have zero sensitivity for small changes of coefficient  $\alpha$

## PIŚMIENNICTWO

- Gomuliński A., Witkowski M., 1992. Mechanika budowli – ujęcie komputerowe. Arkady, Warszawa.  
 Gomuliński A., Witkowski M., 1993. Mechanika budowli – kurs dla zaawansowanych. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa.  
 Huseyin J.W., 1975. Nonlinear theory of elastic stability. Noordhoff Int. Pub., Leyden.  
 Kleiber M. i inni, 1997. Parameter sensitivity in nonlinear mechanics. Wiley, New York.  
 Thomson J.M.T., Hunt G.W., 1973. A general theory of elastic stability. Wiley, New York.  
 Timoshenko S.P., Gere J.M., 1963. Teoria stateczności sprężystej. Arkady, Warszawa.

## ESTIMATION OF SENSITIVITY OF CRITICAL LOAD OF RODS WITH NON-CONSERVATIVE AXIAL FORCE

**Abstract.** Stability analysis of the rod subjected to non-conservative load is presented. Static and dynamic criterion of bifurcation and flutter of the structure is discussed. The influence of the angle  $\alpha$  of non-conservative load for the critical parameters is detected via sensitivity analysis.

**Key words:** stability, non-conservative force, sensitivity

Zaakceptowano do druku – Accepted for print: 20.08.2009