

## **OBLICZANIE PIERWSZEJ CZĘSTOŚCI DRGAŃ WŁASNYCH WIEŻ KRATOWYCH O ZBIEŻNYCH LINIOWO KRAWĘŻNIKACH**

Jacek Jaworski, Marcin Zadrozny

Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie

**Streszczenie.** W pracy wyprowadzono i zestawiono wzory na zastępczy moment bezwładności dla wież o liniowej i kwadratowej zależności momentu bezwładności trzonu wieży od wysokości. Uwzględniono także wieże z krawężnikami o stałym przekroju, nachylonymi do osi wieży pod stałym kątem, przy założeniu, że cały moment bezwładności pochodzi od krawężników. Na przykładzie trzydziestokątowej (dwukrotnie załamanej), czterokrawężnikowej wieży antenowej wysokości  $H = 99,5$  m i masie własnej stalowej konstrukcji  $m \approx 146$  t przedstawiono porównanie obliczonych wartości pierwszej częstości (okresu) drgań własnych oraz ugięcia wieży pod działaniem siły poprzecznej przyłożonej do jej wierzchołka z wynikami otrzymanymi dla modelu wieży wygenerowanego w programie Robot Millennium.

**Słowa kluczowe:** wieża stalowa, częstość drgań własnych, zastępczy moment bezwładności

### **WSTĘP**

Podstawowym obciążeniem wież antenowych jest obciążenie wiatrem. Normowe obliczenia wież wiatrem, których zasady zebrane zostały i przedyskutowane między innymi w pracy Rykaluka [2005], wymagają określenia współczynnika działania porywów wiatru, do czego potrzebna jest znajomość częstości (lub okresu) drgań własnych wieży. Chodzi tu o pierwszą postać drgań własnych giętych.

Mimo możliwości wyznaczenia częstości kolejnych postaci drgań własnych wież przy wykorzystaniu programów komputerowych, dla ułatwienia weryfikacji obliczeń i dla celów dydaktycznych korzystnie jest dysponować równaniami, pozwalającymi na obliczenie częstości drgań własnych wież, zwłaszcza tych, których moment bezwład-

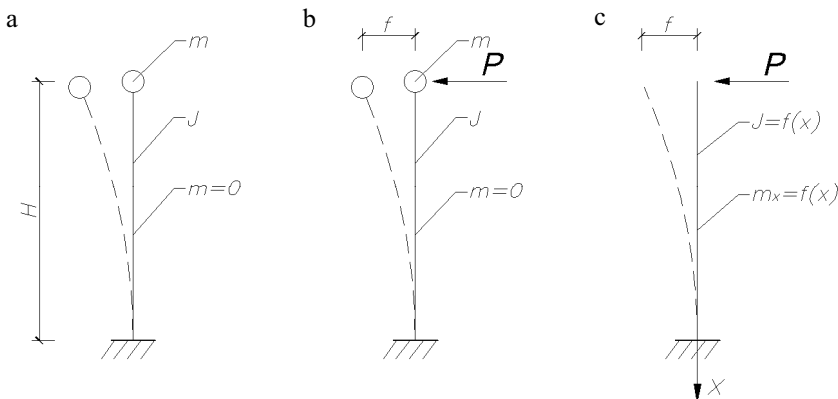
ności trzonu jest kwadratową funkcją wysokości, co jest dobrym przybliżeniem wież o zbieżnych liniowo krawężnikach.

## METODYKA

Jako model odniesienia przyjęto układ drgający o jednym stopniu swobody, w postaci ustawionego pionowo i utwierdzonego dolnym końcem nieważkiego, sprężystego, zginanego pręta o stałym przekroju (belki wspornikowej) i masie skupionej, zamocowanej na jego swobodnym końcu, jak pokazano na rysunku 1a. Podstawowe zależności dla ruchu drgającego takiego układu (w dowolnym zgodnym układzie jednostek) opisane są równaniami:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}; \quad f = \frac{1}{T}; \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1, 2, 3)$$

gdzie:  $T$  – okres drgań,  
 $f$  – częstość,  
 $\omega$  – częstość kołowa drgań,  
 $m$  – masa,  
 $k$  – stała sprężyny.



Rys. 1. Model wieży: a – model odniesienia, b – ugięcie pod działaniem siły  $P$ , c – moment bezwładności i masa trzonu wieży są funkcjami wysokości;  $H$  – wysokość,  $m$  – masa,  $J$  – moment bezwładności,  $P$  – siła poprzeczna,  $f$  – ugięcie swobodnego końca wieży

Fig. 1. Model of a tower: a – reference model, b – deflection caused by the force  $P$ , c – moment of inertia and mass of the tower shaft are functions of the height;  $H$  – height,  $m$  – mass,  $J$  – moment of inertia,  $P$  – transverse force,  $f$  – deflection of the tower head

Wyrażając sprężyste ugięcie swobodnego końca belki obciążonej poprzeczną siłą  $P$  jako  $f = PH^3(3EJ)^{-1}$  (rys. 1b) i wyznaczając sztywność sprężyny jako  $k = Pf^{-1} = 3EJ \cdot H^{-3}$ , możemy określić okres drgań własnych ( $T$ ) wzorem:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{mH^3}{3EJ}} \quad (4)$$

gdzie:  $H$  – długość belki (wysokość wieży),  
 $m$  – masa skupiona,  
 $J$  – stały moment bezwładności przekroju poprzecznego,  
 $E$  – moduł Younga.

Istotą zastosowanego ujęcia problemu jest zachowanie podstawowego modelu odniesienia także dla wież o różnych zależnościach momentu bezwładności i masy trzonu od wysokości wieży (rys. 1c), przy czym we wzorze (4) wystąpi odpowiednio masa zastępcza ( $m_e$ ) i zastępczy moment bezwładności ( $J_e$ ), które uwzględniają rzeczywistą konstrukcję wieży:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_e H^3}{3EJ_e}} \quad (5)$$

Stosując metodę Maxwella-Mohra i metodę całkowania równania różniczkowego osi odkształconej pręta, wyprowadzono wzory na zastępczy moment bezwładności dla wież o liniowej i kwadratowej zależności momentu bezwładności trzonu wieży od ich wysokości oraz dla wież o zbieżnych liniowo krawężnikach. Zaadaptowano te wzory do obliczeń dla przykładowej wieży trójodcinkowej. Dla wyznaczenia masy zastępczej wieży przyjęto sposób podany w załączniku 2 normy PN-77/B-02011, wymagający zastąpienia masy wieży pewną liczbą mas skupionych i wyliczenia ugięć ich środków ciężkości pod działaniem siły poprzecznej, przyłożonej do jej wierzchołka.

Celem sprawdzenia praktycznej przydatności wyprowadzonych wzorów i zastosowanej metody porównano wyniki obliczeń pierwszej częstości drgań własnych i ugięcia wieży z wynikami otrzymanymi dla komputerowego modelu dyskretnego na przykładzie kratowej wieży stalowej, trzyodcinkowej, czterokrawężnikowej, wysokości 95,5 m.

## LINIOWA ZALEŻNOŚĆ MOMENTU BEZWŁADNOŚCI TRZONU WIEŻY OD WYSOKOŚCI

Rozpatrzmy wieżę wysokości  $H$ , momentach bezwładności górnego i dolnego końca  $J_p$  i  $J_k$  oraz liniowej zależności momentu bezwładności od współrzędnej  $\xi$  (rys. 2a). Można zapisać, że  $J = a\xi$ , gdzie  $a = \text{const}$ . Dla  $\xi = L$ ;  $J_p = aL$ , a dla  $\xi = H + LJ_k = a(H + L)$ . Stąd  $a = J_p L^{-1}$  i  $J_k = J_p L^{-1}(H + L)$ , czyli

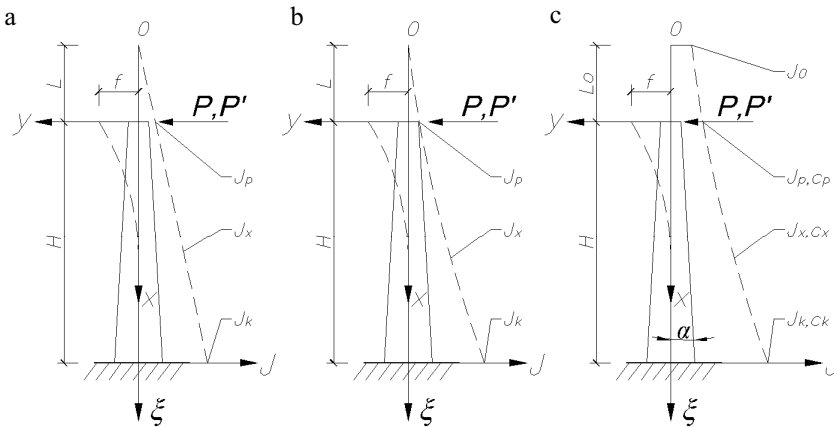
$$a = (J_k - J_p) H^{-1} \quad (6)$$

a odległość ( $L$ ), dla której  $J = 0$  (w tym punkcie jest początek osi  $\xi$ ) wynosi:

$$L = \frac{J_p H}{J_k - J_p} \quad (7)$$

W układzie opisanym współrzędną  $x$  moment bezwładności wyrazić można jako:

$$J_x = a\xi = a(x + L) \quad (8)$$



Rys. 2. Schematy do obliczeń ugięcia wieży: a –  $J_x = ax$ , b –  $J_x = ax^2$ , c – wieża o zbieżnych linowo krawężnikach;  $H$  – wysokość,  $x, y$  – osie współrzędnych,  $\xi$  – współrzędna o początku w punkcie 0, dla którego  $J = 0$  (ale  $J = J_o$  dla rys. c),  $L$  – odległość od górnego końca wieży do punktu 0,  $\alpha$  – kąt nachylenia krawężnika do osi wieży,  $P$  – siła poprzeczna,  $P'$  – siła jednostkowa,  $J$  – moment bezwładności,  $J_p, J_k$  – momenty bezwładności górnego i dolnego końca wieży,  $J_o$  – moment bezwładności przekroju krawężnika względem jego osi głównej środkowej,  $c_p, c_k$  – odległość od osi wieży do środka ciężkości krawężnika, dla górnego i dolnego końca wieży

Fig. 2. Schemes for calculations of tower deflection: a –  $J_x = ax$ , b –  $J_x = ax^2$ , c – a tower with constant sloping legs;  $H$  – height,  $x, y$  – coordinate axes,  $\xi$  – coordinate axis originated at point 0, for which  $J = 0$  (but  $J = J_o$  for Fig. c),  $L$  – distance between the tower head and the point 0,  $\alpha$  – angle of inclination between the leg and the centre line of a tower,  $P$  – transverse force,  $P'$  – force equal to 1,  $J$  – moment of inertia,  $J_p, J_k$  – moments of inertia for the tower head and bottom,  $J_o$  – moment of inertia of a leg section referred to the centre line of a leg,  $c_p, c_k$  – distance between the centre line of a tower and the centre line of a leg section, for the tower head and bottom

Metodą Maxwella-Mohra wyznaczamy ugięcia końca pręta  $f$  (dla sił  $P = 1$  i  $P' = 1$ , przy czym  $P$  ma wymiar siły w przyjętym układzie jednostek, a  $P'$  jest bezwymiarowe), uwzględniając wpływ momentów gnących  $M_g$  i  $M_g'$ , a pomijając człony równania uwzględniające siły tnące i normalne, które mają tu drugorzędne znaczenie:

$$f = \int_0^H \frac{M_g M_g'}{EJ_x} dx = \int_0^H \frac{(-x)(-x)}{Ea(x+L)} dx = \frac{1}{aE} \int_0^H \frac{x^2}{(x+L)} dx \quad (9)$$

Porównując to ugięcie z ugięciem od siły  $P = 1$  belki z modelu podstawowego (z tego samego materiału, o tej samej wysokości i o stałym zastępczym momencie bezwładności  $J_e$ ), mamy:

$$f = \frac{H^3}{3EJ_e} = \frac{1}{aE} \int_0^H \frac{x^2}{(x+L)} dx \quad (10)$$

Po scałkowaniu (przy obliczaniu wszystkich całek korzystano w tej pracy z tablic Spiegel i Abellanas [1991]) wyrażenie na zastępczy moment bezwładności ma postać:

$$J_e = \frac{aH^3}{3 \left[ H \left( \frac{H}{2} - L \right) + L^2 \ln \frac{H+L}{L} \right]} \quad (11)$$

gdzie  $a$  i  $L$  określone są wzorami (6) i (7). Wstawiając te wyrażenia do wzoru (11), otrzymamy postać rozwiązania, w której nie występuje  $H$ :

$$J_e = \frac{2(J_k - J_p)^3}{3 \left[ (J_k - 2J_p)^2 + J_p^2 \left( 2 \ln \frac{J_k}{J_p} - 1 \right) \right]} \quad (12)$$

Przypadek ten nie odpowiada rzeczywistym konstrukcjom wież i nie ma istotnego znaczenia praktycznego, ale wyjaśnia w najprostszy sposób przyjęty tok postępowania.

### KWADRATOWA ZALEŻNOŚĆ MOMENTU BEZWŁADNOŚCI TRZONU WIEŻY OD WYSOKOŚCI

Analogicznie postępujemy, gdy zależność momentu bezwładności trzonu wieży od współrzędnej  $\xi$  (rys. 2b) określona jest funkcją  $J = a\xi^2$ , gdzie  $a = \text{const}$ . Dla  $\xi = L$  mamy  $J_p = a\xi^2 = aL^2$ , a dla  $\xi = H + L$  mamy  $J_k = a(H + L)^2$ , co prowadzi do równania kwadratowego:

$$(J_k - J_p)L^2 - 2J_pHL - J_pH^2 = 0 \quad (13)$$

o dwóch pierwiastkach:

$$L_1 = H(J_p + \sqrt{J_p J_k})(J_k - J_p)^{-1} \quad \text{i} \quad L_2 = H(J_p - \sqrt{J_p J_k})(J_k - J_p)^{-1}$$

z których uwzględnimy  $L_1$ , gdyż to odpowiada interesującemu nas, stosowanemu w praktyce kształtowi wież. Zauważmy, że  $L_1 > L_2$ . Otrzymamy więc:

$$L = H \frac{J_p + \sqrt{J_p J_k}}{J_k - J_p} \quad (14)$$

$$a = \frac{(J_k - J_p)^2}{H^2 (\sqrt{J_p} + \sqrt{J_k})^2} \quad (15)$$

Porównując ugięcia, analogicznie jak w przypadku opisanym w poprzednim punkcie, mamy:

$$f = \frac{H^3}{3EJ_e} = \frac{1}{aE} \int_0^H \frac{x^2}{(x+L)^2} dx \quad (16)$$

Skąd po scałkowaniu otrzymamy wzór na zastępczy moment bezwładności w postaci:

$$J_e = \frac{aH^3}{3 \left[ H - \frac{L^2}{H+L} + L \left( 1 - 2 \ln \frac{H+L}{L} \right) \right]} \quad (17)$$

gdzie  $L$  i  $a$  są określone wzorami (14) i (15). Także i w tym przypadku, po podstawieniu  $L$  i  $a$ , otrzymamy postać rozwiązania, w której nie występuje  $H$ :

$$J_e = \frac{B}{3 \left( \frac{2A+1}{A+1} - 2A \ln \frac{A+1}{A} \right)}$$

gdzie:  $A = \frac{J_p + \sqrt{J_p J_k}}{J_k - J_p}$  i  $B = \frac{(J_k - J_p)^2}{(\sqrt{J_p} + \sqrt{J_k})^2}$  (18)

## WIEŻA O ZBIEŻNYCH LINIOWO KRAWĘŻNIKACH

Gdy wieża zbudowana jest jako układ prętowy z krawężnikami nachylonymi do jej osi pod stałym kątem, jako moment bezwładności przekroju wieży przyjmowany jest zazwyczaj moment bezwładności krawężników. Przyjmując, że prostoliniowe krawężniki są prętami o stałym przekroju, moment bezwładności w układzie opisanym współrzędną  $\xi$  wyraża się jako

$$J_\xi = n \left( J_0 + A c_\xi^2 \right) \quad (19)$$

gdzie:  $J_0$  – moment bezwładności przekroju krawężnika względem jego osi głównej środkowej,

$A$  – pole powierzchni przekroju krawężnika,

$c_\xi$  – odległość od środka ciężkości przekroju wieży do środka ciężkości krawężnika,

$n$  – liczba krawężników.

Wyrażając  $c_\xi$  jako funkcję kąta pochylenia krawężników ( $\alpha$ ) lub wysokości wieży ( $H$ ) (rys. 2c):

$$c_\xi = \xi \cdot \operatorname{tg} \alpha = \xi (c_k - c_p) H^{-1} \quad (20)$$

i uwzględniając, że  $\xi = x + L_0$ , możemy wyrazić moment bezwładności w układzie opisanym współrzędną  $x$  jako:

$$J_x = J_0 + A \left( \frac{c_k - c_p}{H} \right)^2 (x + L_0)^2 \quad (21)$$

Prowadzi to do wzoru na ugięcie w postaci:

$$f = \int_0^H \frac{M_g M'_g}{EJ_x} dx = \int_0^H \frac{x^2}{EJ_x} dx = \frac{1}{E} \int_0^H \frac{x^2}{J_0 + A \left( \frac{c_k - c_p}{H} \right)^2 (x + L_0)^2} dx \quad (22)$$

Po scałkowaniu i porównaniu ugięć otrzymujemy zastępczy moment bezwładności w postaci:

$$J_e = \frac{aH^3}{3 \left[ H - \frac{b}{2} \ln \frac{H^2 + bH + c}{c} + \frac{b^2 - 2c}{\sqrt{4c - b^2}} \left( \operatorname{tg}^{-1} \frac{2H + b}{\sqrt{4c - b^2}} - \operatorname{tg}^{-1} \frac{b}{\sqrt{4c - b^2}} \right) \right]} \quad (23)$$

gdzie:

$$a = A \left( \frac{c_k - c_p}{H} \right)^2 = A \operatorname{tg}^2 \alpha; \quad b = \frac{2c_p}{\operatorname{tg} \alpha}; \quad c = \frac{Ac_p^2 + J_0}{A \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

lub też jako

$$J_e = \frac{A(c_k - c_p)^3}{3 \left\{ c_k - c_p - c_p \ln \frac{Ac_k^2 + J_0}{Ac_p^2 + J_0} + \frac{Ac_p^2 - J_0}{\sqrt{AJ_0}} \left[ \operatorname{tg}^{-1} c_k \sqrt{\frac{A}{J_0}} - \operatorname{tg}^{-1} c_p \sqrt{\frac{A}{J_0}} \right] \right\}} \quad (24)$$

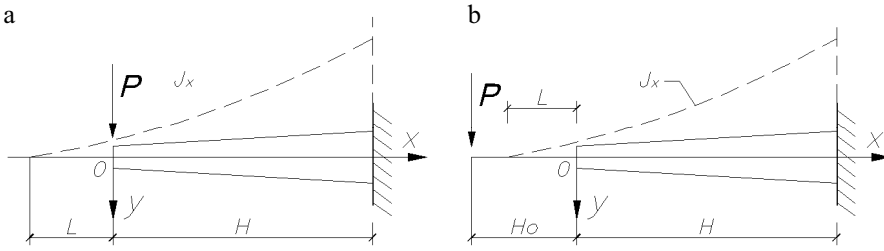
Po odrzuceniu we wzorach (19) i (21)  $J_o$ , jako wartości niewielkiej wobec pozostałej części momentu  $J_x$ , problem wieży o zbieżnych liniowo krawężnikach staje się opisanym w poprzednim rozdziale zagadnieniem wieży o kwadratowej zależności momentu bezwładności trzonu od wysokości.

Porównując wyniki otrzymane z rozwiązania dokładnego (23) i (24) i uproszczonego (17) i (18) na dwóch przykładach liczbowych – dla dolnego i środkowego odcinka wieży, stanowiącej opisaną w tej pracy przykład obliczeniowy, otrzymano różnice wartości  $J_e$ , wynoszące odpowiednio 0,08 i 0,005%. Widać więc, że do celów praktycznych obliczeń typowa wieża o zbieżnych liniowo krawężnikach może być traktowana jako wieża, dla której moment bezwładności trzonu rośnie proporcjonalnie do kwadratu wysokości wieży.

Gdyby w tych samych przykładach zastosować wzory (11) i (12), właściwe dla wieży o liniowej zależności momentu bezwładności trzonu od wysokości, uzyskane wartości  $J_e$  będą obarczone ponad 20-procentowym błędem.

## CAŁKOWANIE RÓWNIANIA RÓŻNICZKOWEGO OSI UGIĘTEJ PRĘTA

Wyprowadzone powyżej metodą Maxwella-Mohra wzory można także otrzymać, całkując równanie różniczkowe osi odkształconej belki. Na rysunku 3a podano założenia dla przypadku kwadratowej zależności momentu bezwładności ( $J_x$ ) od współrzędnej  $x$



Rys. 3. Schematy do obliczeń ugięcia belki: a –  $J_x = ax^2$ , siła  $P$  przyłożona w punkcie 0, b – siła  $P$  przyłożona w odległości  $H_0$  od punktu 0;  $H$  – wysokość wieży (długość pręta),  $L$  – odległość od końca pręta do punktu, dla którego  $J = 0$ ,  $x, y$  – osie współrzędnych,  $P$  – siła poprzeczna,  $H_0$  – odległość punktu przyłożenia siły poprzecznej od swobodnego końca pręta,  $J$  – moment bezwładności

Fig. 3. Schemes for calculations of a beam deflection: a –  $J_x = ax^2$ , force  $P$  applied at a point 0, b – force  $P$  applied at a distance  $H_0$  from a point 0;  $H$  – tower height (length of a bar),  $L$  – distance between the end of a bar and the point where  $J = 0$ ,  $x, y$  – coordinate axes,  $P$  – transverse force,  $H_0$  – distance between the point of application of transverse force and the free end of a bar,  $J$  – moment of inertia

biegnącej wzdłuż osi pręta. Moment bezwładności określony jest jako:  $J_x = a(x+L)^2$ , przy czym parametry  $L$  i  $a$  zostały określone równaniami (14) i (15), a moment gnący wynosi:  $M_g = -Px$ .

Równanie różniczkowe przyjmuje postać:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{-M_g}{EJ_x} = \frac{Px}{Ea(x+L)^2} \quad (25)$$

Całkując dwukrotnie równanie (25) i wyznaczając stałe z warunków brzegowych (dla  $x=H$ ;  $v=0$  i  $y=0$ ), gdzie  $y$  to ugięcie, a  $v$  – kąt obrotu przekroju, otrzymujemy równanie:

$$\frac{aE}{P} y = (H-x) \frac{H+2L}{H+L} + (x+2L) \ln \frac{x+L}{H+L} \quad (26)$$

Dla  $P=1$  i  $x=0$  otrzymamy ugięcie zapisane w sposób równoważny rozwiązaniu całki (16) i zastępczy moment bezwładności w postaci identycznej z wzorem (17).

W przypadku gdy siła przyłożona jest w punkcie odległym od początku układu o odcinek  $H_0$  (jak na rys. 3b),  $J_x$ ,  $a$  i  $L$  określone są tak jak poprzednio, a moment gnący wyraża się jako:  $M_g = -P(x+H_0)$ , otrzymujemy równanie różniczkowe w postaci:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{-M_g}{EJ_x} = \frac{P(x+H_0)}{Ea(x+L)^2} \quad (27)$$

Po podwójnym całkowaniu, wyznaczeniu stałych i uproszczeniu, otrzymamy wzór na ugięcie:

$$\frac{aE}{P} y = (H-x) \frac{H+2L-H_0}{H+L} + (x+2L-H_0) \ln \frac{x+L}{H+L} \quad (28)$$

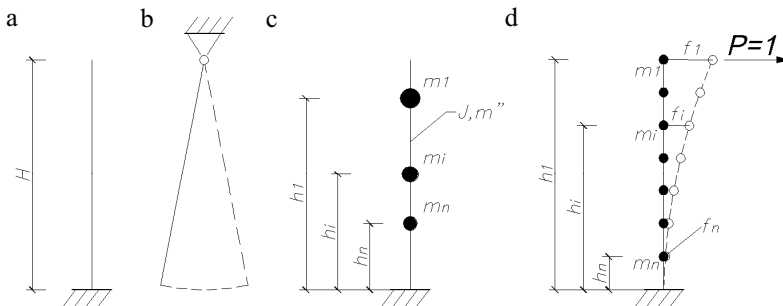


zastępczy moment bezwładności zaś wyrazi się jako:

$$J_e = \frac{aH^3}{3 \left[ H \frac{H+2L-H_0}{H+L} + (2L-H_0) \ln \frac{L}{H+L} \right]} \quad (29)$$

## WYZNACZANIE MASY ZASTĘPCZEJ

Z analizy częstości małych drgań swobodnych belki wspornikowej o stałym przekroju i masie równomiernie rozłożonej wzdłuż jej długości (rys. 4a) wynika wartość masy zastępczej  $m_e = 0,2427 m$  (rozwiązanie dokładne), często przyjmuje się też  $m_e = 33 : 140 m = 0,2357 m$  (rozwiązanie metodą energetyczną) [Dyląg i in. 2000]. Wartości te, mimo zupełnie innej formy ruchu, niewiele różnią się od  $m_e = 0,25 m$ , jak w rozwiązaniu dla wahadła w postaci jednorodnego pręta zawieszono przegubowo jednym końcem (rys. 4b).



Rys. 4. Schematy do wyznaczania masy zastępczej pręta: a – jednorodna belka wspornikowa, b – wahadło (jednorodny, sztywny pręt), c – wieża o jednorodnym trzonie i masach skupionych, d – wieża o całkowitej masie równej sumie mas  $m_i$ ;  $H$  – wysokość,  $J, m''$  – moment bezwładności i masa trzonu wieży,  $m_i$  –  $i$ -ta masa skupiona ( $i = 1, \dots, n$ ),  $h_i$  – wysokość  $i$ -tej masy,  $f_i$  – ugięcie na wysokości  $i$ -tej masy pod działaniem siły poprzecznej  $P = 1$  przyłożonej do swobodnego końca wieży,  $P$  – siła poprzeczna

Fig. 4. Schemes for the determination of effective mass of the bar: a – homogeneous cantilever beam, b – pendulum (homogeneous, rigid bar), c – tower with homogeneous shaft and concentrated masses, d – tower of total weight equal to the sum of masses  $m_i$ ;  $H$  – height,  $J, m''$  – moment of inertia and mass of a tower shaft,  $m_i$  – concentrated mass ( $i = 1, \dots, n$ ),  $h_i$  – height of  $m_i$ ,  $f_i$  – deflection on the height  $h_i$  when the transverse force  $P = 1$  is applied to the tower head,  $P$  – transverse force

Gdy wieża posiada trzon o stałym przekroju i umieszczone na nim masy skupione, norma PN-77/B-02011 podaje w załączniku 2 rozwiązanie (rys. 4c) w formie:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m'H^3}{3EJ_e}} \quad \text{oraz} \quad m' = \frac{1}{H^3} \sum_{i=1}^n m_i h_i^3 + \frac{33}{140} m'' \quad (30)$$

gdzie:  $m_i, h_i$  – wartość i wysokość położenia  $i$ -tej masy skupionej,  
 $m''$  – masa całkowita konstrukcji wsporczej,  
 $J_e$  – zastępczy moment bezwładności określony z równości ugięć.

Natomiast w przypadku zmiennego przekroju trzonu wieży należy przyjąć schemat obliczeniowy według rysunku 4d, wtedy:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n m_i f_i^2}{f_1}} \quad (31)$$

Porównując wzory (5) i (31) i oznaczając  $f_1$  jako  $f$ , masa zastępcza może być wyrażona jako:

$$m_e = \frac{3EJ_e}{H^3} \frac{\sum_{i=1}^n m_i f_i^2}{f} \quad (32)$$

Sposób ten pozwala na rozłożenie wieży na  $n$  odcinków składowych i rozpatrzenie jej masy jako  $n$  mas skupionych, położonych w środkach ciężkości poszczególnych odcinków. Konieczne jest wtedy wyznaczenie ugięcia dla każdego z  $n$  środków ciężkości.

## PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

Podane uprzednio wzory zastosowano do obliczenia częstości drgań własnych projektowanej stalowej wieży antenowej wysokości 95,5 m [Zadrożny 2006]. Wieża jest dwukrotnie załamana, o przekroju kwadratowym. Górny odcinek ma przekrój stały, dwa dolne odcinki mają kontur liniowy. Krawężniki i wykratowanie główne zaprojektowano z rur. Wieża posiada cztery platformy. Przyjęta do obliczeń masa nieobciążonej konstrukcji wsporczej wynosi 132,534 t, a po dodaniu masy platform  $m = 145,835$  ton. Na rysunku 5 podano główne parametry wieży, a w tabelicy 1 zestawiono wielkości użyte do obliczeń.

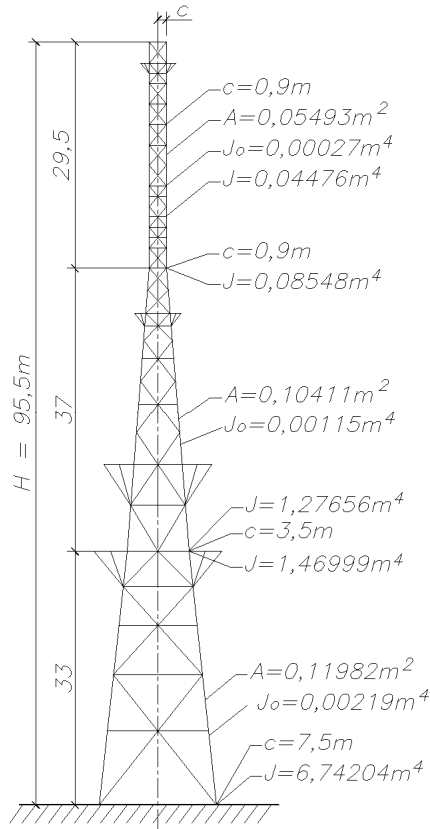
Do obliczenia momentu zastępczego wieży skorzystano z metody całkowania równania osi odkształconej pręta – rysunek 3 i wzory (25)–(28). Kolejne etapy obliczeń odpowiadają odcinkom wieży według rysunku 6.

Dla dolnego odcinka mamy:  $H_o = H_1 + H_2$ , a  $L_3$  i  $a_3$  są określone odpowiednio wzorami (14) i (15). Korzystając z rozwiązania całki ze wzoru (27), mamy:

$$\frac{\alpha_3 E}{P} \vartheta_3 = \frac{(H_1 + H_2 - L_3)(x - H_3)}{(H_3 + L_3)(x + L_3)} + \ln \frac{x + L_3}{H_3 + L_3} \quad (33)$$

a dla  $x = 0$  i  $P = 1$

$$\alpha_3 E \vartheta_3 = \ln \frac{x + L_3}{H_3 + L_3} - \frac{H_3 (H_1 + H_2 - L_3)}{L_3 (H_3 + L_3)} \quad (34)$$



Rys. 5. Parametry geometryczne wieży:  $H$  – wysokość,  $c$  – odległość od osi wieży do osi krawężnika,  $A$  – pole powierzchni przekroju 4 krawężników,  $J$  – moment bezwładności 4 krawężników względem osi głównej środkowej przekroju wieży,  $J_o$  – moment bezwładności przekroju 4 krawężników względem własnych osi głównych środkowych

Fig. 5. Geometrical parameters of the tower:  $H$  – height,  $c$  – distance between the centre line of a tower and the centre line of a leg,  $A$  – cross-sectional area of four legs,  $J$  – moment of inertia of four legs referred to the centre line of a tower section,  $J_o$  – moment of inertia of four legs referred to the proper centre line of each leg

$$\text{oraz } \frac{a_3 E}{P} y_3 = (H_3 - x) \frac{H_3 + 2L_3 - H_1 - H_2}{H_3 + L_3} + (x + 2L_3 - H_1 - H_2) \ln \frac{x + L_3}{H_3 + L_3} \quad (35)$$

i dla  $x = 0$  i  $P = 1$

$$a_3 E y_3 = (2L_3 - H_1 - H_2) \ln \frac{L_3}{H_3 + L_3} + H_3 \frac{H_3 + 2L_3 - H_1 - H_2}{H_3 + L_3} \quad (36)$$

co pozwala obliczyć dla  $P = 1$  i  $x = 0$  wartości liczbowe kąta obrotu przekroju ( $v_3$ ) i ugięcia ( $y_3$ ).

Tabela 1. Porównanie ugięć wieży pod wpływem siły poprzecznej  $P = 1$  kN przyłożonej do jej wierzchołka, obliczonych metodą przyjętą przez autorów i programem *Robot*. Masę wieży rozdzielono na 19 mas skupionych: 1–15 – masy przeseł, 16–19 – masy platform

Table 1. Comparison of tower deflection, when the transverse force  $P = 1$  kN is applied to the tower head, calculated by authors and computed by the program *Robot*. The mass of the tower is divided in 19 concentrated masses: 1–15 – masses of tower spans, 16–19 – masses of platforms

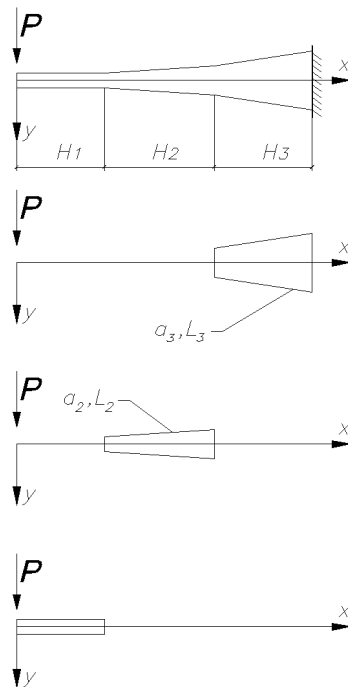
Masa Mass	Wartość $i$ -tej masy Value of the mass $m_i$	Wysokość środka ciężkości $i$ -tej masy Height of the gravity centre of the mass $h_i$ [m]	Ugięcie na wysokości $h_i$ Deflection on the height $h_i$	
			obliczone w pracy calculated	z programu <i>Robot</i> computed
Nr – No	$m_i$ [kg]	$h_i$ [m]	$f_i$ [cm]	$f_i$ [cm]
1	45233,5	8,62	0,00027	0,0000
2	21980,9	22,02	0,00221	0,0012
3	7523,4	30,79	0,00438	0,0030
4	8289,8	36,13	0,00648	0,0052
5	13478,2	44,05	0,01098	0,0094
6	7980,5	52,31	0,01792	0,0160
7	5440,5	58,42	0,02491	0,0227
8	3760,7	62,85	0,03129	0,0287
9	4892,3	67,53	0,03978	0,0362
10	2750,0	72,32	0,05140	0,0484
11	2575,8	76,97	0,06795	0,0680
12	2429,9	81,61	0,08847	0,0924
13	2505,8	86,25	0,11220	0,1203
14	2497,6	90,87	0,13865	0,1520
15	1195,2	94,34	0,15877	0,1774
16	5913,5	33,00	0,00517	0,0036
17	5519,0	44,63	0,01142	0,0097
18	999,5	64,46	0,03438	0,0316
19	868,8	93,19	0,15200	0,1684

Analogicznie postępujemy dla odcinka środkowego, z tym że  $H_0 = H_1$ ,  $H = H_2$ , a warunki brzegowe: dla  $x = H_2$ ,  $v = v_3$  i  $y = y_3$ . Dla  $P = 1$  i  $x = 0$  otrzymujemy wyrażenia:

$$\vartheta_2 = \vartheta_3 + \frac{1}{a_2 E} \left( \frac{L_2 - H_1}{L_2} + \frac{H_1 - L_2}{H_2 + L_2} + \ln \frac{L_2}{H_2 + L_2} \right) \quad (37)$$

$$y_2 = y_3 - \vartheta_3 H_2 + \frac{1}{a_2 E} \left[ H_2 \frac{H_2 + 2L_2 - H_1}{H_2 + L_2} + (2L_2 - H_1) \ln \frac{L_2}{H_2 + L_2} \right] \quad (38)$$

które pozwalają na wyliczenie wartości  $v_2$  i  $y_2$ .



Rys. 6. Schemat postępowania dla przykładowej wieży trójodcinkowej:  $x, y$  – osie współrzędnych,  $H_1, H_2, H_3$  – długości trzech odcinków wieży,  $P$  – siła poprzeczna,  $a_2, L_2, a_3, L_3$  – wielkości określone równaniami (14) i (15), odpowiednio dla drugiego i trzeciego odcinka

Fig. 6. Flow chart for exemplary three-section tower:  $x, y$  – coordinate axes,  $H_1, H_2, H_3$  – longitudes of three tower sections,  $P$  – transverse force,  $a_2, L_2, a_3, L_3$  – parameters defined by equations (14) and (15), for the second and the third section, respectively

Na końcu liczymy odcinek górny, dla którego  $J_x = J_1$ ,  $M_g = -Px$ , a warunki brzegowe są: dla  $x = H_1$ ,  $v = v_2$ ,  $y = y_2$ . Dla obciążenia siłą poprzeczną  $P = 1$  kN obliczono: ugięcie swobodnego końca wieży  $y_1 = 0,16561$  cm i zastępczy moment bezwładności  $J_e = 0,85515$  m<sup>4</sup>. Dokładnie takie same wyniki otrzymano metodą Maxwella-Mohra.

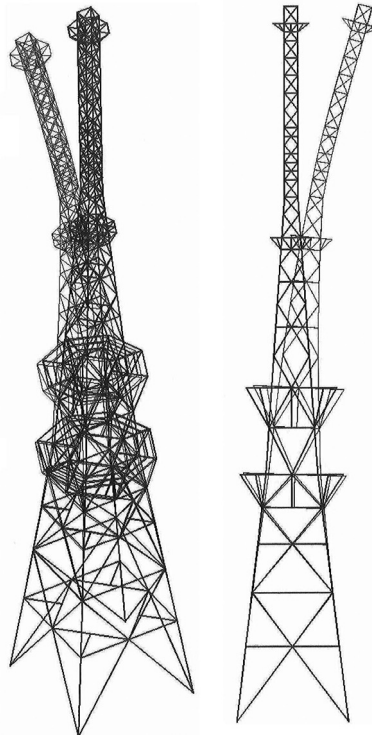
Aby obliczyć masę zastępczą, podzielono wieżę na 15 segmentów (odpowiadających jednemu lub dwu przęsłom konstrukcji), określając masę i środek ciężkości każdego z nich, oraz dodatkowo uwzględniając masy i środki ciężkości każdej z czterech platform. Korzystając z podanych uprzednio rozwiązań, obliczono ugięcia wieży pod działaniem przyłożonej na swobodnym końcu siły poprzecznej  $P = 1$ , w punktach o współrzędnych  $x$  odpowiadających położeniu dziewiętnastu środków ciężkości. Następnie ze wzoru (32) obliczono masę zastępczą wieży: bez uwzględnienia platform równą 6105,5 kg, a po uwzględnieniu platform  $m_e = 6912,5$  kg. Okres (częstość) drgań można wyznaczyć z wzoru (31) lub wstawiając do wzoru (5) obliczone wartości zastępcze  $J_e$  i  $m_e$ . Otrzymano następujący wynik:  $T = 0,6723$  s ( $f = 1,4875$  s<sup>-1</sup>).

## DYSKUSJA WYNIKÓW. PODSUMOWANIE

Otrzymane wzory obliczeniowe wyprowadzone zostały przy przyjęciu wielu założeń upraszczających, niektóre z nich to:

- wieża jest elementem idealnie liniowo-sprężystym,
- moment bezwładności związany jest wyłącznie z krawężnikami wieży, pominięto też część momentu bezwładności (względem środka ciężkości krawężnika),
- przy obliczeniach metodą Maxwella-Mohra uwzględniono tylko wyrazy związane z momentem gnącym, pomijając siły normalne i tnące; odpowiada to założeniu, że belka obciążona jest wyłącznie momentem gnącym, przyjmowanemu przy wyprowadzeniu równania różniczkowego osi ugiętej belki,
- licząc masę zastępczą przyjęto założenie podziału wieży na skończoną, niewielką liczbę segmentów,
- założono postać drgań wieży i przyjęto, że amplituda drgań jest mała; w przypadku wież z odcinkami krawężników o różnej zbieżności, zastosowane rozwiązanie dotyczy przypadku o stosunkowo niewielkiej różnicy sztywności poszczególnych odcinków.

Wyniki w zakresie okresu (częstości) pierwszej postaci drgań własnych giętnych uzyskane dla trójwymiarowego modelu wieży wygenerowanego w programie Robot Millennium (rys. 7), to  $T = 0,72$  s ( $f = 1,388$  s<sup>-1</sup>), a ugięcie swobodnego końca wie-



Rys. 7. Model komputerowy wieży – wieża ugięta obrazuje pierwszą postać drgań własnych giętnych

Fig. 7. Computer model of a tower – deflected tower exemplifies the first mode of transverse free vibration

ży pod działaniem przyłożonej do niego siły poprzecznej  $P = 1$  kN wynosi  $y_1 = f_{\max} = 0,18655$  cm. Widać więc, że dla analizowanego przykładu obliczeniowego różnica względna pomiędzy wynikiem obliczeń komputerowych i wykonanych w sposób przedstawiony w niniejszej pracy dla okresu (częstości) drgań nie przekracza 6,7%, a dla ugięcia swobodnego końca wieży nie przekracza 11,2%.

Uzyskana zbieżność wyników pozwala uznać przedstawioną w artykule metodę obliczeniową za wystarczająco dokładną dla praktycznych obliczeń wież. Szczególnie uwzględniając fakt, że obliczenia takie wykonujemy zwykle we wstępnych etapach projektowania wieży, podczas których dysponujemy jedynie przybliżonymi wartościami poszczególnych mas. Porównanie ugięć obliczonych w niniejszej pracy z wynikami komputerowymi pokazuje tabela 1.

Wyprowadzone lub użyte w rozwiązaniu wzory mogą służyć w pewnych przypadkach do weryfikacji obliczeń komputerowych, mają też, zdaniem autorów, pewne znaczenie dydaktyczne. Mogą być też użyte do obliczeń innych konstrukcji, których kształt odpowiada liniowej lub kwadratowej zależności momentu bezwładności od długości pręta.

Warto zwrócić uwagę, że obliczony w przykładzie zastępczy moment bezwładności odpowiada w przybliżeniu „intuicyjnie oczekiwanej” przez większość osób wartości. Jeśli natomiast chodzi o masę zastępczą, to wstępne przyjęcie jej w granicach  $m_e = 0,24$  m lub obliczenie według schematu z rysunku 4c prowadzi do bardzo znacznego błędu.

## PIŚMIENNICTWO

- Dyłaż Z., Jakubowicz A., Orłoś Z., 2000. Wytrzymałość materiałów. T. 2. WNT, Warszawa.  
PN-77/B-02011 – Obciążenia w obliczeniach statycznych. Obciążenia wiatrem.  
Rykaluk K., 2005. Konstrukcje stalowe: kominy, wieże, maszty. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław.  
Spiegel M.R., Abellanas L., 1991. Formulas y tablas de matematica aplicada. Parte II. Tabl. 1. McGraw-Hill / Interamericana, Madryt.  
Zadrozny M., 2006. Projekt wysokiej wielofunkcyjnej wieży antenowej usytuowanej na wysokości 1100 m n.p.m. Praca magisterska. SGGW, Warszawa.

## CALCULATION OF FIRST NATURAL FREQUENCY OF LATTICE TOWERS WITH A CONSTANT SLOPING LEGS

**Abstract.** Formulas for the effective moment of inertia of towers with the linear and the square dependence between the moment of inertia of the tower shaft and the height of the tower are derived and compiled in the paper. Towers with legs of a constant cross-section and constant sloping are also included, assuming that the whole moment of inertia results from the legs. Comparison of a frequency (period) of a first mode of natural vibration and of a tower head deflection calculated and computed using the Robot Millennium program is given for the model of aerial (antenna) steel tower 99.5 m high, with a pyramidal trunk shape, three sections, four legs and with the dead weight of ca. 130 ton.

**Keywords:** steel tower, natural frequency, effective moment of inertia

Zaakceptowano do druku – Accepted for print: 28.03.2008