

ROZWIĄZANIE ZAMKNIĘTE STATYKI PASMA POWŁOKI KOŁOWEJ I ŁUKU KOŁOWEGO

Roman Misiak

Warszawa

Streszczenie. Artykuł dotyczy pasma powłoki kołowej i łuku kołowego, zawiera rozwiązania zamknięte statyki tych konstrukcji spełniające dowolny układ warunków brzegowych, co umożliwia zapewnienie współpracy z dowolną konstrukcją budowlaną o innym kształcie. W rozwiązaniu zastosowano obciążenie równomierne o kierunku promieniowym oraz obciążenie równomierne o kierunku prostopadłym do cięciwy, przyłożone do krzywizny na całej długości. Wielkości sił wewnętrznych spełniają warunki równowagi wewnętrznej i zewnętrznej. Przedstawiono przeanalizowany zakres zastosowania rozwiązania dla różnych stosunków długości promienia do grubości pasma lub do wysokości przekroju łuku, w zależności od kąta rozwarcia krzywizny.

Słowa kluczowe: pasmo powłoki kołowej, łuk kołowy, statyka pasma powłoki kołowej, statyka łuku kołowego

WSTĘP

W artykule przedstawiono metodę dostosowania zginania powłok o kształcie walca kołowego do zginania sklepień i łuków kołowych, spełniającą na prostych krawędziach sklepień lub podporach łuków dowolny układ sześciu warunków brzegowych. Rozwiązanie to podano w postaci sumy obciążenia z funkcją zawierającą stałe całkowania, a nie w postaci iloczynu (tzn. wielkość obciążenia jest mnożona przez funkcję rozwiązania). Należy zwrócić uwagę na fakt, że w konstrukcji przestrzennej obciążenie części konstrukcji może wystąpić w postaci siły wewnętrznej z sąsiedniej części konstrukcji, zawierającej stałe całkowania. W takim przypadku, przy zastosowaniu rozwiązania w postaci iloczynu, wystąpi mnożenie stałych całkowania z jednej części konstrukcji przez stałe całkowania sąsiedniej części konstrukcji, uniemożliwiające wstawienie takiego członu do warunków brzegowych składających się z równań liniowych. Postać

Adres do korespondencji – Corresponding author: Roman Misiak, ul. Igańska 20, 04-087
Warszawa, e-mail: roman.misiak@poczta.onet.pl

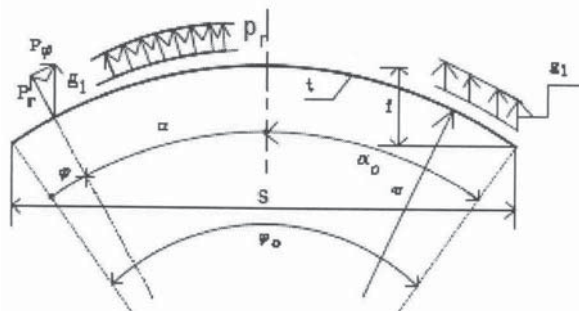
© Copyright by Wydawnictwo SGGW, Warszawa 2016

przedstawionego rozwiązania likwiduje tę niemożliwość. Rozwiązanie może służyć w praktyce inżynierskiej do weryfikacji obliczeń.

Przykładem zastosowania w konstrukcji przestrzennej będzie przemieszczenie (v_l) wzdłuż krzywizny łuku (warunek brzegowy 8-2), które zawiera obciążeniową część członu $v_{(\varphi)}$ w postaci: $\frac{q_r a}{Eb} U_l \varphi$, odseparowaną od pozostałych funkcji zmiennych zawierających stałe całkowania. Obciążenie q_r może być zastąpione obciążeniem zawierającym stałe całkowania z sąsiedniej części konstrukcji przestrzennej (np. brzegową siłą poprzeczną). W identyczny sposób można włączyć współpracę przemieszczeń promieniowych (w_l). Poza tym należy podkreślić, że w niniejszym rozwiązaniu otrzymuje się funkcję przemieszczenia wzdłuż krzywizny łuku (v_l), która na przykład pozwala spełnić warunek przylegania górnej powierzchni łuku do krawędzi wycinka kołowego opartego na tym łuku.

W opracowaniach Flugge [1972, s. 275–280] i Girkmann [1957, s. 549–562] podane są przykłady, w których na krawędziach wycinków znajdują się przepony, a nie łuki. Należy też zwrócić uwagę na rozważania teorii przybliżoną zaburzeń przy przeponach, zwłaszcza „wydłużeń ε_φ ” [Girkmann 1957, s. 559–562], co odpowiada przemieszczeniom (v_l) wzdłuż krzywizny łuku. Przyjęcie łuku zamiast przepony i zastosowanie przedstawionego w niniejszym artykule rozwiązania dla obciążenia g_1 dałoby zamknięty wynik współpracy tych części konstrukcji, a nie wynik zaburzeń.

W niniejszym artykule wyniki z rozwiązań zostały porównane z wynikami otrzymanymi w załączonym piśmiennictwie. Przekrój poprzeczny schematu pasma z dodatnim kierunkiem obciążeń i dodatnimi ich składowymi pokazano na rysunku 1.



Rys. 1. Schemat przekroju

Fig. 1. Schematic cross section of spherical shell strip

RÓWNOWAGA SIŁ I PRZEMIESZCZEŃ

Konstrukcja pod obciążeniem p_r równomiernym na całej długości o kierunku promieniowym (rys. 1)

Pasmo kołowe. Równania równowagi. Siły i momenty są funkcjami przemieszczeń, muszą więc spełniać trzy pierwsze warunki równowagi (5-2) podane przez Flugge [1972,

s. 221]. Z uwagi na fakt, że będzie rozważane nieskończone pasmo powłoki, do układu równań równowagi wprowadzono:

$$n_x = n_{\varphi x} = n_{x\varphi} = m_{x\varphi} = m_{\varphi x} = m_x = 0; \quad p_x = p_\varphi = 0.$$

Do tych warunków równowagi wprowadzono zależności (5-12) [Flügge 1972, s. 228]:

$$\frac{d^2 v_{(\varphi)}}{d\varphi^2} + \frac{dw_{(\varphi)}}{d\varphi} - \frac{2}{12U^2} \frac{d^3 w_{(\varphi)}}{d\varphi^3} = 0 \quad (1-1)$$

$$\frac{1}{12U^2} \frac{d^4 w_{(\varphi)}}{d\varphi^4} + w_{(\varphi)} + \frac{dv_{(\varphi)}}{d\varphi} - \frac{p_r a^2}{D} = 0 \quad (1-2)$$

Z rozwiązania układu (1) można obliczyć:

– przemieszczenia

$$w_{(\varphi)} = \frac{p_r a}{E} W_{(\varphi)} \quad (2-1)$$

$$v_{(\varphi)} = \frac{p_r a}{E} V_{(\varphi)} \quad (2-2)$$

– kąt obrotu przekroju wzdłuż tworzącej

$$X_\varphi = \frac{1}{a} \left(v_{(\varphi)} - \frac{dw_{(\varphi)}}{d\varphi} \right); \quad X_\varphi = \frac{p_r}{E} \chi_{(\varphi)} \quad (2-3)$$

gdzie: $W_{(\varphi)} = 12(1-v^2)U^3 \left[(1-C_5) \left(\frac{\varphi^2}{2} - 1 \right) + C_1\varphi + C_2 + C_3 \cos \varphi + C_4 \sin \varphi \right],$

$$V_{(\varphi)} = (1-v^2)U \left\{ \varphi - 12U^2 \left[C_1 \frac{\varphi^2}{2} + C_2\varphi + (1-C_5) \frac{\varphi^3}{6} - \varphi \right] + C_6 + \right. \\ \left. - (1+12U^2)(C_3 \sin \varphi - C_4 \cos \varphi) \right\},$$

$$\chi_{(\varphi)} = (1-v^2)U \left\{ \varphi - 12U^2 \left[C_1 \left(\frac{\varphi^2}{2} + 1 \right) + C_2\varphi + (1-C_5) \frac{\varphi^3}{6} \right] + C_6 + \right. \\ \left. - C_3 \sin \varphi + C_4 \cos \varphi \right\}$$

C_1-C_6 – stałe całkowania.

Siły wewnętrzne wynoszą [Flugge 1972, s. 228]:

$$n_{\varphi(\xi)} = p_r a N_{\varphi(\xi)} \quad (3-1)$$

$$m_{\varphi(\xi)} = p_r a^2 M_{\varphi(\xi)} \quad (3-2)$$

Z równania równowagi (5-1d) [Flugge 1972, s. 220] otrzymuje się siłę poprzeczną:

$$q_{\varphi(\xi)} = \frac{1}{a} \frac{dm_{\varphi}}{d\varphi} = p_r a Q_{\varphi(\xi)} \quad (3-3)$$

gdzie: $N_{\varphi(\xi)} = 1 - C_3 \cos(\varphi_0 \xi) - C_4 \sin(\varphi_0 \xi)$, $\xi = \frac{\varphi}{\varphi_0}$,

$$M_{\varphi(\xi)} = 1 - C_5 - C_3 \cos(\varphi_0 \xi) - C_4 \sin(\varphi_0 \xi),$$

$$Q_{\varphi(\xi)} = C_3 \sin(\varphi_0 \xi) - C_4 \cos(\varphi_0 \xi).$$

Łuk kołowy. Zależności otrzymano z adaptacji rozwiązania pasma kołowego. Wprowadzono określenie: q_r – obciążenie promieniowe na metr, rozłożone na szerokości przekroju łuku b w ostatnim członie równania (4-2)].

Układ równań równowagi:

$$\frac{d^2 v_l}{d\varphi^2} + \frac{dw_l}{d\varphi} - \frac{1}{12U_l^2} \frac{d^3 w_l}{d\varphi^3} = 0 \quad (4-1)$$

$$\frac{1}{12U_l^2} \frac{d^4 w_l}{d\varphi^4} + w_l + \frac{dv_l}{d\varphi} - \frac{q_r a^2}{Ehb} = 0 \quad (4-2)$$

Z rozwiązania układu (4) wynika:

$$w_l = \frac{q_r a}{Eb} W_l \quad (5-1)$$

$$v_l = \frac{q_r a}{Eb} V_l \quad (5-2)$$

$$X_{\varphi l} = \frac{q_r}{Eb} \chi_{\varphi l} \quad (5-3)$$

Wielkości W_l , V_l i $X_{\varphi l}$ obliczono z zależności (2) po wprowadzeniu $\nu = 0$. Siły wewnętrzne otrzymuje się analogicznie jak w zależności (3).

Konstrukcja pod obciążeniem q_k równomiernym na całej długości, o kierunku prostopadłym do cięciwy, przyłożonym do krzywizny (rys. 3)

Łuk kołowy. Zależności otrzymano z adaptacji wyników dla pasma kołowego. Wprowadzono określenie: q_k – obciążenie na metr.

Układ równań równowagi:

$$\frac{d^2 v_{kg}}{d\varphi^2} + \frac{dw_{kg}}{d\varphi} + \frac{q_{k\varphi} a^2}{Ehb} = 0 \quad (6-1)$$

$$\frac{1}{12U_l^2} \frac{d^4 w_{kg}}{d\varphi^4} + w + \frac{dv_{kg}}{d\varphi} - \frac{q_{kr} a^2}{Ehb} = 0 \quad (6-2)$$

gdzie: $q_{k\varphi} = q_k \frac{dw_{02}}{d\varphi}$,

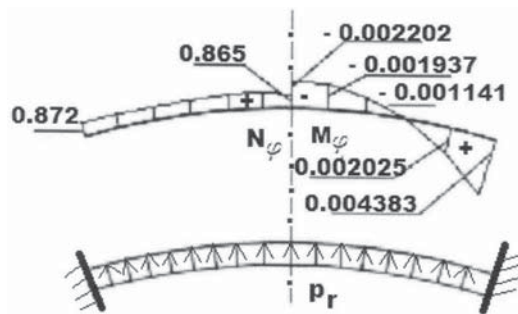
$$q_{kr} = q_k w_{02},$$

$$w_{02} = \sin\alpha_0 \sin(\varphi_0 \cdot \zeta) + \cos\alpha_0 \cos(\varphi_0 \cdot \zeta).$$

Z rozwiązania układu (6), w sposób podobny jak z układu (4), otrzymuje się zależności na przemieszczenia i siły wewnętrzne.

ROZWIĄZANIA SZCZEGÓLNE

Pasma kołowe utwierdzone na podporach pod obciążeniem o kierunku promieniowym (rys. 2)



Rys. 2. Siły wewnętrzne w powłoce utwierdzonej

Fig. 2. Internal forces in the restrained spherical shell

Dane: $\varphi_0 = \frac{2\pi}{10}$; $\alpha_0 = \frac{\varphi_0}{2}$; $\nu = 0,2$; $U = 50$.

Warunki brzegowe:

$$w_{(\varphi=0)} = 0 \quad (7-1)$$

$$w_{(\varphi=\varphi_0)} = 0 \quad (7-2)$$

$$X_{(\varphi=0)} = 0 \quad (7-3)$$

$$X_{(\varphi=0)} = 0 \quad (7-4)$$

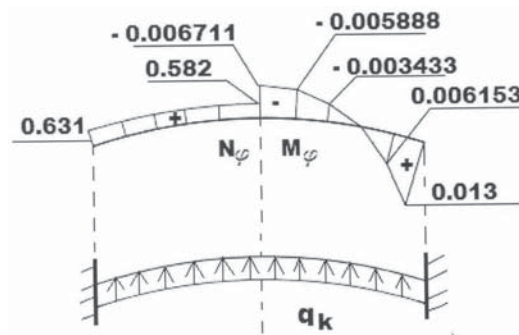
$$v_{(\varphi=0)} = 0 \quad (7-5)$$

$$v_{(\varphi=\varphi_0)} = 0 \quad (7-6)$$

Wyniki rozwiązania równań: $C_1 = 0,042$; $C_2 = 0,004383$; $C_3 = 0,128$; $C_4 = 0,042$; $C_5 = 0,868$; $C_6 = -1247$.

Wartości przemieszczeń i sił wewnętrznych otrzymano z zależności (2) i (3), a na rysunku 2 pokazano wykresy siły normalnej i momentu zginającego.

Łuk kołowy utwierdzony na podporach pod obciążeniem o kierunku prostopadłym do cięciwy, przyłożym do krzywizny (rys. 3)



Rys. 3. Siły wewnętrzne w łuku utwierdzonym

Fig. 3. Internal forces in the restrained arch

Dane: $\varphi_0 = \frac{2\pi}{10}$; $\alpha_0 = \frac{\varphi_0}{2}$; $b = 0,30$ m; $h = 0,90$ m; $a = 21,50$ m; $U_l = \frac{21,50}{0,90}$; $U_l = 23,889$; $\varphi_0 = 36^\circ$.

Warunki brzegowe:

$$w_{(\varphi=0)} = 0 \quad (8-1)$$

$$w_{k(\varphi=\varphi_0)} = 0 \quad (8-2)$$

$$X_{\varphi k(\varphi=0)} = 0 \quad (8-3)$$

$$X_{\varphi k(\varphi=\varphi_0)} = 0 \quad (8-4)$$

$$v_{k(\varphi=0)} = 0 \quad (8-5)$$

$$v_{k(\varphi=\varphi_0)} = 0 \quad (8-6)$$

Wyniki rozwiązania równań: $C_{1k} = -10\ 830$; $C_{2k} = 3404$; $C_{3k} = 13\ 120$; $C_{4k} = -4232$; $C_{5k} = -13\ 030$; $C_{6k} = -4233$.

Na rysunku 3 pokazano wykresy siły normalnej i momentu zginającego.

METODYKA BADAŃ

Badania przeprowadzono w postaci obliczeń przykładów według danych w pracach Nowackiego [1955] i Wierzbickiego [1955], a następnie porównano te wyniki. Poza tym dokonano innych obliczeń, które pozwoliły określić zakres zastosowania przykładów o stosunku promienia do grubości pasma lub wysokości przekroju łuku, w zależności od kąta rozwarcia krzywizny, aby wyniki były zadowalające.

WYNIKI BADAŃ

Pasmo kołowe pod obciążeniem równomiernym o kierunku promieniowym

W pracy Nowackiego [1955, str. 87] znajduje się wzór dla momentu zginającego, zależny od współrzędnych, które zaczynają się w środku krzywizny, a kończą na prawej podporze. Poniżej podano stosunki momentów zginających, sił podłużnych i poprzecznych otrzymanych w niniejszej pracy do otrzymanych w pracy Nowackiego [1955].

$$\frac{M_{\varphi(\xi=0,5)}}{MN_{(\xi=0)}} = \frac{M_{\varphi(\xi=0,6)}}{MN_{(\xi=0,2)}} = \frac{M_{\varphi(\xi=0,7)}}{MN_{(\xi=0,4)}} = \frac{M_{\varphi(\xi=0,8)}}{MN_{(\xi=0,6)}} = \frac{M_{\varphi(\xi=0,9)}}{MN_{(\xi=0,8)}} = \frac{M_{\varphi(\xi=1)}}{MN_{(\xi=1)}} = 1,008;$$

$$\frac{N_{\varphi(\xi=0,5)}}{NN_{(\xi=0)}} = \dots = \frac{N_{\varphi(\xi=1)}}{NN_{(\xi=1)}} = 0,999; \quad \frac{Q_{\varphi(\xi=0,5)}}{QN_{(\xi=0)}} = \dots = \frac{Q_{\varphi(\xi=1)}}{QN_{(\xi=1)}} = 1,008$$

Poza przedstawionym przykładem obliczeniowym dokonano około dwudziestu obliczeń, z których otrzymano, że w zakresach: $\frac{2\pi}{6} \leq \varphi_0 \leq \frac{2\pi}{12}$ i $U \geq 20$, $\varphi_0 = \frac{2\pi}{14}$ i $U \geq 42$ oraz $\varphi_0 = \frac{2\pi}{16}$ i $U \geq 52$ wyniki były równe z wynikami otrzymanymi przez Nowackiego [1955], z dokładnością od 0,943 do 1,079.

Łuk kołowy pod obciążeniem o kierunku prostopadłym do cięciwy, przyłożonym do krzywizny

Łuk utwierdzony na podporach. Wyniki obliczeń porównano z otrzymanymi przez Wierzbickiego [1955, s. 371–372] dla obciążenia równomiernego prostopadłego do cięciwy, lecz nieprzyłożonego do krzywizny o kształcie paraboli. Rozwiązanie Wierzbickiego zawiera wzór momentu utwierdzenia, wzór rozporu i wzór reakcji brzegowej prostopadłej do cięciwy. Przyjmując, że różnica w obciążeniach i kształtach jest mało istotna, otrzymano dokładność stosunków: momentów utwierdzenia (1,012), rozporów (0,973) i reakcji (1,003). Porównanie wyników pozwala wnioskować, że łuk bezprzegubowy o małej wyniosłości (płaski) i o kształcie paraboli może być obliczany jako łuk kołowy.

PODSUMOWANIE

Przedstawiona metoda dostosowania zginania powłok o kształcie walca kołowego do zginania sklepień i łuków kołowych pod obciążeniem ciągłym na całej długości zawiera rozwiązania zamknięte statyki tych konstrukcji, spełniające dowolny układ warunków brzegowych, co oznacza zapewnienie współpracy z dowolną konstrukcją budowlaną o innym kształcie. Rozwiązanie składa się z wzorów ostatecznych, to znaczy występuje w postaci nadającej się do bezpośredniego otrzymania wyników obliczeniowych. Główną zaletą postaci rozwiązania jest zależność od obciążenia odseparowanego od stałych całkowania, których wartości są otrzymywane z warunków brzegowych opisanych w równaniach liniowych. Wyniki obliczeń otrzymane w artykule, porównane z wynikami otrzymanymi w inny sposób przez Nowackiego [1955] i Wierzbickiego [1955], są zadowalająco zbliżone do siebie. Rozwiązanie może być zastosowane we fragmentach zbiorników kołowych (np. silosy), stropach, mostach itp.

PIŚMIENNICTWO

- Flugge, W. (1972). Powłoki. Arkady, Warszawa.
Girkmann, K. (1957). Dźwigary powierzchniowe. Arkady, Warszawa.
Nowacki, W. (1955). Silosy. Budownictwo i architektura, Warszawa.
Wierzbicki, W. (1955). Mechanika budowli. PWN, Warszawa.

CLOSED SOLUTION OF STATICS FOR CIRCULAR SHELL AND CIRCULAR ARCH

Abstract. The article concerns a circular shell band and a circular arch; it includes a closed statics solutions of these structures which meet any system of boundary conditions which means ensuring cooperation with any building structure with a different shape. In the embodiment, the load was applied in the radial direction and in the direction perpendicular to the chord, applied to the curve. The amount of the internal forces complies with the internal and of the radius to the thickness of the band or to the height of the arch section depending on the opening angle of curvature.

Key words: circular band shell, circular arch, statics of circular shell band, statics of circular arch.

Zaakceptowano do druku – Accepted for print: 21.03.2016

Cytowanie: Misiak, R. (2016). Rozwiązanie zamknięte statyki pasma powłoki kołowej i łuku kołowego. *Acta Sci. Pol. Architectura*, 15 (1), 133–140.