

ZASTOSOWANIE ROZKŁADU WARTOŚCI OSOBLIWYCH DO ANALIZY JAKOŚCIOWEJ KRATOWNIC I KONSTRUKCJI TENSEGRITY

Wojciech Gilewski¹, Joanna Kłosowska², Paulina Obara²

¹Politechnika Warszawska, Warszawa

²Politechnika Świętokrzyska, Kielce

Streszczenie. W pracy przedstawiono zastosowanie rozkładu wartości osobliwych (SVD) macierzy wydłużeń do analizy jakościowej kratownic oraz konstrukcji tensegrity. Rozkład taki pozwala na określenie mechanizmów infinytezymalnych oraz stanów samorównoważnych sił podłużnych konstrukcji. Znajomość takich stanów pozwala z kolei określić, czy rozważana kratownica znajduje się w konfiguracji tensegrity. Rozważania teoretyczne zilustrowano na przykładach.

Słowa kluczowe: rozkład wartości osobliwych, kratownica, tensegrity

WSTĘP

Kratownice płaskie i przestrzenne są jednymi z najczęściej wykorzystywanych w budownictwie ustrojów nośnych. Obliczanie przemieszczeń i sił wewnętrznych potrzebnych do projektowania jest rutynowym działaniem inżyniera. Istnieją jednak dziedziny ich zastosowania, które wykraczają poza ramy działań rutynowych. Można tu wymienić rosnące zainteresowanie szczególnym typem kratownic – konstrukcjami tensegrity [Motro 2003, Skelton i de Oliveira 2009], w których dopuszcza się występowanie infinytezymalnych mechanizmów, stabilizowanych przez samorównoważne układy sił podłużnych. Konstrukcje tensegrity mają szczególne cechy, które pozwalają na aktywną kontrolę i sterowanie ich własnościami [Gilewski i Al Sabouni-Zawadzka 2015]. Jednak konfiguracja węzłów i prętów, na ogół przestrzenna, wymaga szczególnej uwagi projektanta i zastosowania niekonwencjonalnych technik obliczeniowych [Motro 2003, Skelton i de Oliveira 2009, Gilewski i Kasprzak 2012]. W niniejszej pracy do oceny jakościowej kra-

Adres do korespondencji – Corresponding author: Wojciech Gilewski, Politechnika Warszawska, Wydział Inżynierii Lądowej, Instytut Inżynierii Budowlanej, al. Armii Ludowej 16, 00-637 Warszawa, e-mail: w.gilewski@il.pw.edu.pl

© Copyright by Wydawnictwo SGGW, Warszawa 2015

townic wykorzystano metodę rozkładu macierzy według wartości osobliwych. Metoda ta pozwala na zidentyfikowanie szczególnych cech kratownic oraz poszukiwanie i ocenę właściwej konfiguracji węzłów i prętów. W pracy przedstawiono istotę rozkładu wartości osobliwych macierzy oraz szczegółowo omówiono ten rozkład na przykładzie macierzy opisującej wydłużenia w kratownicach płaskich i przestrzennych. Podano kilka prostych przykładów wyjaśniających, jakie informacje o konstrukcji można uzyskać z tego rozkładu.

ROZKŁAD WARTOŚCI OSOBLIWYCH MACIERZY

Jednym z rodzajów zastosowania (numerycznych i teoretycznych) macierzy jest jej przedstawienie w postaci iloczynu kilku macierzy o określonych własnościach (por. [Mc Guire i Gallagher 1979, Strang 1993, Leon 1994, Stewart 1998]). Składowymi iloczynów są macierze ortogonalne, diagonalne, trójkątne i inne. Wymienić tu można rozkłady: Jordana, biegunowy, Choleskiego-Banachiewicza, QR, LR [Mc Guire, Gallagher 1979, Strang 1993, Leon 1994, Stewart 1998]. Jednym z takich rozkładów jest rozkład wartości osobliwych (głównych) (*singular value decomposition* – SVD) [Golub i Kahan 1965, Klema 1980, Long 1983, Strang 1993, Stewart 1998]). W rozkładzie tym przedstawia się daną macierz w postaci iloczynu kwadratowej macierzy unitarnej, prostokątnej diagonalnej macierzy o rzeczywistych nieujemnych współczynnikach i sprzężenia hermitowskiego unitarnej macierzy kwadratowej. Współczynniki macierzy diagonalnej nazywa się wartościami osobliwymi lub wartościami głównymi rozkładanej macierzy. Gdy dana macierz ma współczynniki rzeczywiste, to macierze unitarne stają się ortonormalne, a sprzężenie hermitowskie – transpozycją. Rozkład wartości osobliwych znajduje liczne zastosowanie w analizie sygnałów, rozwiązaniach problemów odwrotnych, analizie informacji o charakterze kwantowym, meteorologii [Klema 1980, Stewart 1998] oraz innych dziedzinach matematyki i techniki.

Jedną z możliwości zastosowania rozkładu wartości osobliwych jest analiza kratownicy [Pellegrino i Calladine 1986, Rahami i in. 2013], w której konieczne są informacje, czy konstrukcja jest infinytezymalnie geometrycznie zmienna oraz czy występują w niej stany samorównoważnych sił podłużnych. Informacje takie mogą być wykorzystane na przykład do aktywnej kontroli i sterowania własnościami kratownic i tensegrity [Gilewski i Al Sabouni-Zawadzka 2015].

MACIERZOWE RÓWNANIA MECHANIKI KRATOWNIC I TENSEGRITY

Przedmiotem rozważań w niniejszej pracy będą płaskie i przestrzenne kratownice podparte. Opis mechaniki kratownic można przedstawić w postaci szeregu wektorów oraz równań macierzowych [Pellegrino i Calladine 1986, Gilewski i Kasprzak 2012].

Dla analizowanej kratownicy zdefiniowano trzy wektory niewiadomych:

\mathbf{q} – wektor przemieszczeń kratownicy – długość M

Δ – wektor wydłużeń prętów w kratownicy – długość N ,

\mathbf{S} – wektor sił podłużnych w kratownicy – długość N ,

oraz wektor obciążeń:

\mathbf{P} – wektor obciążeń węzłowych – długość M .

Dodatkowo znajomość stałych materiałowych (E_e), pól przekroju (A_e) i długości prętów (L_e) kratownicy N -elementowej pozwala zdefiniować diagonalną macierz sprężystości:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \frac{E_1 A_1}{L_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{E_2 A_2}{L_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{E_N A_N}{L_N} \end{bmatrix} \quad (1)$$

Relacje pomiędzy powyższymi wielkościami można opisać za pomocą następujących równań:

– związki geometryczne

$$\Delta = \mathbf{B}\mathbf{q} \quad (2)$$

– związki fizyczne

$$\mathbf{S} = \mathbf{E}\Delta \quad (3)$$

– równania równowagi

$$\mathbf{B}^T \mathbf{S} = \mathbf{P} \quad (4)$$

gdzie: \mathbf{B} – macierz wydłużeń prętów w kratownicy, pozwalająca wyrazić wydłużenie prętów przez przemieszczenia ich końców.

Układ równań przemieszczeniowych problemu ma postać:

$$\mathbf{K}_L \mathbf{q} = \mathbf{P} \quad (5)$$

gdzie:

$$\mathbf{K}_L = \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} \quad (6)$$

jest macierzą sztywności liniowej konstrukcji. Z kolei układ równań naprężeniowych najlepiej przedstawić po symetryzacji równań równowagi (4) w postaci:

$$\mathbf{D} \mathbf{S} = \mathbf{B} \mathbf{P} \quad (7)$$

gdzie:

$$\mathbf{D} = \mathbf{B} \mathbf{B}^T \quad (8)$$

Macierz wydłużeń \mathbf{B} można wyznaczyć na podstawie geometrii konstrukcji w sposób bezpośredni, ale w przypadku zadań trójwymiarowych bardziej praktyczne jest wykorzystanie formalizmu metody elementów skończonych [Bathe 1996, Zienkiewicz i Taylor 2000]. Algorytm wyznaczania macierzy \mathbf{B} w ten sposób jest następujący:

1. Określenie współrzędnych końców i początków prętów.
2. Wyznaczenie długości i kosinusów kierunkowych prętów.
3. Wyznaczenie uogólnionych macierzy Boole'a (alokacja i transformacja) prętów $\mathbf{C}_e (e = 1, \dots, N)$ o wymiarach $2 \times M$.
4. Wyznaczenie wydłużeń prętów:

$$\Delta_e = \mathbf{b}_e \mathbf{q}; \mathbf{b}_e = \mathbf{B}_e \mathbf{C}_e; \mathbf{B}_e = [-1 \ 1] \quad (9)$$

5. Wyznaczenie macierzy wydłużeń z macierzy jednowierszowych \mathbf{b}_e :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \dots \\ \mathbf{b}_N \end{bmatrix} \quad (10)$$

Macierz sztywności liniowej \mathbf{K}_L można wyznaczyć na podstawie wzoru (6) lub wykorzystując formalizm MES [Bathe 1996, Zienkiewicz i Taylor 2000] poprzez agregację macierzy sztywności liniowej pojedynczych elementów skończonych:

$$\mathbf{K}_{Le} = \frac{E_e A_e}{L_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{q}_{Le} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

przetransformowanych z opisu lokalnego do globalnego za pomocą uogólnionych macierzy Boole'a:

$$\mathbf{K}_L = \sum_{e=1}^N \mathbf{C}_e^T \mathbf{K}_{Le} \mathbf{C}_e \quad (12)$$

Przedstawiony powyżej opis wystarcza do analizy ilościowej struktur kratowych w zakresie geometrycznie i fizycznie liniowym. Zanim jednak przeprowadzi się taką analizę, konieczna jest jakościowa ocena konstrukcji, która pozwoli określić, czy kratownica jest poprawnie zdefiniowana, czy występują w niej skończone lub nieskończone mechanizmy oraz czy w kratownicy możliwe jest występowanie samorównoważnych układów sił podłużnych. Odpowiedź na te jakościowe pytania jest możliwa na podstawie analizy własności macierzy wydłużeń \mathbf{B} , przez zastosowanie rozkładu tej macierzy według wartości osobliwych (rozkład SVD) [Calladine 1982, Pellegrino 1990, 1993, Rahami i in. 2013]. W literaturze podaje się na ogół rozważania dotyczące układów statycznie wyznaczalnych, gdy macierz \mathbf{B} jest kwadratowa. W niniejszej pracy uporządkowano rozważania teoretyczne i przedstawiono przykłady rozkładów macierzy konstrukcji różnych jakościowo.

Na użytek niniejszej pracy konstrukcję tensegrity należy rozumieć jako kratownicę o szczególnej konfiguracji węzłów i prętów, w której występuje infinitezymalny mechanizm, równoważony przez samorównoważny układ sił podłużnych [Motro 2003, Skeltoni de Oliveira 2009, Gilewski i Kasprzak 2012]. Poszukiwanie formy tensegrity lub weryfikacja, czy rozważana konfiguracja kratownicy jest tensegrity, jest często trudna, zwłaszcza w ustrojach trójwymiarowych. Zastosowany w pracy rozkład SVD może być przydatny do takiej analizy czy oceny.

ROZKŁAD SVD MACIERZY WYDŁUŻEŃ \mathbf{B}

Interesującą możliwością zastosowania rozkładu SVD jest analiza własności kratownicy poprzez analizę macierzy wydłużeń \mathbf{B} , która jest macierzą rzeczywistą o wymiarach $N \times M$. Macierz \mathbf{B} jest kwadratowa, gdy zadanie jest statycznie wyznaczalne. Rozkład SVD dla macierzy wydłużeń ma postać:

$$\mathbf{B} = \mathbf{Y}\mathbf{N}\mathbf{X}^T \quad (13)$$

gdzie macierze \mathbf{Y} (o wymiarach $N \times N$) i \mathbf{X} (o wymiarach $M \times M$) są ortogonalne, a macierz \mathbf{N} (o wymiarach $N \times M$) jest diagonalna (por. np. Stewart [1998] – macierz prostokątna o niezerowych współczynnikach w wierszach i kolumnach o jednakowych numerach). Macierze ortogonalne \mathbf{Y} , \mathbf{X} zbudowane są z wektorów własnych iloczynów macierzy $\mathbf{B}\mathbf{B}^T$ i $\mathbf{B}^T\mathbf{B}$, natomiast macierz \mathbf{N} zawiera pierwiastki kwadratowe wartości własnych ww. iloczynów macierzy.

W celu wyjaśnienia cech rozkładu SVD macierzy wydłużeń \mathbf{B} przedstawione zostaną dwa zadania pomocnicze. Pierwsze z nich dotyczy znalezienia wartości i wektorów własnych pierwszego z rozważanych iloczynów:

$$\left(\mathbf{B}\mathbf{B}^T - \mu \mathbf{I}\right)\mathbf{y} = 0 \quad (14)$$

którego rozwiązanie stanowią pary:

$$\mu_1, \mathbf{y}_1; \mu_2, \mathbf{y}_2; \dots; \mu_N, \mathbf{y}_N \quad (15)$$

Wszystkie rozwiązania zagadnienia (14) można przedstawić w postaci:

$$\mathbf{B}\mathbf{B}^T = \mathbf{Y}\mathbf{M}\mathbf{Y}^T \quad (16)$$

gdzie wartości własne i unormowane wektory własne zgrupowano w macierze:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_N \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\mathbf{Y} = [\mathbf{y}_1 \mathbf{y}_2 \dots \mathbf{y}_N] \quad (18)$$

przy czym:

$$\mathbf{Y}^T \mathbf{Y} = \mathbf{I} \quad (19)$$

Należy zauważyć, że iloczyn $\mathbf{B}\mathbf{B}^T$, występujący w równaniu (16), jest macierzą zsyzymetryzowanych równań równowagi (8). Wartości własne, zgrupowane w macierzy (17), powinny być nieujemne. Ewentualna zerowa wartość własna odpowiada za istnienie niezerowego rozwiązania jednorodnego układu równań równowagi – równanie macierzowe (7) dla $\mathbf{P} = \mathbf{0}$, czyli samorównoważnego układu sił podłużnych. Siły te można znaleźć w wektorze własnym odpowiadającym zerowej wartości własnej.

Drugie zadanie pomocnicze dotyczy znalezienia wartości i wektorów własnych drugiego z rozważanych iloczynów:

$$\left(\mathbf{B}^T \mathbf{B} - \lambda \mathbf{I} \right) \mathbf{x} = 0 \quad (20)$$

którego rozwiązanie stanowią pary:

$$\lambda_1, \mathbf{x}_1; \lambda_2, \mathbf{x}_2; \dots; \lambda_N, \mathbf{x}_N \quad (21)$$

Wszystkie rozwiązania zagadnienia (20) można przedstawić w postaci:

$$\mathbf{B}^T \mathbf{B} = \mathbf{X} \mathbf{L} \mathbf{X}^T \quad (22)$$

gdzie wartości własne i unormowane wektory własne zgrupowano w macierze:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_N \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \dots \ \mathbf{x}_N] \quad (24)$$

przy czym:

$$\mathbf{X}^T \mathbf{X} = \mathbf{I} \quad (25)$$

Należy zauważyć, że iloczyn $\mathbf{B}^T \mathbf{B}$, występujący w równaniu (22), jest równoważny szczególnej postaci macierzy sztywności liniowej (6), przy jednostkowej macierzy sprężystości $\mathbf{E} \equiv \mathbf{I}$. Zawsze można tak dobrać moduły Younga i pola przekroju prętów, aby taka zależność zachodziła. Wartości własne zgrupowane w macierzy (23) powinny być nieujemne. Ewentualna zerowa wartość własna odpowiada za istnienie niezerowego rozwiązania jednorodnego układu równań przemieszczeniowych – równanie macierzowe (5) dla $\mathbf{P} = \mathbf{0}$, czyli za występowanie mechanizmu. Postać takiego mechanizmu można znaleźć w wektorze własnym odpowiadającym zerowej wartości własnej. Mechanizm może być skończony lub nieskończony. Identyfikacja typu mechanizmu wymaga analizy drugiego rzędu, przy wykorzystaniu macierzy sztywności geometrycznej. Aby jednak taką macierz zbudować w konstrukcji, musi istnieć samorównoważny układ sił podłużnych. Brak możliwości istnienia takiego układu oznacza automatycznie identyfikację

mechanizmu jako skończony. Kratownica, w której istnieje infinitezmalny mechanizm równoważony przez samorównoważny układ sił, jest tensegrity.

Na bazie powyższych dwóch zagadnień pomocniczych łatwo udowodnić twierdzenie o rozkładzie SVD macierzy wydłużeń \mathbf{B} . Należy w tym celu założyć, że istnieje rozkład postaci (13), a następnie obliczyć iloczyny $\mathbf{B}\mathbf{B}^T$ i $\mathbf{B}^T\mathbf{B}$, wykorzystując przy tym odpowiednio związki (25) i (19):

$$\mathbf{B}\mathbf{B}^T = \mathbf{Y}\mathbf{N}\mathbf{X}^T\mathbf{X}\mathbf{N}^T\mathbf{Y}^T = \mathbf{Y}\mathbf{N}\mathbf{N}^T\mathbf{Y}^T = \mathbf{Y}\mathbf{M}\mathbf{Y}^T \quad (26)$$

$$\mathbf{B}^T\mathbf{B} = \mathbf{X}\mathbf{N}^T\mathbf{Y}^T\mathbf{Y}\mathbf{N}\mathbf{X}^T = \mathbf{X}\mathbf{N}^T\mathbf{N}\mathbf{X}^T = \mathbf{X}\mathbf{L}\mathbf{X}^T \quad (27)$$

gdzie:

$$\mathbf{M} = \mathbf{N}\mathbf{N}^T \quad (28)$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{N}^T\mathbf{N} \quad (29)$$

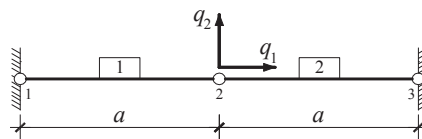
Otrzymane zależności (26) i (27) są identyczne odpowiednio z zależnościami (16) i (22), co należało udowodnić.

PRZYKŁADY OBLICZEŃ

W dalszej części pracy dla sześciu różnych jakościowo kratownic przedstawiono rozkład macierzy wydłużeń \mathbf{B} według wartości osobliwych (SVD), zgodnie z zależnością (13), wyjaśniając tym samym, jakie informacje o konstrukcji można uzyskać z tego rozkładu.

Obliczenia wykonano w środowisku Mathematica, w którym napisano programy obliczeniowe oparte na metodzie elementów skończonych, umożliwiające analizę kratownic płaskich i przestrzennych.

Przykład 1



Rys. 1. Schemat kratownicy dwuprętowej

Fig. 1. The scheme of the two rod truss

W pierwszej kolejności przeprowadzono analizę dla kratownicy dwuprętowej (rys. 1) o dwóch przemieszczeniach $\mathbf{q} = \{q_1 \quad q_2\}$. Wektor sił podłużnych dla tej kratownicy jest dwuelementowy $\mathbf{S} = \{S_1 \quad S_2\}$, a macierz wydłużeń ma postać:

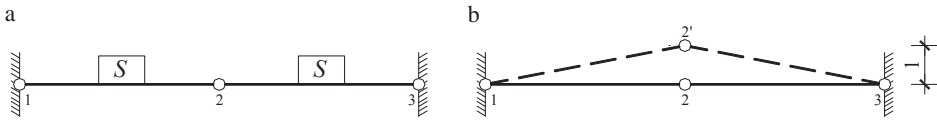
$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (30)$$

Dokonując rozkładu SVD (13) macierzy (30), otrzymano:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (31)$$

Zgodnie ze wzorami (28) i (29), po wykorzystaniu zależności (31)₂, macierze wartości własnych iloczynów $\mathbf{B}\mathbf{B}^T$ i $\mathbf{B}^T\mathbf{B}$ można zapisać w postaci:

$$\mathbf{M} = \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (32)$$



Rys. 2. Stan samonapężenia (a) i mechanizm (b) kratownicy dwuprętowej
Fig. 2. The self-stress state (a) and the mechanism (b) of the two rod truss

Zerowa wartość własna występująca w macierzy \mathbf{M} (32) odpowiada za istnienie samorównoważnego układu sił podłużnych (rys. 2a), określonego przez wektor własny odpowiadający tej wartości:

$$\mu_2 = 0 \Rightarrow \mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} S \\ S \end{bmatrix} \quad (33)$$

gdzie: $S = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Zerowa wartość własna występująca w macierzy \mathbf{L} (32) odpowiada za występowanie mechanizmu (rys. 2b), którego postać określa wektor:

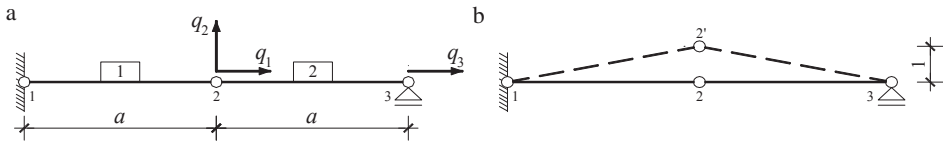
$$\lambda_2 = 0 \Rightarrow \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (34)$$

Wektor (34), z uwagi na istniejący samorównoważny układ sił podłużnych (33), odpowiada mechanizmowi nieskończenie mały.

Rozkład SVD macierzy wydłużeń \mathbf{B} nie umożliwia jednak identyfikacji, czy konstrukcja jest tensegrity – nie daje odpowiedzi na pytanie, czy stan samonapężenia równowagi powstały mechanizm nieskończenie mały. W tym celu należy przeprowadzić analizę drugiego rzędu przy wykorzystaniu macierzy sztywności geometrycznej. Po przeprowadzeniu dla rozważanego przypadku takiej analizy udowodniono, że konstrukcja jest tensegrity

(jest to najprostszy przypadek) i jest zdolna do przenoszenia obciążenia zgodnie z teorią nieliniową geometrycznie.

Przykład 2



Rys. 3. Schemat (a) i mechanizm (b) kratownicy dwuprętowej przesuwnej

Fig. 3. The scheme (a) and the mechanism (b) of the sliding two rod truss

W przykładzie drugim przeprowadzono analizę dla kratownicy dwuprętowej (rys. 3a) o trzech przemieszczeniach $\mathbf{q} = \{q_1 \quad q_2 \quad q_3\}$. Wektor sił podłużnych dla tej kratownicy jest dwuelementowy $\mathbf{S} = \{S_1 \quad S_2\}$, a macierz wydłużeń ma postać:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (35)$$

Dokonując rozkładu SVD (13) macierzy (35), otrzymano:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} -0,525731 & 0,850651 \\ 0,850651 & 0,525731 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1,61803 & 0 & 0 \\ 0 & 0,618034 & 0 \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -0,850651 & 0,525731 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0,525731 & 0,850651 & 0 \end{bmatrix}$$

Zgodnie ze wzorami (28) i (29), po wykorzystaniu zależności (36)₂, macierze wartości własnych iloczynów $\mathbf{B}\mathbf{B}^T$ i $\mathbf{B}^T\mathbf{B}$ zapisano odpowiednio w postaci:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2,61803 & 0 \\ 0 & 0,38197 \end{bmatrix} \quad (37)$$

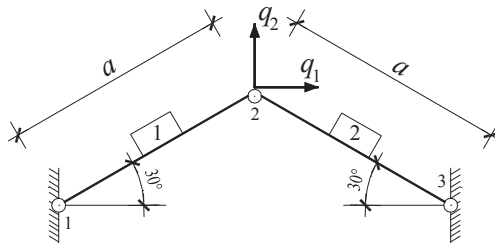
$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 2,61803 & 0 & 0 \\ 0 & 0,38197 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (38)$$

W macierzy (37) nie ma zerowej wartości własnej, co oznacza, że nie istnieje samorównoważny układ sił podłużnych. Zerowa wartość własna, występująca w macierzy (38), odpowiada za występowanie mechanizmu (rys. 3b), którego postać określa wektor:

$$\lambda_3 = 0 \Rightarrow \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (39)$$

Wektor (39), z uwagi na brak samorównoważnego układu sił podłużnych, odpowiada mechanizmowi skończonemu, co oznacza, że kratownica jest błędnie skonstruowana.

Przykład 3



Rys. 4. Schemat kratownicy typu odwrócone V
Fig. 4. The scheme of the upside-down V-type truss

W kolejnym przykładzie przeprowadzono analizę dla kratownicy dwuprętowej typu odwróconego V (rys. 4), o dwóch przemieszczeniach $\mathbf{q} = \{q_1 \quad q_2\}$. Wektor sił podłużnych dla tej kratownicy jest dwuelementowy $\mathbf{S} = \{S_1 \quad S_2\}$, a macierz wydłużeń ma postać:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (40)$$

Dokonując rozkładu SVD (13) macierzy (40), otrzymano:

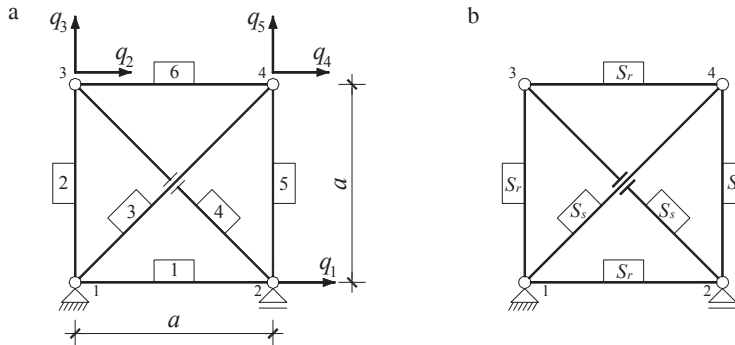
$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (41)$$

Zgodnie ze wzorami (28) i (29), po wykorzystaniu zależności (41)₂, macierze wartości własnych iloczynów $\mathbf{B}\mathbf{B}^T$ i $\mathbf{B}^T\mathbf{B}$ zapisano w postaci:

$$\mathbf{M} = \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix} \quad (42)$$

Brak zerowych wartości własnych w macierzy (42) oznacza, że niemożliwy jest stan samonapężenia i nie ma mechanizmu.

Przykład 4



Rys. 5. Schemat (a) i stan samonapężenia (b) kratownicy typu X
 Fig. 5. The scheme (a) and the self-stress state (b) X type truss

W przykładzie czwartym przeprowadzono analizę dla kratownicy typu X (rys. 5a) o pięciu przemieszczeniach $\mathbf{q} = \{q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5\}$. Wektor sił podłużnych dla tej kratownicy jest sześćoelementowy $\mathbf{S} = \{S_1 \ S_2 \ S_3 \ S_4 \ S_5 \ S_6\}$, a macierz wydłużeń ma postać:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,70711 & 0,70711 \\ 0,70711 & -0,70711 & 0,70711 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (43)$$

Dokonując rozkładu SVD (13) macierzy (43), otrzymano:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 0,21332 & -0,353553 & 0,245509 & -0,707107 & -0,379763 & 0,353553 \\ 0,21332 & -0,353553 & 0,245509 & 0,707107 & -0,379763 & 0,353553 \\ 0,30168 & 0,5 & 0,347202 & 0 & -0,537066 & -0,5 \\ 0,569942 & -0,5 & 0,123401 & 0 & 0,399923 & -0,5 \\ 0,112914 & 0,353553 & 0,690766 & 0 & 0,509992 & 0,353553 \\ 0,693106 & 0,353553 & -0,516251 & 0 & 0,0555842 & 0,353553 \end{bmatrix} \quad (44)_1$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1,69977 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,41421 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,16422 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,505327 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (44)_2$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0,362595 & -0,5 & 0,285828 & -0,707107 & -0,191905 \\ -0,64486 & 0 & 0,36848 & 0 & -0,669611 \\ 0,362595 & -0,5 & 0,285828 & 0,707107 & -0,191905 \\ 0,533263 & 0,5 & -0,232551 & 0 & -0,641522 \\ 0,191928 & 0,5 & 0,804206 & 0 & 0,257713 \end{bmatrix} \quad (44)_3$$

Zgodnie ze wzorami (28) i (29), po wykorzystaniu zależności (44)₂, macierze wartości własnych iloczynów $\mathbf{B}\mathbf{B}^T$ i $\mathbf{B}^T\mathbf{B}$ zapisano odpowiednio w postaci:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2,88923 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,35542 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,25535 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (45)$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 2,88923 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,35542 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,25535 \end{bmatrix} \quad (46)$$

Zerowa wartość własna, występująca w macierzy (45), odpowiada za istnienie samorównowaznego układu sił podłużnych (rys. 5b), określonego przez wektor własny odpowiadający tej wartości:

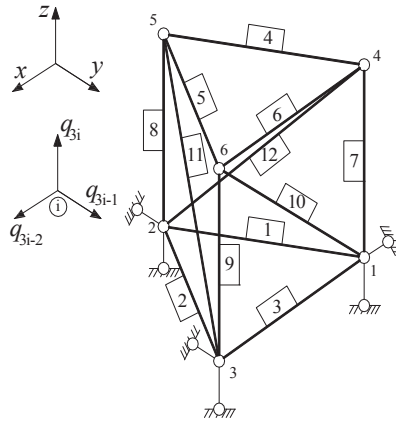
$$\mu_6 = 0 \Rightarrow \mathbf{y}_6 = \{S_r \quad S_r \quad S_s \quad S_s \quad S_r \quad S_r\} \quad (47)$$

gdzie: $S_r = 0,353553$; $S_s = -0,5$

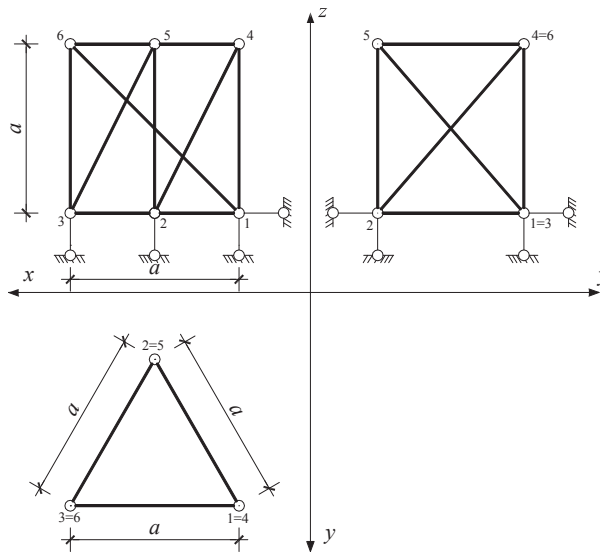
W macierzy (46) nie ma zerowej wartości własnej, co oznacza, że nie istnieje mechanizm.

W analizowanym przykładzie występuje samorównoważny układ sił podłużnych, ale nie występuje mechanizm, co oznacza, że konstrukcja nie jest tensegrity.

Przykład 5



Rys. 6. Schemat kratownicy 3D typu N w aksonometrii
 Fig. 6. The 3D scheme of the N type truss in axonometry



Rys. 7. Widok kratownicy 3D typu N w rzutach Monge'a
 Fig. 7. The view of the 3D N type truss in Monge's views

W przykładzie piątym przeprowadzono analizę dla kratownicy przestrzennej (rys. 6, 7). Wektory niezerowych przemieszczeń kratownicy oraz sił podłużnych mają od-

powiednio postać: $\mathbf{q} = \{q_2 \ q_4 \ q_7 \ q_{10} \ q_{11} \ q_{12} \ q_{13} \ q_{14} \ q_{15} \ q_{16} \ q_{17} \ q_{18}\}$
 oraz $\mathbf{S} = \{S_1 \ S_2 \ S_3 \ S_4 \ S_5 \ S_6 \ S_7 \ S_8 \ S_9 \ S_{10} \ S_{11} \ S_{12}\}$.

Macierz wydłużeń \mathbf{B} jest macierzą kwadratową o wymiarach 12×12 . W pracy podano składowe diagonalnej macierzy \mathbf{N} (o wymiarach 12×12), która zawiera pierwiastki kwadratowe wartości własnych iloczynów macierzy $\mathbf{B}\mathbf{B}^T$ i $\mathbf{B}^T\mathbf{B}$:

$$\mathbf{N} = \text{diag}\{1,87 \ 1,49 \ 1,46 \ 1,22 \ 1,18 \ 1,13 \ 1,10 \ 1,00 \ 0,48 \ 0,37 \ 0,33 \ 0,23\} \quad (48)$$

W macierzy (48) nie ma zerowej wartości własnej, co oznacza, że dla analizowanego przypadku niemożliwy jest stan samonapężenia oraz nie ma mechanizmu.

Przykład 6

Jako ostatni rozpatrzono przypadek kratownicy przestrzennej z przykładu 5, w której górny trójkąt jest obrocony względem dolnego o kąt 150 stopni (rys. 8, 9) – jest to przykład konstrukcji tensegrity Simplex. Wektory niezerowych przemieszczeń kratownicy oraz sił podłużnych są takie same jak w przykładzie poprzednim, ale macierz \mathbf{N} ma postać:

$$\mathbf{N} = \text{diag}\{1,95 \ 1,59 \ 1,52 \ 1,33 \ 1,23 \ 1,13 \ 1,04 \ 0,93 \ 0,45 \ 0,32 \ 0,25 \ 0\} \quad (49)$$

Zgodnie ze wzorami (28) i (29), po wykorzystaniu zależności (49), macierze wartości własnych iloczynów $\mathbf{B}\mathbf{B}^T$ i $\mathbf{B}^T\mathbf{B}$, tj. \mathbf{M} i \mathbf{L} , są takie same i zawierają jedną zerową wartość własną. Zerowa wartość własna $\mu_{12} = 0$ odpowiada za istnienie samorównowaznego układu sił podłużnych (rys. 10), określonego przez wektor własny odpowiadający tej wartości:

$$\mathbf{y}_{12} = \{S_{r1} \ S_{r1} \ S_{r1} \ S_{r1} \ S_{r1} \ S_{r1} \ S_s \ S_s \ S_s \ S_{r2} \ S_{r2} \ S_{r2}\} \quad (50)$$

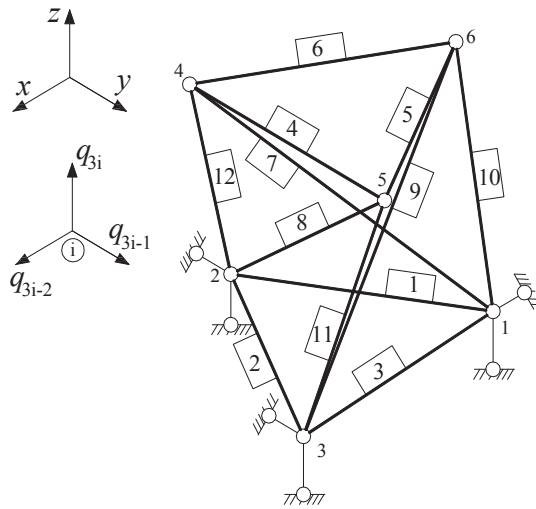
gdzie: $S_{r1} = 0,17$, $S_{r2} = 0,3$, $S_s = -0,43$,

natomiast zerowa wartość własna λ_{12} odpowiada za występowanie mechanizmu (rys. 11), którego postać określa wektor:

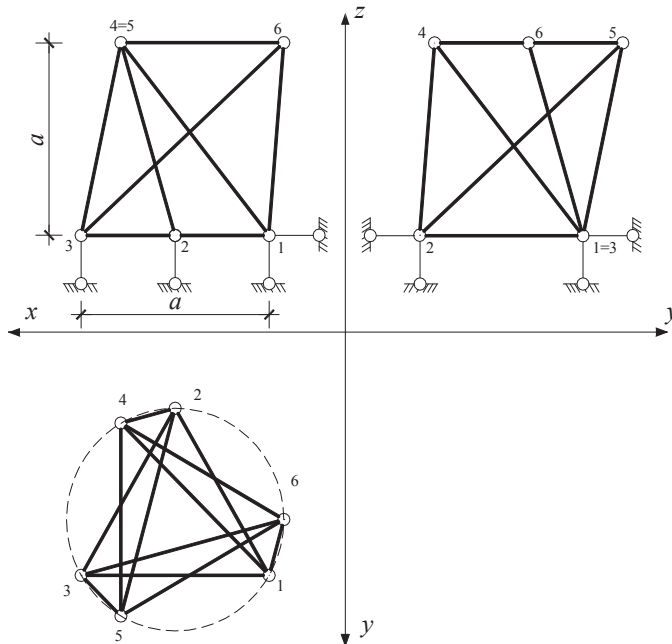
$$\mathbf{x}_{12} = \{0 \ 0 \ 0 \ -0,48 \ -0,28 \ 0,16 \ 0,48 \ -0,28 \ 0,16 \ 0 \ 0,55 \ 0,16\} \quad (51)$$

Wektor (51), z uwagi na istniejący samorównowazny układ sił podłużnych (50), odpowiada mechanizmowi nieskończenie małowartościowemu.

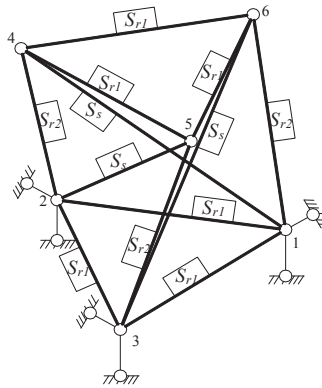
Po przeprowadzeniu dla rozważanego przypadku analizy drugiego rzędu udowodniono, że konstrukcja jest tensegrity i jest zdolna do przenoszenia obciążenia zgodnie z teorią nieliniową geometrycznie.



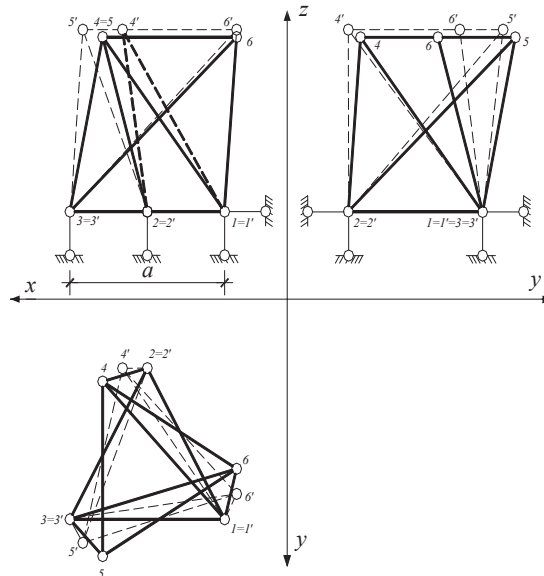
Rys. 8. Schemat tensegrity typu Simplex w aksonometrii
 Fig. 8. The scheme of the Simplex type truss in axonometry



Rys. 9. Widok tensegrity typu Simplex w rzutach Monge'a
 Fig. 9. The view of the Simplex type truss in Monge's views



Rys. 10. Stan samonapężenia tensegrity typu Simplex
 Fig. 10. The tensegrity self-stress state of the Simplex type truss



Rys. 11. Widok mechanizmu tensegrity typu Simplex w rzutach Monge'a
 Fig. 11. The view of the tensegrity mechanism of the Simplex type truss in Monge's views

WNIOSKI

W pracy omówiono zastosowanie rozkładu wartości osobliwych do analizy jakościowej kratownic, w tym struktur tensegrity. Przeprowadzona analiza pozwala na wyciągnięcie następujących wniosków:

1. Do analizy jakościowej własności kratownicy, w tym konfiguracji węzłów i prętów, wystarczy znajomość macierzy wydłużeń prętów \mathbf{B} , a zatem opis jedynie geometryczny – nie jest konieczna znajomość przekrojów prętów i ich własności materiałowych.

2. Rozkład wartości osobliwych pozwala na zidentyfikowanie mechanizmu geometrycznej zmienności kratownicy i zaliczenie go do skończonych lub infinitezymalnych.
 3. Rozkład wartości osobliwych pozwala na określenie samorównoważnych układów sił podłużnych w kratownicach, jeśli takie występują.
 4. Rozkład wartości osobliwych pozwala, wraz z zastosowaniem teorii drugiego rzędu, na stwierdzenie, czy kratownica jest tensegrity.
 5. Rozkład wartości osobliwych pozwala na stwierdzenie, czy kratownica nie jest tensegrity.
- Rozważania przedstawione w pracy można wykorzystać do analizy kratownic płaskich i przestrzennych, gdzie podejście intuicyjne jest często zawodne.

PIŚMIENNICTWO

- Bathe, K.J. (1996). *Finite element procedures in engineering analysis*. Prentice Hall, New York.
- Calladine, C.R. (1982). Modal stiffnesses of a pretensioned cable net. *International Journal of Solids and Structures*, 18, 10, 829–846.
- Gilewski, W., Al Sabouni-Zawadzka, A. (2015). On possible applications of smart structures controlled by self-stress. *Archives of Civil and Mechanical Engineering*, 15, 2, 469–478.
- Gilewski, W., Kasprzak, A. (2012). Wstęp do mechaniki modułów tensegrity. W: *Teoretyczne podstawy budownictwa*. T. 1. *Mechanika materiałów i konstrukcji*. Red. S. Jemioło, Sz. Lutomirski, OWPW, Warszawa, 83–94.
- Golub, G., Kahan, W. (1965). Calculating the singular values and pseudo-inverse of a matrix. *SIAM Journal Numerical Analysis*, B, 2, 2, 2015–2024.
- Klema, V.C. (1980). The singular value decomposition: it's computation and some applications. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-25, 2, 164–176.
- Leon, S.J. (1994). *Linear algebra with applications*. Macmillan, New York.
- Long, C. (1983). Visualization of matrix singular value decomposition. *Mathematics Magazine*, 56, 3, 161–167.
- Mc Guire, W., Gallagher, R.H. (1979). *Matrix structural analysis*. Wiley, New York.
- Motro, R. (2003). *Tensegrity. Structural systems for the future*. Kogan Page, London-Sterling.
- Pellegrino, S. (1990). Analysis of prestressed mechanisms. *International Journal of Solids and Structures*, 26, 12, 1329–1350.
- Pellegrino, S. (1993). Structural computations with the singular value decomposition of the equilibrium matrix. *International Journal of Solids and Structures*, 30, 21, 3025–3035.
- Pellegrino, S., Calladine, C.R. (1986). Matrix analysis of statically and kinematically indeterminate frameworks. *International Journal of Solids and Structures*, 22, 4, 409–428.
- Rahami, H., Kaveh, A., Ardalan Asl, M., Mirghaderi, S.R. (2013). Analysis of near-regular structures with node irregularity using SVD of equilibrium matrix. *International Journal of Civil Engineering*, 11, 4, 226–239.
- Skelton, R.E., de Oliveira, M.C. (2009). *Tensegrity systems*. Springer, London.
- Stewart, G.W. (1998). *Matrix algorithms: basic decompositions*. SIAM, Philadelphia.
- Strang, G. (1993). *Introduction to linear algebra*. Wellesley-Cambridge Press.
- Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. (2000). *The finite element method*. Vol. 1. *The basis*. Butterworth-Heinemann, New Jersey.

APPLICATION OF SINGULAR VALUE DECOMPOSITION FOR QUALITATIVE ANALYSIS OF TRUSS AND TENSEGRITY STRUCTURES

Abstract. The present paper is dedicated to the application of singular value decomposition (SVD) of extension matrix to the qualitative analysis of truss and tensegrity structures. The decomposition allow to define infinitesimal mechanisms as well as self-stress states of the truss. It can help to recognize if the truss is in tensegrity configuration. Theoretical considerations are illustrated on several examples.

Key words: singular value decomposition, truss, tensegrity

Uwaga! Recenzja artykułu wraz z odpowiedzią autorów znajduje się w Redakcji do wglądu zainteresowanych.

Zaakceptowano do druku – Accepted for print: 28.09.2015

Cytowanie: Gilewski, W., Kłosowska, J., Obara, P. (2015). Zastosowanie rozkładu wartości osobliwych do analizy jakościowej kratownic i konstrukcji tensegrity. *Acta Sci. Pol., Architectura*, 14 (3), 3–20.