

STATECZNOŚĆ OSIOWO ŚCISKANYCH CYLINDRYCZNYCH, ANIZOTROPOWYCH POWŁOK O ŚREDNIEJ GRUBOŚCI

Wołodymyr Tracz, Mikołaj Chorużyj

Narodowy Uniwersytet Gospodarki Wodnej i Gospodarowania
Zasobami Naturalnymi, Równe, Ukraina

Streszczenie. Korzystając z założeń kinematycznych Timoshenki, przedstawiono zagadnienie obliczania stateczności anizotropowych powłok cylindrycznych przy uwzględnieniu geometrycznej nieliniowości. Powłoka jest zbudowana z warstwowego materiału kompozytowego o jednej płaszczyźnie, która pokrywa się z jej powierzchnią środkową. Analizę numeryczną otrzymanych równań przeprowadzono metodą ortogonalizacji dyskretnej. Zbadano wpływ kąta nachylenia włókien warstwowego kompozytu włóknistego na wartości krytyczne.

Słowa kluczowe: teoria Timoshenki, stateczność powłoki, anizotropia

WSTĘP

Obliczaniu stateczności powłok z materiałów izotropowych i ortotropowych jest poświęcona obszerna literatura: Вольмир [1967], Амбарцумян [1974], Рикардс і Тетерс [1974], Кармишин і in. [1975], Гузь [1986], Ванін і Семенюк [1987]. Do powłok ortotropowych zalicza się powłoki wykonane z kompozytów włóknistych, nawiniętych na trzpień [Корольов 1965, Микишева 1968, Гузь 1986]. Materiał takich konstrukcji, którego włókna są ortogonalne (rys. 1), jest materiałem anizotropowym o jednej płaszczyźnie symetrii. Powodem powstania tego typu anizotropii jest niezgodność kierunków ortogonalnych włókien z głównymi kierunkami geometrycznymi konstrukcji. Równania konstytutywne takich konstrukcji zawierają 13 modułów sprężystości. Macierz sprężystości zawiera więc następujących bloki sztywności: C – rozciąganie i ścinanie, D – zginanie

Adres do korespondencji – Corresponding author: Wołodymyr Tracz, Narodowy Uniwersytet Gospodarki Wodnej i Gospodarowania Zasobami Naturalnymi, Edukacyjny Instytut Budownictwa i Architektury, Katedra Mostów i Tuneli, Wytrzymałości Materiałów i Mechaniki Budowli, ul. Soborna 11, 33018 Równe, Ukraina, e-mail: trach-vm@ukr.net

i skręcanie, K – wzajemnego wpływu. Współzależność we wzorach teorii sprężystości między rozciąganiem a ścinaniem, zginaniem a skręcaniem, rozciąganiem a skręcaniem postrzega się jako czynnik znacznie zmniejszający obciążenia krytyczne. Zostało to udowodnione przez różnych autorów [Weaver i in. 2002, Wong i Weaver 2005, Семенюк i in. 2005, Трач 2006, 2007, 2008, Семенюк i Трач 2006, Weaver 2015, Kolakowski i Teter 2015].

Kwestia stateczności cienkich powłok anizotropowych była analizowana przez wielu badaczy, między innymi w pracach: Корольов [1965], Кармишин i in. [1975], Гузь [1986], Григоренко i Крюков [1988], Баженов i in. [2010]. Jednak wciąż jeszcze obliczanie stateczności powłok anizotropowych o średniej grubości stwarza wiele problemów. Wiadomo, że do obliczania takich konstrukcji należy stosować uogólnione teorie (o osłabionych założeniach kinematycznych) [Ванин i Семенюк 1987, Castro i in. 2015, Kolakowski i Teter 2015, Muc i Pastuszko 2015, Reddy 2015, Tracz i in. 2015, Weaver 2015], z których najprostszą i powszechnie stosowaną jest teoria bazująca na założeniach kinematycznych Timoshenki.

W pracy przedstawiono badania stateczności osiowo ściskanych anizotropowych cylindrycznych powłok o średniej grubości, z materiału sprężystego, o jednej płaszczyźnie symetrii.

MATEMATYCZNE MODELOWANIE STATECZNOŚCI POWŁOK ANIZOTROPOWYCH

Przemieszczenia u , v , w po grubości powłoki, zgodnie z hipotezą Timoshenki, zapisało w następujący sposób:

$$u = u + z\theta_1, \quad v = v + z\theta_2, \quad w = w \quad (1)$$

$$u_\alpha = u_{0\alpha} + z\theta_\alpha, \quad u_3 = w, \quad u_1 = u + z\theta_1, \quad v_2 = v + z\theta_2, \quad w_1 = w$$

gdzie: u , v , w – przemieszczenia środkowej powierzchni powłoki,

z – współrzędna zmieniająca się na grubości powłoki,

θ_α ($\alpha = 1, 2$) – kąty obrotu normalnych względem osi współrzędnych.

Zależności prawa Hooke'a dla materiału anizotropowego o jednej płaszczyźnie symetrii zapisało w postaci przedstawionej przez Амбарцумяна [1974]:

$$\sigma_{11} = a_{11}\varepsilon_{11} + a_{12}\varepsilon_{22} + a_{13}\varepsilon_{33} + a_{16}\varepsilon_{12}, \quad \sigma_{22} = a_{12}\varepsilon_{11} + a_{22}\varepsilon_{22} + a_{23}\varepsilon_{33} + a_{26}\varepsilon_{12} \quad (2)$$

$$\sigma_{33} = a_{13}\varepsilon_{11} + a_{23}\varepsilon_{22} + a_{33}\varepsilon_{33} + a_{36}\varepsilon_{12}, \quad \sigma_{23} = a_{44}\varepsilon_{23} + a_{45}\varepsilon_{13} \quad (3)$$

$$\sigma_{13} = a_{45}\varepsilon_{23} + a_{55}\varepsilon_{13}, \quad \sigma_{12} = a_{16}\varepsilon_{11} + a_{26}\varepsilon_{22} + a_{36}\varepsilon_{33} + a_{66}\varepsilon_{12} \quad (4)$$

gdzie: σ_{ij} – naprężenia normalne i styczne,

ε_{ij} – odkształcenia rozciągające i ścinające ($i, j = 1, 2, 3$),

a_{ij} – stałe sprężystości ($i = 1, 2, 3; j = \overline{1, 6}$).

Nieliniowe odkształcenia, z dokładnością do członów w drugiej potęgce, otrzymali Ванин i Семенюк [1987] w postaci:

$$\varepsilon_{11} = \hat{\varepsilon}_{11} + z\kappa_{11} + z^2\nu_{11}, \quad \varepsilon_{22} = \hat{\varepsilon}_{22} + z\kappa_{22} + z^2\nu_{22}, \quad \varepsilon_{12} = \hat{\varepsilon}_{12} + z\kappa_{12} + z^2\nu_{12} \quad (5)$$

w której oznaczono:

$$\begin{aligned}\hat{\varepsilon}_{11} &= \varepsilon_1 + \frac{1}{2}\theta_1^2, \quad \hat{\varepsilon}_{22} = \varepsilon_2 + \frac{1}{2}\theta_2^2, \quad \hat{\varepsilon}_{12} = \theta_1\theta_2 \\ \kappa_{11} &= \chi_1 + \varepsilon_1\chi_1, \quad \kappa_{22} = \chi_2 + \varepsilon_2\chi_2, \quad \kappa_{12} = \tau_1^* + \tau_2^* \\ v_{11} &= \frac{1}{R_1}\kappa_{11} + \frac{1}{2}(\chi_1^2 + \tau_1^2), \quad v_{22} = \frac{1}{R_2}\kappa_{22} + \frac{1}{2}(\chi_2^2 + \tau_2^2) \\ v_{12} &= \frac{1}{R_1}\tau_1^* + \frac{1}{R_1}\tau_2^* + \chi_1\tau_2\end{aligned}\quad (6)$$

gdzie: $\chi_1 = \kappa_1 + \frac{\varepsilon_1}{R_1}$, $\chi_2 = \kappa_2 + \frac{\varepsilon_2}{R_2}$,

$$\tau_1 = t_1, \quad \tau_2 = t_2, \quad \tau_1^* = \tau_1 + \varepsilon_2\tau_1, \quad \tau_2^* = \tau_2 + \varepsilon_1\tau_2 \quad (7)$$

Odształcenia oraz przyrosty krzywizn i skręcania są następujące:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} = \varepsilon_1 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial u}{\partial \alpha_1} + a_1 v - \frac{w}{R_1}, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_2 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial v}{\partial \alpha_2} + a_2 v - \frac{w}{R_2}, \quad \varepsilon_{12} = \theta_1' + \theta_2', \\ \kappa_{11} = \kappa_1 + \frac{\varepsilon_1}{R_1}, \quad \kappa_1 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial \theta_1'}{\partial \alpha_1} + a_1 \theta_1' - \frac{\theta_2'}{R_1}, \quad \kappa_{22} = \kappa_2 + \frac{\varepsilon_2}{R_2}, \\ \kappa_2 &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial \theta_2'}{\partial \alpha_2} + a_2 \theta_2' - \frac{\theta_1'}{R_2}, \quad \kappa_{12} = t_1 + t_2, \quad t_1 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha_1} - a_1 \theta_1, \quad t_2 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial \theta_2}{\partial \alpha_2} - a_2 \theta_2, \\ v_{11} &= \frac{1}{R_1} \kappa_{11}, \quad v_{22} = \frac{1}{R_2} \kappa_{22}, \quad v_{12} = \frac{1}{R_1} \tau_1 + \frac{1}{R_2} \tau_2\end{aligned}\quad (8)$$

gdzie: A_1, A_2 – współczynniki Lamégo (współczynniki pierwszej formy kwadratowej),

$$a_1 = \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}, \quad a_2 = \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}.$$

Kąty obrotu i krzywizny κ_{ij} zapisano w postaci:

$$\theta_1' = \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} + \frac{u}{R_1}, \quad \theta_2' = \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} + \frac{u}{R_2} \quad (9)$$

$$\kappa_{11} = \kappa_1 + \frac{1}{R_1} \varepsilon_{11}, \quad \kappa_{22} = \kappa_2 + \frac{1}{R_2} \varepsilon_{22}, \quad \kappa_{12} = 2\tau + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \varepsilon_{12} \quad (10)$$

przy czym we wzorze na skręcanie κ_{12} są funkcje dla τ i v_{ij} :

$$t_1 = t_2 = \tau, \quad v_{11} = \frac{1}{R_1} \kappa_{11}, \quad v_{22} = \frac{1}{R_2} \kappa_{22}, \quad v_{12} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \tau \quad (11)$$

W pracy Tracz [2008] przedstawiono podejście, w którym wyjściowy układ równań opisuje osiowosymetryczny anizotropowy nieliniowy stan naprężenia-odkształcenia powłok. Korzystając z tego podejścia, otrzymano równania:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{A_1} \frac{\partial u}{\partial \alpha_1} &= b_{11}T_{11} + b_{12}T_{12} + b_{13}M_{11} + b_{14}M_{12} + b'_{11} \frac{u}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - \\
 &\quad - b'_{11} \frac{w}{R_2} - b''_{11} \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \theta_1 - \frac{v}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + \frac{w}{R_2} + \frac{1}{2} \theta_2^2 \\
 \frac{1}{A_1} \frac{\partial v}{\partial \alpha_1} &= b_{21}T_{11} + b_{22}T_{12} + b_{23}M_{11} + b_{24}M_{12} + b'_{21} \frac{u}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - \\
 &\quad - b'_{21} \frac{w}{R_2} - b''_{21} \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \theta_1 + \frac{v}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{2} \theta_2^2 \\
 \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} &= b_{55}Q_{13} + b'_{55}Q_{23} - \frac{u}{R_1} - \theta_1 \\
 \frac{1}{A_1} \frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha_1} &= b_{31}T_{11} + b_{32}T_{12} + b_{33}M_{11} + b_{34}M_{12} + b'_{31} \frac{u}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - \\
 &\quad - b'_{31} \frac{w}{R_2} - b''_{31} \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \theta_1 + \frac{1}{2} \theta_2^2 \\
 \frac{1}{A_1} \frac{\partial \theta_2}{\partial \alpha_1} &= b_{41}T_{11} + b_{42}T_{12} + b_{43}M_{11} + b_{44}M_{12} + b'_{41} \frac{u}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - \\
 &\quad - b'_{41} \frac{w}{R_2} - b''_{41} \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \theta_1 + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \theta_2 + \frac{1}{2} \theta_2^2 \\
 \frac{1}{A_1} \frac{\partial T_{11}}{\partial \alpha_1} &= -\frac{1}{A_2} \frac{\partial T_{12}^*}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} T_{22} - \frac{1}{R_1} Q_{13} - q_1 \\
 \frac{1}{A_1} \frac{\partial T_{12}^*}{\partial \alpha_1} &= \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} T_{12}^* - \frac{1}{R_2} Q_{23} \\
 \frac{1}{A_1} \frac{\partial Q_{13}}{\partial \alpha_1} &= -\frac{1}{R_1} T_{11} - \frac{1}{R_2} T_{22} - q_3 \\
 \frac{1}{A_1} \frac{\partial M_{11}}{\partial \alpha_1} &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial M_{12}^*}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} M_{22} + Q_{13} + T_{11} \theta_1 \\
 \frac{1}{A_1} \frac{\partial M_{12}^*}{\partial \alpha_1} &= \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} M_{12}^* - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} M_{11} - Q_{23} + T_{22} \theta_2
 \end{aligned} \tag{12}$$

Nieliniowy układ równań (12) może być wykorzystany do budowy równań, w których określone krytyczne stany powłok wiążą się ze zjawiskiem bifurkacji. Wprowadzając następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned} y_1 = u, \quad y_2 = v, \quad y_3 = w, \quad y_4 = \theta_1, \quad y_5 = \theta_2, \\ y_6 = T_{11}, \quad y_7 = T_{12}^*, \quad y_8 = Q_{13}, \quad y_9 = M_{11}, \quad y_{10} = M_{12}^* \end{aligned} \quad (13)$$

układ równań (12) otrzymano w zwartej postaci:

$$\frac{1}{A_1} \frac{\partial y_i}{\partial \alpha_1} = L_i(y) + q_i \quad (14)$$

gdzie: y – wektor, którego składowymi są funkcje y_i ,

q_i – składowe obciążenia,

L_i – nieliniowe operatory różniczkowe, przy czym $i = 1, \dots, 10$.

Na głównej trajektorii odkształcenia równania (14) przyjmują postać:

$$\frac{1}{A_1} \frac{\partial y_{i,o}}{\partial \alpha_1} = L_i(y_o) + q_i \quad (15)$$

Na sąsiedniej trajektorii muszą być zapisane następująco:

$$\frac{1}{A_1} \frac{\partial (y_{i,o} + y_i)}{\partial \alpha_1} = L_i(y_o + y) + q_i \quad (16)$$

Zgodnie z kryterium Eulera, y_i jest nieskończenie małym zaburzeniem stanu podstawowego. Dlatego też, używając pojęcia pochodnej Fréchet'a, należy stwierdzić, że rozwinięcie w szereg Taylora może ograniczać się tylko do dwóch składników:

$$L_i(y_o + y) = L_i(y_o) + L_{i,j}(y_o)y \quad (17)$$

gdzie: $L_{i,j}$ – pochodne Fréchet'a operatorów L_i dla argumentu y_j ($j = 1, \dots, 10$).

Równanie (16) przybiera postać:

$$\frac{1}{A_1} \frac{\partial y_{i,o}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial y_i}{\partial \alpha_1} = L_i(y_o) + L_{i,j}(y_o)y + q_i \quad (18)$$

Biorąc pod uwagę, że obciążenia q_i nie ulegają zmianie (obciążenie konserwatywne) przy zaburzeniu stanu równowagi, a funkcje z indeksem „0” spełniają równania (15), z wyrażenia (18) otrzymano zlinearyzowane równania względnych przyrostów funkcji $y_i(q_i)$ w punkcie bifurkacji:

$$\frac{1}{A_1} \frac{\partial y_i}{\partial \alpha_1} = L_{i,j}(y_o)y \quad (19)$$

których jawną postać zapisano następująco:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{A_1} \frac{\partial y_1}{\partial \alpha_1} &= -\frac{1}{A_2} \frac{\partial T_{21}^*}{\partial \alpha_2} - a_1(y_2 + T_{21}^*) - a_2(y_1 - T_{21}^*) + \frac{1}{R_1} y_3 \\
\frac{1}{A_1} \frac{\partial y_2}{\partial \alpha_1} &= -\frac{1}{A_2} \frac{\partial T_{22}^*}{\partial \alpha_2} - a_2(y_2 + T_{21}^*) + a_1(y_1 - T_{22}^*) + \frac{1}{R_2} Q_{23}^* \\
\frac{1}{A_1} \frac{\partial y_3}{\partial \alpha_1} &= -\frac{1}{A_2} \frac{\partial Q_{23}^*}{\partial \alpha_2} - a_2 y_3 - a_1 Q_{23}^* - \frac{1}{R_1} y_1 - \frac{1}{R_2} T_{22}^* \\
\frac{1}{A_1} \frac{\partial y_4}{\partial \alpha_1} &= -\frac{1}{A_2} \frac{\partial M_{12}}{\partial \alpha_2} - 2a_1 M_{12} - a_2(y_4 - M_{22}) Q_{13} \\
\frac{1}{A_1} \frac{\partial y_5}{\partial \alpha_1} &= -a_1 y_{12} + \frac{1}{R_1} y_7 - \varepsilon_1 \varepsilon_{1,0} - \theta_1 \theta_1^0 + A_{11} T_{11} + A_{12} T_{12} + A_{13} y_4 + \\
&\quad + d_{11} \varepsilon_{22} + d_{12} \kappa_{22} + d_{13} \kappa_{12} \tag{20} \\
\frac{1}{A_1} \frac{\partial y_6}{\partial \alpha_1} &= a_1 y_5 - \theta_{1,0} \theta_2 - \theta_1 \theta_{2,0} + A_{21} T_{11} + A_{22} T_{12} + A_{23} y_4 + d_{21} \varepsilon_{22} + d_{22} \kappa_{22} + d_{23} \kappa_{12} \\
\frac{1}{A_1} \frac{\partial y_7}{\partial \alpha_1} &= -\frac{1}{R_1} y_5 - y_8 \\
\frac{1}{A_1} \frac{\partial y_8}{\partial \alpha_1} &= a_1 \theta_2 + A_{31} T_{11} + A_{32} T_{12} + A_{33} y_4 + d_{31} \varepsilon_{22} + d_{32} \kappa_{22} + d_{33} \kappa_{12} \\
\frac{1}{A_1} \frac{\partial y_9}{\partial \alpha_1} &= Q_{23}^* + d_{31} \varepsilon_{22} + d_{32} \kappa_{22} + d_{33} \kappa_{12} \\
\frac{1}{A_1} \frac{\partial y_{10}}{\partial \alpha_1} &= M_{12}^* + A_{32} T_{12}^* + d_{33} \kappa_{12}
\end{aligned}$$

przy czym:

$$\begin{aligned}
y_6 &= T_{11}(1 + \varepsilon_{1,0}) + T_{11,0} \varepsilon_1, \quad y_7 = T_{12}(1 + \varepsilon_{2,0}) + T_{12,0} \varepsilon_2 - \frac{2}{R_2} M_{12} \\
y_8 &= Q_{13} + T_{11,0} \theta_1 + T_{11,0} \theta_{1,0} + T_{12} \theta_2 + T_{12} \theta_{2,0} \tag{21} \\
T_{21}^* &= T_{12}(1 + \varepsilon_{1,0}), \quad T_{22}^* = T_{22}(1 + \varepsilon_{2,0}) + T_{22,0} \varepsilon_2 \\
Q_{23}^* &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial M_{22}}{\partial \alpha_2} - a_1(y_4 - M_{22}) + 2a_2 M_{12} + T_{11,0} \theta_1 + T_{11} \theta_{1,0} + T_{12,0} \theta_2 + T_{12} \theta_{2,0}
\end{aligned}$$

Siły T_{22} , Q_{23} i momenty M_{22} , M_{12} są zmiennymi pomocniczymi, używanymi tylko do oznaczenia następujących wielkości:

$$\begin{aligned}
T_{22} &= d_{11} T_{11} + d_{21} T_{12} + d_{31} M_{11} - (C_{22}^* - C_{22}^0) \varepsilon_{22} - (B_{22}^* - B_{22}^0) \kappa_{22} - (B_{26}^* - B_{26}^0) \kappa_{12} \\
M_{22} &= d_{12} T_{11} + d_{22} T_{12} + d_{32} M_{11} - (B_{22}^* - B_{22}^0) \varepsilon_{22} - (D_{22} - D_{22}^0) \kappa_{22} - (D_{26} - D_{26}^0) \kappa_{12} \\
M_{12} &= d_{13} T_{11} + d_{23} T_{12} + d_{33} M_{11} - (B_{26}^* - B_{26}^0) \varepsilon_{22} - (D_{26} - D_{26}^0) \kappa_{22} - (D_{66} - D_{66}^0) \kappa_{12} \tag{22}
\end{aligned}$$

Równania (20) zawierają po prawej stronie funkcje T_{11} , T_{12} , ε_1 . Muszą one być wyrażone za pomocą funkcji rozwiązujących y_i . W przypadku stwierdzenia, że te wyrażenia zostały znalezione, dla określenia funkcji T_{22} , M_{22} , M_{12} wystarczy użyć wyrażenia (22). Biorąc pod uwagę, że:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial y_5}{\partial \alpha_1} + a_1 y_6 - \frac{1}{R_1} y_7, \quad \kappa_{12} = \tau = 2 \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial y_8}{\partial \alpha_2} + a_2 \frac{1}{A_2} \frac{\partial y_7}{\partial \alpha_2} + a_2 \frac{y_6}{R_2} - \frac{1}{R_2} \omega_1 \right) \quad (23)$$

zapisano piąte i szóste równanie wyrażenia (20) i pierwsze dwa równania wyrażenia (21) następująco:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(1 + \varepsilon_{1,0}) - A_{11}T_{11} - A_{12}T_{12} &= f_5, & \varepsilon_1\omega_{2,0} - A_{21}T_{11} - A_{22}T_{12} &= f_6 \\ \varepsilon_1T_{11,0} + T_{11}(1 + \varepsilon_{1,0}) &= y_1 \\ T_{11} \left(\omega_{1,0} - \frac{2}{R_2} d_{13} \right) + T_{12} \left(1 + \varepsilon_{2,0} - \frac{2}{R_2} d_{23} \right) &= y_2 - T_{12,0}\varepsilon_2 + \frac{2}{R_2} d_{33}y_4 - \\ - \frac{2}{R_2} (B_{26}^* - B_{26}^0) \varepsilon_{22} - \frac{2}{R_2} (D_{26} - D_{26}^0) \kappa_{22} - \frac{2}{R_2} (D_{66} - D_{66}^0) \kappa'_{12} & \end{aligned}$$

gdzie: $f_5 = y_8\theta_{1,0} + A_{13}y_4 + d_{11}\varepsilon_{22} + d_{12}\kappa_{22} + d_{13}\kappa'_{12}$,

$$f_6 = y_{8,0}\theta_2 - \varepsilon_2\omega_{1,0} + y_8\theta_{2,0} + A_{23}y_4 + d_{21}\varepsilon_{22} + d_{22}\kappa_{22} + d_{23}\kappa'_{12},$$

$$g_1 = y_1,$$

$$g_2 = y_2 - T_{12,0}\varepsilon_2 + \frac{2}{R_2} d_{33}y_4 - \frac{2}{R_2} (B_{26}^* - B_{26}^0) \varepsilon_{22} - \quad (24)$$

$$- \frac{2}{R_2} (D_{26} - D_{26}^0) \kappa_{22} - \frac{2}{R_2} (D_{66} - D_{66}^0) \kappa'_{12}.$$

Otrzymano układ równań do wyznaczania niewiadomych. Po drobnych uproszczeniach zapisano go w postaci:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 - A_{11}T_{11} - A_{12}T_{12} &= f_5 \\ -A_{21}T_{11} - A_{22}T_{12} &= f_6 \end{aligned} \quad (25)$$

$$\varepsilon_1T_{11,0} + T_{11} = g_1$$

$$T_{12} = g_2$$

Po wyrugowaniu zmiennych T_{11} i T_{12} powstały dwa równania:

$$\varepsilon_1(1 + A_{11}T_{11,0}) = f_5^*, \quad \varepsilon_1(A_{21}T_{11,0}) = f_6^* \quad (26)$$

gdzie: $f_5^* = f_5 + g_1 \left[A_{11} + \left(\frac{2}{R_2} d_{13} \right) \right] + g_2(A_{12})$

$$f_6^* = f_6 + g_1 \left[A_{21} - (A_{22}) \left(\frac{2}{R_2} d_{13} \right) \right] + g_2(A_{22}) \quad (27)$$

Stosując wzór Cramera, otrzymano:

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \quad (28)$$

Wartości wyznaczników obliczono ze wzorów:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= f_5^* [1 + (A_{22})T_{11,0}] - f_6^* [(A_{12})T_{11,0}] \\ \Delta_2 &= -f_5^* (A_{21}T_{11,0}) + (1 + A_{11}T_{11,0})f_6^* \\ \Delta &= (1 + A_{11}T_{11,0})[1 + (A_{22})T_{11,0}] - [(A_{12})T_{11,0}][(A_{21}T_{11,0})] \end{aligned} \quad (29)$$

Gdy są znane wyrażenia na ε_1 przez funkcje rozwiązujące, można również wyznaczyć funkcje:

$$\begin{aligned} T_{12} &= [\varepsilon_1(A_{21}T_{11,0}) - f_6 - A_{21}g_1](A_{22})^{-1}, \quad T_{11} = g_1 - \varepsilon_1 T_{11,0} \\ T_{13} &= y_3 + T_{11,0}y_8 - T_{11}y_{8,0} - T_{12,0}\theta_2 - T_{12,0}\theta_{2,0} \end{aligned} \quad (30)$$

Równania (20) są niejednorodnymi równaniami różniczkowymi drugiego rzędu. Biorąc pod uwagę liczbę poszukiwanych funkcji w kierunku obwodowym, można aproksymować je szeregiem Fouriera i układ równań (20) doprowadzić do układu równań różniczkowych pierwszego rzędu.

ROZWIĄZANIE RÓWNAŃ STATECZNOŚCI

Rozpatrywane powłoki cylindryczne są zamknięte w kierunku obwodowym, więc funkcje rozwiązujące na α_2 lub φ są okresowe. Należy więc poszukiwane funkcje przedstawić w postaci zespolonej szeregów Fouriera:

$$y_j = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} y_{j,n} e^{in\varphi}, \quad \varphi = \alpha_2, \quad 0 \leq \alpha_2 \leq 2\pi \quad (31)$$

gdzie: $y_{j,n}$ – funkcje zespolone, $j = 1, \dots, 10$,
 n – liczba fal w kierunku obwodowym.

Po wykorzystaniu zależności (31) w równaniach stateczności (20) otrzymano następujący układ równań różniczkowych zwyczajnych:

$$\frac{1}{A_1} \frac{dy_{1,n}}{d\alpha_1} = -in_a (T_{12,n}) + \psi_2 (T_{22,n} - T_{11,n}) + \frac{1}{R_1} (y_{3,n} - in_a M_{12,n}).$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{A_1} \frac{dy_{2,n}}{d\alpha_1} &= -in_a (T_{22,n}) - \psi_2 (2T_{12,n}) + \left(\frac{3}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \psi_2 M_{12,n} + \frac{1}{R_2} \left(-T_{12}^0 y_{8,n} + T_{22}^0 \theta_{2,n} - \right. \\
&\quad \left. - T_{12,n} y_8^0 + T_{22,n} \theta_2^0 + in_a M_{12,n} \right) \\
\frac{1}{A_1} \frac{dy_{3,n}}{d\alpha_1} &= -in_a \left(-T_{12}^0 y_{8,n} + T_{22}^0 \theta_{2,n} - T_{12,n} y_8^0 + T_{22,n} \theta_2^0 + 2\psi_2 M_{12,n} \right) - \\
&\quad - \psi_2 y_{3,n} - \frac{1}{R_1} y_{1,n} - \frac{1}{R_2} (T_{22,n}) \\
\frac{1}{A_1} \frac{dy_{4,n}}{d\alpha_1} &= -in_a M_{12,n} - \psi_2 (y_{4,n} - M_{22,n}) + y_{3,n} + T_{11}^0 y_{8,n} + T_{11,n} y_8^0 - T_{12}^0 \theta_{2,n} - S_{,n} \theta_2^0 \\
\frac{1}{A_1} \frac{dy_{5,n}}{d\alpha_1} &= \frac{1}{R_1} y_{7,n} - y_{8,n} y_8^0 + A_{11} T_{11,n} + A_{12} T_{12,n} + A_{13} y_{4,n} - d_{11} \varepsilon_{22,n} - d_{12} \chi_{22,n} - d_{13} \chi_{12,n} \\
\frac{1}{A_1} \frac{dy_{6,n}}{d\alpha_1} &= -in_a y_{5,n} + \psi_2 y_{6,n} + y_{8,n} \theta_2^0 + y_8^0 \theta_{2,n} + \\
&\quad + A_{12} T_{11,n} + A_{22} S_{,n} + A_{23} y_{4,n} - d_{21} \varepsilon_{22,n} - d_{22} \chi_{22,n} - d_{23} \chi_{12,n} \\
\frac{1}{A_1} \frac{dy_{7,n}}{d\alpha_1} &= -\frac{1}{R_1} y_{5,n} - y_{8,n} \\
\frac{1}{A_1} \frac{dy_{8,n}}{d\alpha_1} &= -\frac{1}{R_1} \varepsilon_{1,n} + A_{13} T_{11,n} + A_{23} S_{,n} + A_{33} y_{4,n} - d_{31} \varepsilon_{22,n} - d_{32} k_{22,n} - d_{33} k_{12,n} \\
\frac{1}{A_1} \frac{\partial y_{9,n}}{\partial \alpha_1} &= Q_{23,n}^* + d_{31} \varepsilon_{22,n} + d_{32} \kappa_{22,n} + d_{33} \kappa_{12,n} \\
\frac{1}{A_1} \frac{\partial y_{10,n}}{\partial \alpha_1} &= M_{12,n}^* + A_{32} T_{12,n}^* + d_{33} \kappa_{12,n}
\end{aligned} \tag{32}$$

gdzie: $n_a = n/A_2$.

Tak więc problem stateczności symetrycznie obciążonej anizotropowej sprężystej powłoki zamkniętej w kierunku obwodowym został sprowadzony do układu dziesięciu jednorodnych równań różniczkowych w postaci normalnej (20) o zmiennych współczynnikach i o jednorodnych warunkach brzegowych:

$$\text{na krawędzi } \alpha_1 = \alpha_0 \quad B_0 y_n = 0 \tag{33}$$

$$\text{na krawędzi } \alpha_1 = \alpha_l \quad B_n y_n = 0$$

Minimalna wartość własna jednorodnego problemu brzegowego (32), (33) określa moment przejścia od podstawowego symetrycznego stanu równowagi do asymetrycznego, który charakteryzuje się odpowiednią liczbą fal w kierunku obwodowym. Równowaga ta całkowicie charakteryzuje się następującymi wartościami: $y_{1,n}, \dots, y_{10,n}, T_{11,n}, T_{22,n}, T_{12,n}, M_{22,n}, M_{12,n}, \varepsilon_{1,n}, \varepsilon_{2,n}, \varepsilon_{22,n}, \theta_{1,n}, \theta_{2,n}, k_{22,n}, k_{12,n}$, i parametrami podkrytycznymi:

$T_{11}^0, T_{22}^0, T_{12}^0, \theta_1^0, \theta_2^0$. Obliczono je zgodnie z metodą przedstawioną w pracy Трач [2008].

Siły i momenty, które są zawarte w układzie równania (32), określono z zależności:

$$\begin{aligned} T_{11,n} &= y_{6,n} \\ T_{22,n} &= d_{11}T_{11,n} + d_{21}S_{,n} + d_{31}y_{4,n} + (C_{22} - C_{22}^0)\varepsilon_{22,n} + (K_{22} - K_{22}^0)k_{22,n} + (K_{26} - K_{26}^0)k_{12,n} \\ M_{22,n} &= d_{12}T_{11,n} + d_{22}S_{,n} + d_{32}y_{4,n} + (K_{22} - K_{22}^0)\varepsilon_{22,n} + (D_{22} - D_{22}^0)k_{22,n} + (D_{26} - D_{26}^0)k_{12,n} \\ M_{12,n} &= d_{13}T_{11,n} + d_{23}S_{,n} + d_{33}y_{4,n} + (K_{26} - K_{26}^0)\varepsilon_{22,n} + (D_{26} - D_{26}^0)k_{22,n} + (D_{66} - D_{66}^0)k_{12,n} \end{aligned} \quad (34)$$

Oprócz tego:

$$\varepsilon_{1,n} = \Delta_1 / \Delta^*, \quad T_{12,n} = (z_{3,n}) / r_{22} \quad (35)$$

gdzie wprowadzono następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned} \Delta^* &= r_{12}^*, \quad \Delta_1 = r_{12}^* z_{1,n}^* - r_{11}^* z_{2,n}^*, \quad r_{11}^* = r_{11} - \frac{r_{21}}{r_{22}}(-A_{12}) \\ r_{12}^* &= r_{12} - \frac{r_{21}}{r_{22}}(-A_{22}), \quad r_{11} = d_{13} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right), \quad r_{12} = 1 + \varepsilon_2^0 + d_{23} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \\ r_{22} &= 1 - \frac{1}{R_2} d_{23}, \quad z_{1,n}^* = z_{1,n} - \frac{1}{r_{22}} z_{3,n}(-A_{12}), \quad z_{2,n}^* = z_{2,n} - \frac{1}{r_{22}} z_{3,n}(-A_{22}) \\ z_{1,n} &= A_{11}(y_{1,n}) + y_{8,n}\theta_1^0 + A_{13}y_{4,n} - d_{11}\varepsilon_{22,n} - d_{12}k_{22,n} - d_{13}k_{12,n} \\ z_{2,n} &= A_{12}(y_{1,n}) + y_{8,n}\theta_2^0 + y_8^0\theta_{2,n} + A_{23}y_{4,n} - d_{12}\varepsilon_{22,n} - d_{22}k_{22,n} - d_{23}k_{12,n} \\ z_{3,n} &= - \left(-\frac{1}{R_2} d_{13} \right) (y_{1,n}) + y_{2,n} + \frac{1}{R_2} d_{33}y_{4,n} + \frac{1}{R_2} (K_{26} - K_{26}^0)\varepsilon_{22,n} + \\ &\quad + \frac{1}{R_2} (D_{26} - D_{26}^0)k_{22,n} + \frac{1}{R_2} (D_{66} - D_{66}^0)k_{12,n} \end{aligned} \quad (36)$$

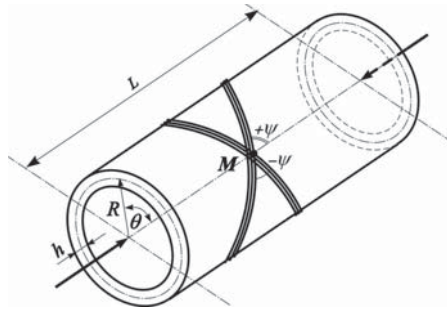
Minimalną wartość krytyczną obciążenia przy danych warunkach brzegowych wyznaczono z przyrównania do zera głównego wyznacznika układu równań. Przy rozwiązywaniu równań różniczkowych ze współczynnikami zespolonymi wyznacznik jest skomplikowany. Dla jednorodnych równań różniczkowych istnieje rozwiązanie układu równań algebraicznych o zespolonych współczynnikach, w których rzeczywiste i urojone części wyznacznika muszą być jednocześnie równe zero. Metoda badania zagadnienia brzegowego bazuje na numerycznej metodzie ortogonalizacji dyskretnej [Григоренко і Василенко 1981, Григоренко і Крюков 1988].

BADANIA STATECZNOŚCI POWŁOK CYLINDRYCZNYCH.

Metodyka rozwiązania w badanym problemie poszukiwania wartości krytycznej opiera się na metodzie numerycznej ortogonalizacji dyskretnej. Przedstawiając proponowaną metodologię, rozważono problem stateczności powłoki cylindrycznej. W obliczeniach rozpatrzono powłokę wykonaną z włókna szklanego. Materiał ten jest ortotropowy względem własnej osi. Moduły sprężystości i współczynniki Poissona włókien i osnowy są równe: $E = 4,2 \cdot 10^5$ MPa, $E' = 3,5 \cdot 10^3$ MPa, $\nu = 0,21$, $\nu' = 0,33$. Materiał otaczający włókna – 0,5. Oś ortotropii powłoki w układzie współrzędnych na powierzchni środkowej można obracać o dowolny kąt ψ . Uśrednione wartości modułów sprężystości dla kierunków ortotropii materiału są obliczone zgodnie z pracą Ванин і Семенюк [1987].

Kiedy $\psi \neq 0^\circ$ i 90° , materiał traci właściwości ortotropowe i zachowuje się jak materiał o jednej płaszczyźnie symetrii. Aby zmniejszyć liczbę parametrów, które wpływają na stateczność powłok, założono, że stosunek L do promienia R powłoki wynosi dwa ($L/R = 2$), a stosunek grubości h do promienia R : $h/R = 0,1$ (rys. 1). Podparcie końców powłoki założono następująco: jeden jest stały podparty przegubowo nieprzesuwnie ($u = 0$, $v = 0$, $w = 0$, $M_{11} = 0$, $\theta_2 = 0$), a drugi – przegubowo przesuwnie ($v = 0$, $w = 0$, $M_{11} = 0$, $\theta_2 = 0$, $T_{11} = -T_{11}^0$).

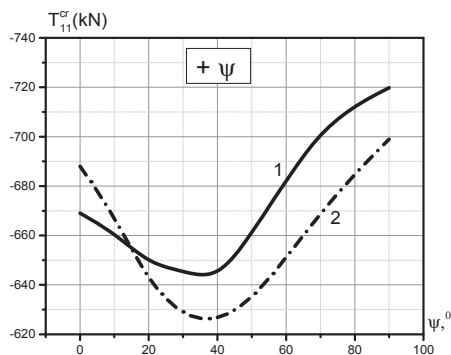
Na rysunkach 2–4 w układzie współrzędnych $T_{11}^{cr} - \psi$ zilustrowano wpływ zmiany kąta ψ materiału kompozytowego (zgodnie z rys. 1) na wartości krytyczne obciążeń osiowych T_{11}^{cr} . Krzywa 1 to wartość krytyczna otrzymana sposobem przedstawionym w pracy. Krzywa 2 to wartości obciążeń krytycznych obliczone zgodnie z metodą przedstawioną w pracy Трач [2008], która bazuje na hipotezie Kirchhoffa-Love'a.



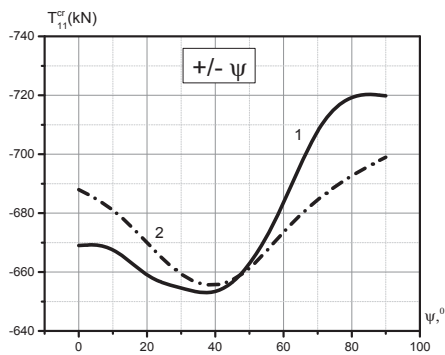
Rys. 1
Fig. 1

PODSUMOWANIE

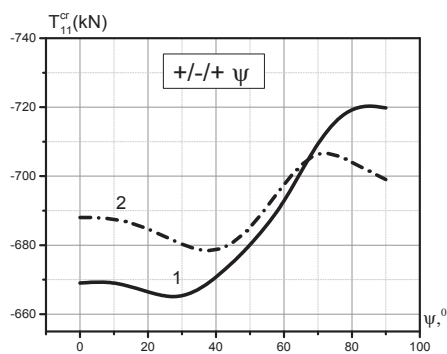
Różnica między wartościami obciążeń krytycznych znalezionych za pomocą teorii bazującej na hipotezie kinematycznej Timoshenki (1), traktując materiał powłoki jako anizotropowy oraz przyjmując, że materiał powłoki jest ortotropowy dla rozpatrywanego przypadku, wynosi maksymalnie tylko 5%. Zastosowanie związku hipotezy (1) i równań konstytutywnych (2–4) pozwala na zbadanie wpływu sił ścinających i naprężeń normalnych (σ_r) na wartości krytyczne.



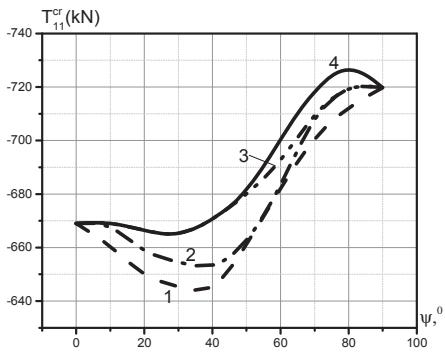
Rys. 2. Wartości krytyczne ściskania osiowego dla powłoki jednowarstwowej
Fig. 2. Critical values of axial compression for monolayer shell



Rys. 3. Wartości krytyczne ściskania osiowego dla powłoki dwuwarstwowej
Fig. 3. Critical values of axial compression for bilayer shell



Rys. 4. Wartości krytyczne ściskania osiowego dla powłoki trzywarstwowej
Fig. 4. Critical values of axial compression for three-layer shell



Rys. 5. Wartości krytyczne ściskania osiowego dla powłoki jedno-, dwu-, trzywarstwowej (1–3) i ortotropowej (4)
Fig. 5. Critical values of axial compression for one-, two-, three-layer (1–3) and orthotropic (4) shell

Analiza wartości krytycznej ściskania osiowego (rys. 5) sugeruje, że powłoka jednowarstwowa (krzywa 1) charakteryzuje się najmniejszymi wartościami obciążeń krytycznych. Dla powłok dwuwarstwowych (krzywa 2) obciążenia krytyczne są większe niż dla jednowarstwowych i mniejsze niż dla czterowarstwowych (krzywa 3). Ta ostatnia jest najbliższej krzywej 4, która opisuje zależność obciążeń krytycznych powłoki ortotropowej. Jest to logicznym dowodem na to, że zwiększając liczbę warstw powłok anizotropowych, można oczekiwać, z pewną dokładnością, wyników jak dla powłoki ortotropowej. Oczywiście wniosek ten może być postawiony tylko dla powłok symetrycznych o strukturze pakietu lamin.

PIŚMIENNICTWO

- Амбарцумян, С.А. (1974). Общая теория анизотропных оболочек. Наука, Москва.
- Баженов, В.А., Семенюк, М.П., Трач, В.М. (2010). Нелінійне деформування, стійкість і за- критична поведінка анізотропних оболонок. Каравела, Київ.
- Ванин, Г.А., Семенюк, Н.П. (1987). Устойчивость оболочек из композиционных материалов с несовершенствами. Наукова думка, Киев.
- Вольмир, А.С. (1967). Устойчивость деформируемых систем. Наука, Москва.
- Castro, S.G., Mittelstedt, C., Monteiro, F., Arbelo, M., Degenhardt, R., Ziegmann, G. (2015). Evaluation of non-linear buckling loads of geometrically imperfect composite cylinder and cones with the Ritz method // Composite Structures, 122, 284–299.
- Семенюк, Н.П., Трач, В.М. (2006). Устойчивость цилиндрических оболочек из армированных материалов при осевом сжатии с учетом особенностей послойной ориентации волокон. Прикладная механика, 42, 3, С. 80–89.
- Семенюк, М.П., Трач, В.М., Жукова, Н.Б. (2005). Про особливості розрахунку на стійкість анізотропних циліндричних оболонок при крученні. Доповіді НАН України, А, 9, С. 47–54.
- Григоренко, Я.М., Василенко, А.Т. (1981). Теория оболочек переменной жесткости. Наукова думка, Киев.
- Григоренко, Я.М., Крюков, Н.Н. (1988). Численные решения задач статики гибких слоистых оболочек с переменными параметрами. Наукова думка, Киев.
- Гузь, А.Н. (1986). Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. Вища школа, Киев.
- Гузь, А.Н., Бабич, И.Ю., Бабич, Д.В., и др. (2001). Механика композитов, В, 12, 10. Устойчивость элементов конструкций. АСК, Киев.
- Кармишин, А.В., Ласковец, В.А., Мяченков, В.И., Фролов, А.Н. (1975). Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций. Машиностроение, Москва.
- Kolakowski, Z., Teter, A. (2015). Statyczne wyboczenie funkcjonalne interaktywnie stopniowanych kolumn z przekrojów zamkniętych poddanych ściskaniu osiowym. Composite Structures, 123, 257–262.
- Корольов, В.И. (1965). Слоистые анизотропные пластинки и оболочки из армированных пластмасс. Машиностроение, Москва.
- Микишева, В.М., 1968. Оптимальная намотка оболочек из стеклопластика работающих на устойчивость под внешним давлением или осевым сжатием. Механика полимеров, 5, С. 864–875.
- Muc, A., Pastuszak, P.D. (2015). Remarks on buckling analysis plates and shells. 3rd Int. Conference on Buckling and Postbuckling Behavior of Composite Laminated Shell Structures with DESICOS Workshop. Braunschweig, Germany.
- Рикардс, Р.Б., Тетерс, Г.А. (1974). Устойчивость оболочек из композитных материалов. Рига, Зинатне.
- Reddy, J.N. (2015). Refined theories and finite element models for the analysis of laminated composite structures: An overview. 3rd Int. Conference on Buckling and Postbuckling Behavior of Composite Laminated Shell Structures with DESICOS Workshop. Braunschweig, Germany.
- Soldatos, K.P. (1983). On the buckling and vibration of antisymmetric angle – ply laminated circular cylindrical shells. Int. J. Enq. Sci. 21, 3, 217–222.
- Trach, V.M., Podvornyi, A.V. (2004). On stability of from shells materials with one plane of elastic symmetry. Int. Appl. Mech., 40, 5, 114–121.

- Trach, V.M., Semenyuk, N.P., Podvornyi, A.V., Zhukova, N.B. (2015). On the method of calculation of buckling and postbuckling behavior of laminated shells with small arbitrary imperfections. 3rd Int. Conference on Buckling and Postbuckling Behavior of Composite Laminated Shell Structures with DESICOS Workshop. Braunschweig, Germany, 1–4.
- Трач, В.М. (2006). Устойчивость цилиндрических оболочек из материала с одной плоскостью упругой симметрии при осевом сжатии и кручении. Прикладная механика, 42, 8, 115–121.
- Трач, В.М. (2007). К вопросу об устойчивости конических оболочек из материала с одной плоскостью упругой симметрии. Прикладная механика, 43, 3.
- Трач, В.М. (2008). Об устойчивости оболочек вращения из композитных материалов // Прикл. механика, 44, 3, 109–124.
- Weaver, P.M. (2003). The effect of extension / twist anisotropy on compression buckling in cylindrical shells. Composites, B 34, 251–260.
- Weaver, P. (2015). Imperfection-insensitive shells using variable stiffness composite. 3rd Int. Conference on Buckling and Postbuckling Behavior of Composite Laminated Shell Structures with DESICOS Workshop. Braunschweig, Germany.
- Weaver, P.M., Drisen, I.R., Roberts, P. (2002). Anisotropic effect in the compression buckling of laminated composite cylindrical shells. Composites Science and Technology, 62, 1, 91–105.
- Wong, K.F.W., Weaver, P.M. (2005). Approximate Solution for the Compression Buckling of Fully Anisotropic Cylindrical Shells. AIAA Journal, 43, 12, 2639–2645.

THE STABILITY OF AVERAGE THICKNESS ANISOTROPIC CYLINDRICAL SHELLS UNDER AXIAL COMPRESSION

Abstract. Based on the Timoshenko theory the approach is presented for calculation of the stability of anisotropic cylindrical shell due to the geometrical prebuckling non-linear stress-strain state. The relevant properties of the coating material are symmetrical according a plane which can coincide with the central surface. Numerical study was performed using the method of discrete orthogonalization. A graph is illustrating the effect of the angle of layering of the fiber composite for the critical stress to axial compression.

Key words: Timoshenko theory, stability of shells, anisotropy

Zaakceptowano do druku – Accepted for print: 28.09.2015

Cytowanie: Tracz, W., Chorużyj, M. (2015). Stateczność osiowo ściskanych cylindrycznych, anizotropowych powłok o średniej grubości. Acta Sci. Pol., Architectura, 14 (3), 21–34.