

MODELOWANIE WARSTWOWE NIEJEDNORODNYCH PŁYT SPRĘŻYSTYCH

Jarosław Zieliński

Grupa PZU, Warszawa

Streszczenie. W pracy rozwiązano płyty niejednorodne warstwowo, obciążone w dowolny sposób na powierzchni górnej i dolnej. Zakłada się, że płyta może być złożona z warstw zarówno ortotropowych, jak i izotropowych oraz że jej podział na warstwy może być niesymetryczny względem powierzchni środkowej. Model zapewnia ciągłość wielkości statycznych i kinematycznych na powierzchniach podziału płyty na warstwy. Osiąga się to przez wprowadzenie do opisu dodatkowych funkcji, zwanych korektorami. Funkcje te, wraz z przemieszczeniami powierzchni podziału oraz z zadanymi funkcjami opisującymi rozkład przemieszczeń po grubości płyty, służą do skonstruowania pewnej postaci więzów narzuconych na jej trójwymiarowe przemieszczenia. Metodę zilustrowano przykładami obliczeń numerycznych dla dwuwarstwowej płyty prostokątnej.

Słowa kluczowe: płyty sprężyste, płyty warstwowe, więzy, modelowanie

WSTĘP

Badane w pracy obiekty materialne są sprężystymi płytami niejednorodnymi, niekoniecznie cienkimi. Analiza w ramach liniowej teorii sprężystości płyt traktowanych jako ciała trójwymiarowe jest skomplikowana, stąd potrzeba poszukiwania modeli uproszczonych. Znane uproszczone modele płyt to modele dwuwymiarowe, czyli takie, w których poszukiwane wielkości odnosi się nie do dowolnego punktu trójwymiarowej konfiguracji odniesienia, lecz do punktów pewnego dwuwymiarowego obszaru, zwanego powierzchnią środkową płyty. Poszukiwane przemieszczenia, odkształcenia czy naprężenia w takim uproszczonym modelu zależą nie od trzech, lecz od dwu zmiennych przestrzennych.

Celem pracy jest skonstruowanie takiego modelu płyty, który obejmowałby także płyty o średniej grubości i grube oraz by warunki brzegowe na górnej i dolnej powierzchni płyty były spełnione w sposób ścisły.

Punktem wyjścia do zrealizowania takiego celu jest opis płyty jako ciała trójwymiarowego w ramach liniowej teorii sprężystości. Dla tak opisanych płyt wprowadza się odpowiednie więzy na przemieszczenia, wyrażając je przez przemieszczenia nie jednej powierzchni środkowej płyty, lecz przez przemieszczenia powierzchni dzielących płytę na warstwy.

Zastosowanie metody więzów wewnętrznych do konstruowania modeli uproszczonych w mechanice zaproponował w 1973 roku Cz. Woźniak [Woźniak 1973]. Metoda ta została rozwinięta w innych jego pracach [Woźniak 1973, 1974, 1984, 1985]. Po 1973 roku zastosowaniem więzów wewnętrznych w modelowaniu zjawisk mechanicznych zajmowali się m.in. Mazur-Śniady [1973, 1993] i Utkin [1975], którzy rozważali modelowanie prętów. Warstwowym opisem płyt zajmowali się: Matysiak i Nagórko [1977, 1988, 1989 1995], Nagórko [1976, 1983] oraz Nagórko i Zieliński [1998, 1999]. Błąd rozwiązań przybliżonych w mechanice ciał z więzami był analizowany przez Nagórko [1974, 1981, 1982, 1993].

Podsumowaniem prac z tego zakresu jest monografia Cz. Woźniaka i M. Kleibera z 1982 roku „Nieliniowa mechanika konstrukcji” [Woźniak i Kleiber 2006]. Tam też można znaleźć obszerny wykaz literatury.

W latach dziewięćdziesiątych XX wieku Delyavskyy [1993, 1995] zastosował podobne podejście do modelowania ośrodków sprężystych, stawiając jako cel główny w konstruowanych modelach przybliżonych ścisłe spełnienie warunków brzegowych przez wprowadzenie tzw. korektorów. W tym podejściu parametry kinematyczne opisujące więzy nie muszą mieć już interpretacji fizycznej i mogą być zależne między sobą.

Modele z korektorami dla przemieszczeń, w których wykazano ścisłe spełnienie warunków brzegowych dla belek i płyt ortotropowych, rozważano w pracach M. Delavskyyego, M. Krawchuka, W. Nagórki, L. Onyszki [Delavskyy i in. 1999a, 2000b]. Zagadnienie czystego zginania płyt i belek o przekroju prostokątnym opisano w pracach M. Delavskyyego, M. Krawchuka, W. Nagórki i A. Podhoreckiego [Delavskyy i in. 1999b, 2002].

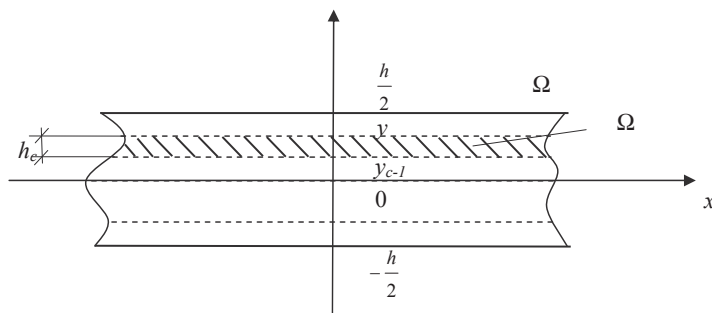
W pracy zastosowano metodę więzów oraz modelowanie prowadzące do ścisłego spełnienia warunków brzegowych z wykorzystaniem korektorów.

KONSTRUKCJA MODELU WARSTWOWEGO PŁYT

Przyjmijmy konfigurację odniesienia płyty w postaci Ω , $\Omega = \Pi \times \left(-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right)$, gdzie Π jest obszarem w R^2 , a h – grubością płyty. Współrzędne punktów obszaru Ω oznaczmy teraz przez (x_1, x_2, y) , tak że $(x_\alpha) \in \Pi$, $\alpha = 1, 2$, $y \in \left(-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right)$. Przez Π_- i Π_+ oznaczmy odpowiednio powierzchnię dolną i górną płyty.

Konstrukcja warstwowego modelu dwuwymiarowego płyty oparta będzie na jej dyskretyzacji na warstwy. Podział na warstwy nie musi wynikać z jej niejednorodności czy innych cech strukturalnych.

Płytę podzielimy płaszczyznami równoległymi do płaszczyzny (x_1, x_2) , przechodzącymi przez punkty y_a , $a = 0, 1, 2, \dots, c_0$, tak że $-\frac{h}{2} = y_0 < y_1 < \dots < y_{c_0} = \frac{h}{2}$ (rys. 1).



Rys. 1. Podział płyty na warstwy

Fig. 1. Division of the plate into layers

Otrzymane warstwy oznaczymy przez: $\Omega_c = \Pi \times \Delta_c$, $c = 1, 2, \dots, c_0 \geq 1$, gdzie $\Delta_c = (y_{c-1}, y_c)$. Z kolei liczby $h_c = y_c - y_{c-1}$ będą grubościami warstw. Składowe przemieszczeń c -tej warstwy oznaczymy przez:

$$u_k^c = u_k^c(x_1, x_2, y) \equiv u_k(x_1, x_2, y) \Big|_{(x_1, x_2, y) \in \Omega_c}, \quad k = 1, 2, 3.$$

MODELOWANIE WARSTWOWE PŁYT

Więzy wewnętrzne

Jeżeli ciało materialne nie może zająć w przestrzeni fizycznej dowolnej konfiguracji będącej obrazem wzajemnie jednoznacznego odwzorowania konfiguracji odniesienia, to mówimy, że na ciało działają więzy. Ograniczenia na dowolne położenie ciała w przestrzeni fizycznej mogą być spowodowane na przykład warunkami podparcia ciała na brzegu lub ściśliwością materiału. W pierwszym przypadku więzy nazwiemy brzegowymi, a w drugim – wewnętrznymi. Więzy brzegowe nie odgrywają istotnej roli w modelowaniu, z tego powodu zajmiemy się więzami wewnętrznymi.

W przypadku modelowania warstwowego więzy na przemieszczenia narzucimy w warstwie w postaci:

$$u_\alpha^c(x_1, x_2, y) = \xi_i^c(y)v_{\alpha i}^c(x_1, x_2); \quad u_3^c(x_1, x_2, y) = \gamma_j^c(y)v_j^c(x_1, x_2) \tag{1}$$

gdzie: $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m$ oraz funkcje ξ_i^c, γ_j^c są funkcjami kształtu, a funkcje $v_{\alpha i}^c, v_j^c$ są funkcjami poszukiwanymi i mogą być zależne między sobą.

Będziemy zmierzać do tego, by każda warstwa była opisana przez pięć niezależnych funkcji określonych w Π , które oznaczymy przez $w_\alpha^c, w^c, f_\alpha^c, \alpha = 1, 2$. Pozostałe funkcje, zwane korektorami, będą tak dobrane, by były spełnione warunki ciągłości przemieszczeń i naprężeń na powierzchniach podziału płyty na warstwy. Funkcje te zostaną określone jednoznacznie przez poszukiwane funkcje $w_\alpha^c, w^c, f_\alpha^c$.

W tej sytuacji dla więzów (1) przyjmiemy $n = 6, m = 2$ oraz

$$v_{\alpha 0}^c \equiv w_\alpha^c; \quad v_0^c \equiv w^c; \quad v_{\alpha 5}^c \equiv -f_{1, \alpha}^c; \quad v_{16}^c \equiv f_{2, 2}^c; \quad v_{26}^c \equiv -f_{2, 1}^c \tag{2}$$

Niech ponadto

$$v_{\alpha 3}^c = -v_{1,\alpha}^c; \quad v_{\alpha 4}^c = -v_{2,\alpha}^c \quad (3)$$

Wprowadźmy także zależności między funkcjami kształtu:

$$\xi_6^c = \xi_5^c; \quad \gamma_1^c = \left(\xi_3^c\right)'; \quad \gamma_2^c = \left(\xi_4^c\right)' \quad (4)$$

gdzie dla dowolnej funkcji g przez g' oznaczono pochodną g po y .

Uwzględniając warunki (2)–(4), więzy (1) można zapisać następująco:

$$\begin{aligned} u_1^c(x_1, x_2, y) &= \xi_0^c(y)w_1^c(x_1, x_2) + \xi_1^c(y)v_{11}^c(x_1, x_2) + \xi_2^c(y)v_{12}^c(x_1, x_2) - \\ &\quad - \xi_3^c(y)v_{1,1}^c(x_1, x_2) - \xi_4^c(y)v_{2,1}^c(x_1, x_2) - \xi_5^c(y)(f_{1,1}^c - f_{2,2}^c)(x_1, x_2) \\ u_2^c(x_1, x_2, y) &= \xi_0^c(y)w_2^c(x_1, x_2) + \xi_1^c(y)v_{21}^c(x_1, x_2) + \xi_2^c(y)v_{22}^c(x_1, x_2) - \\ &\quad - \xi_3^c(y)v_{1,2}^c(x_1, x_2) - \xi_4^c(y)v_{2,2}^c(x_1, x_2) - \xi_5^c(y)(f_{1,2}^c + f_{2,1}^c)(x_1, x_2) \\ u_3^c(x_1, x_2, y) &= \gamma_0^c(y)w^c(x_1, x_2) + \left(\xi_3^c\right)'(y)v_1^c(x_1, x_2) + \left(\xi_4^c\right)'(y)v_2^c(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (5)$$

Więzy (5) opisują przemieszczenia warstwy Ω^c płyty za pomocą pięciu poszukiwanych funkcji w_α^c , w^c , f_α^c , sześciu korektorów $v_{\alpha 1}^c$, $v_{\alpha 2}^c$, v_α^c , $\alpha = 1, 2$ oraz siedmiu funkcji kształtu γ_0^c , ξ_i^c , ξ_i^c , $i = 1, 2, \dots, 5$.

W dalszym ciągu wyznaczymy zależności między korektorami i funkcjami poszukiwanymi oraz określimy funkcje kształtu. Równania skonstruowane w ten sposób dla pola przemieszczeń, po podstawieniu do odkształceń i naprężeń, doprowadzą do równań na niewiadome w_α^c , w^c , f_α^c , które uzyskamy, korzystając ze związków konstytutywnych postaci

$$\begin{aligned} \sigma_{kk} &= \sum_{l=1}^3 B_{kl} u_{l,l}; \quad \sigma_{12} = B_6(u_{1,2} + u_{2,1}); \quad \sigma_{13} = B_5(u_{1,3} + u_{3,1}); \\ \sigma_{23} &= B_4(u_{2,3} + u_{3,2}), \text{ gdzie } B_{klmn} \text{ są stałymi (funkcjami) materiałowymi oraz } B_{kkl} = \\ &= B_{kl}, B_{2323} = B_4, B_{1313} = B_5, B_{1212} = B_6. \text{ W przypadku izotropowym stałe materiałowe} \\ &\text{są równe } B_{kk} = \lambda + 2\mu, B_{kl} = \lambda, k \neq l, B_4 = B_5 = B_6 = \mu, \lambda > 0, \mu > 0. \end{aligned}$$

Oznaczmy naprężenia na brzegu warstwy Ω^c , $c = 2, \dots, c_0 - 1$, $c_0 > 1$, w następujący sposób:

$$\sigma_{k3}^c(x_1, x_2, y_{c-1}) = s_{k3}^{c-1,c}(x_1, x_2); \quad \sigma_{k3}^c(x_1, x_2, y_c) = s_{k3}^{c,c+1}(x_1, x_2) \quad (6)$$

Naprężenia $s_{k3}^{c-1,c}$, $s_{k3}^{c,c+1}$ są nieznanymi siłami współdziałania warstw odpowiednio: Ω^{c-1} , Ω^c i Ω^{c+1} . Dla $c = 1$ i $c = c_0$ naprężenia $\sigma_{k3}^1(x_1, x_2, y_0)$ i $\sigma_{k3}^{c_0}(x_1, x_2, y_{c_0})$ są równe zadanym obciążeniom na dolnej i górnej powierzchni płyty:

$$s_{kl}^{0,1}(x_1, x_2)n_l^- = q_k(x_1, x_2); \quad s_{kl}^{c_0,c_0+1}(x_1, x_2)n_l^+ = p_k(x_1, x_2) \quad (7)$$

gdzie n_l^+ , n_l^- są składowymi wektora zewnętrznemu normalnego odpowiednio powierzchni górnej i dolnej płyty.

Wyrażmy teraz naprężenia $\sigma_{\alpha 3}^c$, $\alpha = 1, 2$, $c = 1, 2, \dots, c_0$, w warstwie Ω^c przez przemieszczenia, przyjmując liniowe związki geometryczne.

Podstawiając przemieszczenia (5) do związków konstytutywnych oraz zakładając dla $y = y_{c-1}$ $\left(\xi_2^c\right)'(y_{c-1}) = 0$ i wykorzystując równanie (6)₁, otrzymamy:

$$\begin{aligned}
 s_{13}^{c-1,c} &= B_5^c \left[\left(\xi_0^c\right)'(y_{c-1}) w_1^c - \left(\xi_5^c\right)'(y_{c-1}) (f_{1,1}^c - f_{2,2}^c) + \left(\xi_1^c\right)'(y_{c-1}) v_{11}^c + \right. \\
 &\quad \left. + \gamma_0^c (y_{c-1}) w_{,1}^c \right] \\
 s_{23}^{c-1,c} &= \left[B_4^c \left(\xi_0^c\right)'(y_{c-1}) w_2^c - \left(\xi_5^c\right)'(y_{c-1}) (f_{1,2}^c + f_{2,1}^c) + \left(\xi_1^c\right)'(y_{c-1}) v_{21}^c + \right. \\
 &\quad \left. + \gamma_0^c (y_{c-1}) w_{,2}^c \right]
 \end{aligned} \tag{8}$$

Jeżeli $\left(\xi_1^c\right)'(y_{c-1}) \neq 0$, wtedy z równań (8) można wyznaczyć korektory v_{11}^c , v_{21}^c :

$$\begin{aligned}
 v_{11}^c &= \frac{\tilde{s}_{13}^{c-1,c} - \left(\xi_0^c\right)'(y_{c-1}) w_1^c + \left(\xi_5^c\right)'(y_{c-1}) (f_{1,1}^c - f_{2,2}^c) - \gamma_0^c (y_{c-1}) w_{,1}^c}{\left(\xi_1^c\right)'(y_{c-1})} \\
 v_{21}^c &= \frac{\tilde{s}_{23}^{c-1,c} - \left(\xi_0^c\right)'(y_{c-1}) w_2^c + \left(\xi_5^c\right)'(y_{c-1}) (f_{1,2}^c + f_{2,1}^c) - \gamma_0^c (y_{c-1}) w_{,2}^c}{\left(\xi_1^c\right)'(y_{c-1})}
 \end{aligned} \tag{9}$$

gdzie $\tilde{s}_{13}^{c-1,c} = \frac{s_{13}^{c-1,c}}{B_5^c}$, $\tilde{s}_{23}^{c-1,c} = \frac{s_{23}^{c-1,c}}{B_4^c}$, $c = 2, 3, \dots, c_0$

Postępując podobnie z naprężeniami dla $y = y_c$ oraz wykorzystując naprężenia (6)₂, otrzymamy kolejne dwa korektory:

$$\begin{aligned}
 v_{12}^c &= \frac{\tilde{s}_{13}^{c,c+1} - \left(\xi_0^c\right)'(y_c) w_1^c + \left(\xi_5^c\right)'(y_c) (f_{1,1}^c - f_{2,2}^c) - \gamma_0^c (y_c) w_{,1}^c}{\left(\xi_2^c\right)'(y_c)} \\
 v_{22}^c &= \frac{\tilde{s}_{23}^{c,c+1} - \left(\xi_0^c\right)'(y_c) w_2^c + \left(\xi_5^c\right)'(y_c) (f_{1,2}^c + f_{2,1}^c) - \gamma_0^c (y_c) w_{,2}^c}{\left(\xi_2^c\right)'(y_c)}
 \end{aligned} \tag{10}$$

gdzie założono, że $\left(\xi_1^c\right)'(y_c) = 0$ oraz $\left(\xi_2^c\right)'(y_c) \neq 0$.

Gdy $c = c_0$, to we wzorach (10) należy za $\tilde{s}_{\alpha 3}^{c_0-1, c_0}$ podstawić odpowiednio $\tilde{p}_1 = \frac{P_1}{B_5^{c_0}}$,
 $\tilde{p}_2 = \frac{P_2}{B_4^{c_0}}$.

Podstawiając przemieszczenia (5) do σ_{33}^c , dla $y = y_{c-1}$, $c = 1, 2, \dots, c_0$, zgodnie ze wzorem (6)₁, oraz przyjmując $(\xi_3^c)'(y_{c-1}) \neq 0$, po podstawieniu korektorów (10), można wyznaczyć korektor v_1^c :

$$v_1^c = \frac{1}{(\xi_3^c)'(y_{c-1})} \left\{ \tilde{s}_{33}^{c-1, c} - (\gamma_0^c)'(y_{c-1}) w^c - \tilde{B}_{31}^c \left\{ \xi_0^c(y_{c-1}) w_{1, 21}^c - \xi_5^c(y_{c-1}) (f_{1, 21}^c - f_{2, 21}^c) \right\} + \right. \\ \left. + \frac{\xi_1^c(y_{c-1})}{(\xi_1^c)'(y_{c-1})} \left[\tilde{s}_{13}^{c-1, c} - (\xi_0^c)'(y_{c-1}) w_{1, 21}^c - \gamma_0^c(y_{c-1}) w^c + (\xi_5^c)'(y_{c-1}) (f_{1, 21}^c - f_{2, 21}^c) \right] \right\} - \\ - \tilde{B}_{32}^c \left\{ \xi_0^c(y_{c-1}) w_{2, 22}^c - \xi_5^c(y_{c-1}) (f_{1, 22}^c + f_{2, 22}^c) \right\} + \\ \left. + \frac{\xi_1^c(y_{c-1})}{(\xi_1^c)'(y_{c-1})} \left[\tilde{s}_{23}^{c-1, c} - (\xi_0^c)'(y_{c-1}) w_{2, 22}^c - \gamma_0^c(y_{c-1}) w^c + (\xi_5^c)'(y_{c-1}) (f_{1, 22}^c + f_{2, 22}^c) \right] \right\} \quad (11)$$

gdzie ponadto założono $\xi_2^c(y_{c-1}) = \xi_3^c(y_{c-1}) = \xi_4^c(y_{c-1}) = (\xi_4^c)''(y_{c-1}) = 0$ oraz

$$\tilde{s}_{33}^{c-1, c} = \frac{s_{33}^{c-1, c}}{B_{33}^c}, \quad c = 1, 2, \dots, c_0 \text{ i } s_{33}^{0, 1} = q_3.$$

W podobny sposób otrzymamy korektor v_2^c dla powierzchni górnej ($y = y_c$):

$$v_2^c = \frac{1}{(\xi_4^c)'(y_c)} \left\{ \tilde{s}_{33}^{c, c+1} - (\gamma_0^c)'(y_c) w^c - \tilde{B}_{31}^c \left\{ \xi_0^c(y_c) w_{1, 21}^c - \xi_5^c(y_c) (f_{1, 21}^c - f_{2, 21}^c) \right\} + \right. \\ \left. + \frac{\xi_2^c(y_c)}{(\xi_2^c)'(y_c)} \left[\tilde{s}_{13}^{c, c+1} - (\xi_0^c)'(y_c) w_{1, 21}^c - \gamma_0^c(y_c) w^c + (\xi_5^c)'(y_c) (f_{1, 21}^c - f_{2, 21}^c) \right] \right\} - \\ - \tilde{B}_{32}^c \left\{ \xi_0^c(y_c) w_{2, 22}^c - \xi_5^c(y_c) (f_{1, 22}^c + f_{2, 22}^c) \right\} + \\ \left. + \frac{\xi_2^c(y_c)}{(\xi_2^c)'(y_c)} \left[\tilde{s}_{23}^{c, c+1} - (\xi_0^c)'(y_c) w_{2, 22}^c - \gamma_0^c(y_c) w^c + (\xi_5^c)'(y_c) (f_{1, 22}^c + f_{2, 22}^c) \right] \right\} \quad (12)$$

gdzie założono $\xi_1^c(y_c) = \xi_3^c(y_c) = \xi_4^c(y_c) = (\xi_3^c)^n(y_c) = 0, (\xi^c)^n(y_c) \neq 0$ oraz oznaczono

$$\tilde{s}_{33}^{c_0, c_0+1} = \frac{S_{33}^{c_0, c_0+1}}{B_{33}^{c_0}}, \quad s_{33}^{c_0, c_0+1} = p_3.$$

Podstawiając wyliczone korektory (9)–(12) do przemieszczeń (5), otrzymamy:

$$\begin{aligned} u_\alpha^c(x_1, x_2, y) = & A_\tau^\alpha(y) w_\alpha^\tau(x_1, x_2) + A_\tau^{0\alpha}(y) w_{,\alpha}^\tau(x_1, x_2) + \\ & + A_\tau^{3\alpha}(y) f_{1,\alpha}^\tau(x_1, x_2) + A_\tau^{4\bar{\alpha}}(y) f_{2,\bar{\alpha}}^\tau(x_1, x_2) + \\ & + A_\tau^{11\alpha}(y) w_{1,\alpha}^\tau(x_1, x_2) + A_\tau^{22\alpha}(y) w_{2,\alpha}^\tau(x_1, x_2) + \\ & + A_\tau^{011\alpha}(y) w_{,11\alpha}^\tau(x_1, x_2) + A_\tau^{022\alpha}(y) w_{,22\alpha}^\tau(x_1, x_2) + \\ & + A_\tau^{311\alpha}(y) f_{1,11\alpha}^\tau(x_1, x_2) + A_\tau^{322\alpha}(y) f_{1,22\alpha}^\tau(x_1, x_2) + \\ & + A_\tau^{412\alpha}(y) f_{2,12\alpha}^\tau(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} u_3^c(x_1, x_2, y) = & A_\tau^0(y) w^\tau(x_1, x_2) + A_\tau^{11}(y) w_{1,1}^\tau(x_1, x_2) + A_\tau^{22}(y) w_{2,2}^\tau(x_1, x_2) + \\ & + A_\tau^{011}(y) w_{,11}^\tau(x_1, x_2) + A_\tau^{022}(y) w_{,22}^\tau(x_1, x_2) + \\ & + A_\tau^{311}(y) f_{1,11}^\tau(x_1, x_2) + A_\tau^{322}(y) f_{1,22}^\tau(x_1, x_2) + A_\tau^{412}(y) f_{2,12}^\tau(x_1, x_2) \end{aligned}$$

gdzie $\tau = c - 1, c, c + 1$.

W równaniach (13) indeks $\bar{\alpha}$ przyjmuje dla $\alpha = 1$ wartość 2, a dla $\alpha = 2$ wartość 1, natomiast macierze \mathbf{A} , których składniki są współczynnikami przy funkcjach w_α, w, f_α oraz ich pochodnych, są kombinacjami funkcji kształtu i stałych materiałowych. Są one zdefiniowane w pracy Zielińskiego [2006], tutaj zostaną określone dla płyty dwuwarstwowej.

Równania modelu warstwowego

W celu wyznaczenia równań na poszukiwane funkcje $w^c, w_\alpha^c, f_\alpha^c$, dla $c = 2, 3, \dots, c_0 - 1, c_0 > 2$, scałkujemy naprężenia otrzymane ze wzorów (13), zgodnie ze wzorami na

siły przekrojowe $N_{\alpha\alpha} = \int_{x_3^-}^{x_3^+} \sigma_{\alpha\alpha} dx_3$:

$$N_{12} = \int_{x_3^-}^{x_3^+} \sigma_{12} dx_3; \quad Q_\alpha = \int_{x_3^-}^{x_3^+} \sigma_{\alpha 3} dx_3; \quad M_{\alpha\alpha} = \int_{x_3^-}^{x_3^+} \sigma_{\alpha\alpha} x_3 dx_3; \quad M_{12} = \int_{x_3^-}^{x_3^+} \sigma_{12} x_3 dx_3$$

przyjmując dla dowolnej macierzy \mathbf{A} następujące oznaczenia: $\int_{y_{c-1}}^{y_c} \mathbf{A} dy \equiv \mathbf{a}, \int_{y_{c-1}}^{y_c} \mathbf{A} y dy \equiv \mathbf{b}$.

Dla przykładu siły przekrojowe M_{12}^c będą równe:

$$M_{12}^c = B_6^c \left\{ (b_\tau^{01} + b_\tau^{02}) w_{,12}^\tau (b_\tau^{0111} + b_\tau^{0112}) w_{,1112}^\tau + (b_\tau^{0221} + b_\tau^{0222}) w_{,1222}^\tau + b_\tau^1 w_{,2}^\tau + \right. \\ \left. + b_\tau^2 w_{,2,1}^\tau + (b_\tau^{111} + b_\tau^{112}) w_{,112}^\tau + (b_\tau^{221} + b_\tau^{222}) w_{,122}^\tau + (b_\tau^{31} + b_\tau^{32}) f_{1,12}^\tau + b_\tau^{41} f_{2,11}^\tau + \right. \\ \left. + b_\tau^{42} f_{2,22}^\tau + (b_\tau^{3111} + b_\tau^{3112}) f_{1,1112}^\tau + (b_\tau^{3222} + b_\tau^{3221}) f_{1,1222}^\tau + (b_\tau^{4122} + b_\tau^{4121}) f_{2,1122}^\tau \right\}$$

Postać pozostałych sił została wyznaczona w pracy Zielińskiego [2006].

Podstawiając wyliczone siły przekrojowe do równań:

$$N_{\alpha\beta,\beta} + r_\alpha = 0; \quad Q_{\alpha,\alpha} + r_3 = 0; \quad M_{\alpha\beta,\beta} - Q_\alpha + m_\alpha = 0$$

gdzie $r_k = \sigma_{k3}(-h/2) - \sigma_{k3}(h/2)$, $m_\alpha = x_3^- \sigma_{\alpha 3}(-h/2) - x_3^+ \sigma_{\alpha 3}(h/2)$, otrzymamy układ równań opisujący wewnętrzne warstwy płyty $c = 2, 3, \dots, c_0 - 1$. Jest to układ $5(c_0 - 2)$ równań na niewiadome $w^c, f_\alpha^c, \alpha = 1, 2, c = 2, 3, \dots, c_0 - 1$.

Równania dla pierwszej i ostatniej warstwy ($c = 1, c_0$) otrzymamy analogicznie, z tym że siły przekrojowe należy tutaj wyliczyć, podstawiając do przemieszczeń korektory z zadanymi obciążeniami powierzchni górnej i dolnej warstwy.

Funkcje kształtu

W opisanej konstrukcji modelu warstwowego nałożono dotychczas następujące warunki na funkcje kształtu:

$$\begin{aligned} \xi_2^c(y_{c-1}) = 0 & \quad \xi_1^c(y_{c-1}) \neq 0 & \quad \xi_1^c(y_c) = 0 & \quad \xi_2^c(y_c) \neq 0 \\ (\xi_2^c)'(y_{c-1}) = 0 & \quad (\xi_1^c)'(y_{c-1}) \neq 0 & \quad (\xi_1^c)'(y_c) = 0 & \quad (\xi_2^c)'(y_c) \neq 0 \\ \xi_3^c(y_{c-1}) = 0 & \quad (\xi_3^c)'(y_{c-1}) \neq 0 & \quad \xi_3^c(y_c) = 0 & \quad (\xi_4^c)'(y_c) \neq 0 \\ \xi_4^c(y_{c-1}) = 0 & \quad (\xi_3^c)''(y_{c-1}) \neq 0 & \quad (\xi_3^c)'(y_c) = 0 & \quad (\xi_4^c)''(y_c) \neq 0 \\ (\xi_4^c)'(y_{c-1}) = 0 & & & \quad (\xi_3^c)''(y_c) = 0 \\ (\xi_4^c)''(y_{c-1}) = 0 & & & \quad \xi_4^c(y_c) = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

Warunki te sformułowane są jedynie dla funkcji $\xi_1^c, \xi_2^c, \xi_3^c, \xi_4^c$. Przyjmijmy więc te funkcje w postaci wielomianów:

$$\begin{aligned} \xi_1^c(y) = c_1 y^2 + b_1 y + a_1 & \quad \xi_3^c(y) = e_3 y^4 + d_3 y^3 + c_3 y^2 + b_3 y + a_3 \\ \xi_2^c(y) = c_2 y^2 + b_2 y + a_2 & \quad \xi_4^c(y) = e_4 y^4 + d_4 y^3 + c_4 y^2 + b_4 y + a_4 \end{aligned} \quad (15)$$

gdzie współczynniki $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, i = 1, 2, 3, 4, j = 3, 4$, nie są znane. Występujące w warunkach (14) nierówności zapiszemy w postaci $(\xi_1^c)'(y_{c-1}) = (\xi_2^c)'(y_c) = (\xi_3^c)''(y_{c-1}) = (\xi_4^c)''(y_c) = 1$.

Zadanie znalezienia współczynników występujących w funkcjach (15) sprowadzimy do rozwiązania układu równań algebraicznych postaci

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{m}$$

utworzonego z warunków (14) bez uwzględniania nierówności:

$$\xi_1^c(y_{c-1}) \neq 0; \quad \xi_2^c(y_c) \neq 0; \quad (\xi_3^c)'(y_{c-1}) \neq 0; \quad (\xi_4^c)'(y_c) \neq 0 \quad (16)$$

Wyznaczając z równania $\mathbf{a} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{m}$ współczynniki \mathbf{w} i podstawiając je do ξ_1^c , ξ_2^c , ξ_3^c , ξ_4^c oraz oznaczając $(y_c - y_{c-1}) = h_c$, otrzymamy:

$$\begin{aligned} \xi_1^c(y) &= -\frac{1}{2h_c}(y^2 - 2y_c y + y_c^2); & \xi_2^c(y) &= \frac{1}{2h_c}(y^2 - 2y_{c-1}y + y_{c-1}^2) \\ \xi_3^c(y) &= \frac{1}{6h_c^2}[y^4 - (y_{c-1} + 3y_c)y^3 + 3(y_{c-1}y_c + y_c^2)y^2 - (3y_{c-1}y_c^2 + y_c^3)y + y_{c-1}y_c^3] \\ \xi_4^c(y) &= \frac{1}{6h_c^2}[y^4 - (3y_{c-1} + y_c)y^3 + 3(y_{c-1}^2 + y_{c-1}y_c)y^2 - (y_{c-1}^3 + 3y_c y_{c-1}^2)y + y_c y_{c-1}^3] \end{aligned} \quad (17)$$

Nieuwzględnione warunki (16) są spełnione, gdyż z równań (17) otrzymujemy:

$$\xi_1^c(y_{c-1}) = -\frac{h_c}{2}; \quad \xi_2^c(y_c) = \frac{h_c}{2}; \quad (\xi_3^c)'(y_{c-1}) = -\frac{h_c}{6}; \quad (\xi_4^c)'(y_c) = \frac{h_c}{6}$$

Pozostałe funkcje, na które nie sformułowano zadanych warunków, przyjęto w postaci:

$$\xi_0^c(y) = y + 1; \quad \xi_5^c(y) = y^2 + 2; \quad \xi_6^c(y) = y^3 + y \quad (18)$$

Konstrukcja modelu – podsumowanie

Skonstruowany model warstwowy płyt charakteryzuje się tym, że otrzymany w nim układ równań różniczkowych, cząstkowych jest układem o stałych współczynnikach. Poszukiwane funkcje określone są w obszarze dwuwymiarowym, a warunki obciążeniowe na powierzchni górnej i dolnej płyty są spełnione w sposób ścisły.

Z drugiej jednak strony równania modelowe są takie, że wypisanie ich nawet dla kilku warstw jest uciążliwe, gdyż występuje w nich duża liczba współczynników o bardzo rozbudowanej postaci (np. we wzorach na przemieszczenia (13) występuje 88 współczynników macierzowych \mathbf{A} , z których najbardziej rozbudowany jest sumą 16 iloczynów kombinacji funkcji kształtu i stałych materiałowych). Wyznaczenie tych współczynników prowadzi do dużej liczby prostych operacji rachunkowych, dlatego model ten staje się wygodny i użyteczny dopiero po zastosowaniu metod komputerowych.

Do rozwiązywania zagadnień brzegowych w opracowanym modelu zastosowano pakiet MATHEMATICA w wersji 5.0 (nr licencji: L 4611-5501), w ramach którego skonstruowano własny program.

ROZWIĄZANIE DLA PŁYTY DWUWARSTWOWEJ

Płytę prostokątną, dla której konfiguracja odniesienia jest równa $\langle a_1, a_2 \rangle \times \langle b_1, b_2 \rangle \times \times \left\langle -\frac{h}{2}, \frac{h}{2} \right\rangle$, podzielimy na dwie warstwy płaszczyzną $y = y_1$, gdzie y_1 jest dowolnym punktem z przedziału $\left(-\frac{h}{2}, \frac{h}{2} \right)$. Grubości warstw oznaczymy przez h_1 i h_2 , tak więc

$h = h_1 + h_2$. Poszukiwanymi funkcjami będą tutaj w^c , w_α^c , f_α^c , $\alpha = c = 1, 2$. Rozpatrzmy przypadek płyty jednorodnej oraz przypadek płyty niejednorodnej warstwowo.

Założmy, że płyta jest obciążona na górnej powierzchni obciążeniem $[0, 0, p_3]$, oraz na dolnej powierzchni obciążeniem $[0, 0, q_3]$.

Rozwiążemy najpierw układ równań w przypadku obciążenia płyty tylko na górnej powierzchni $p_3 = p_0 \sin \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi x_2}{b}$.

Będziemy poszukiwać rozwiązań w postaci:

$$w^c(x_1, x_2) = \eta_0^c \sin \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi x_2}{b}; \quad w_1^c(x_1, x_2) = \eta_1^c \cos \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi x_2}{b};$$

$$w_2^c(x_1, x_2) = \eta_2^c \sin \frac{\pi x_1}{a} \cos \frac{\pi x_2}{b}; \quad f_1^c(x_1, x_2) = \eta_3^c \sin \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi x_2}{b};$$

$$f_2^c(x_1, x_2) = \eta_4^c \cos \frac{\pi x_1}{a} \cos \frac{\pi x_2}{b}, \quad c = 1, 2$$

Przyjmijmy $a = b = 2$, $h_1 = h_2 = 0,05$, $E_1 = E_2 = 20 \cdot 10^6$, $\nu_1 = \nu_2 = 0,15$, $p_0 = -10$, a następnie wyznaczmy wartości współczynników η_i^c , $i = 0, 1, 2, 3, 4$. I tak:

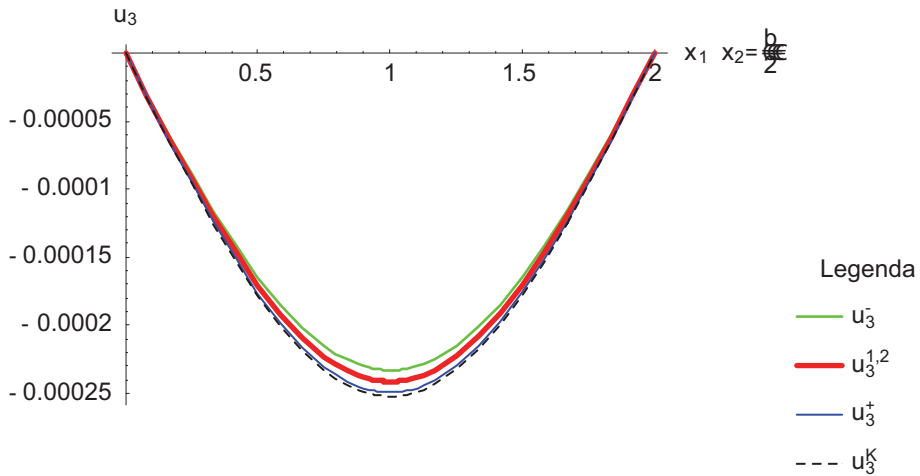
$$\begin{aligned} \eta_0^1 &= -243,441 \cdot 10^{-6}; \quad \eta_0^2 = -2,441 \cdot 10^{-6}; \quad \eta_1^1 = -4,963 \cdot 10^{-6}; \quad \eta_1^2 = -243,441 \cdot 10^{-6}; \\ \eta_2^1 &= -4,963 \cdot 10^{-6}; \quad \eta_2^2 = -4,2141 \cdot 10^{-6}; \quad \eta_3^1 = -466,077 \cdot 10^{-6}; \quad \eta_3^2 = -243,441 \cdot 10^{-6}; \\ \eta_4^1 &= 0; \quad \eta_4^2 = 3,441 \cdot 10^{-6} \end{aligned}$$

Wykresy ugięcia płyty przedstawiono na rysunku 2.

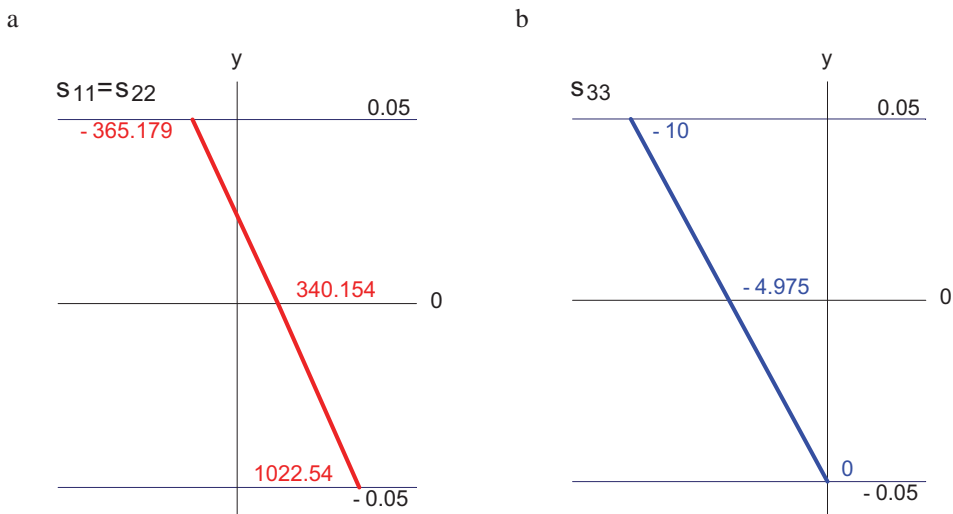
Strzałka ugięcia wynosi tutaj odpowiednio: dla powierzchni górnej $u_3^+ = -0,000249169$, wewnętrznej $u_3^{1,2} = -0,000241191$, dolnej $u_3^- = -0,000232913$, oraz ugięcia otrzymanego w ramach teorii Kirhhoffa-Love'a: $u_3^K = -0,000251927$. Widać więc, że najbliższe rozwiązanie klasycznego jest ugięcie powierzchni górnej i różnica między nimi wynosi 1%.

Otrzymane rozwiązania pozwalają wyznaczyć naprężenia. Na wykresach 3a, b przedstawiono rozkład naprężeń σ_{kk} w środku płyty. Wyliczone naprężenia na powierzchni górnej, wewnętrznej i dolnej płyty wyznaczają rozkład liniowy.

Z kolei na rysunku 4a przedstawiono rozkład naprężeń σ_{12} w punkcie $(0, 0)$, a na rysunku 4b – naprężenia σ_{13} w punkcie $\left(0, \frac{b}{2}\right)$ oraz σ_{23} w punkcie $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$.



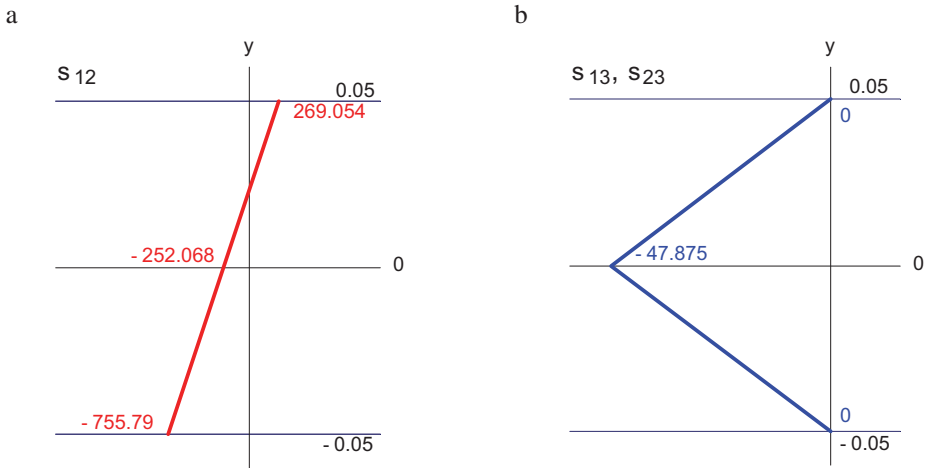
Rys. 2. Wykresy ugięcia płyty
 Fig. 2. Graphs of the deflection of the plate



Rys. 3. Rozkład naprężeń: a – $\sigma_{11} = s_{11}, \sigma_{22} = s_{22}$, b – $\sigma_{33} = s_{33}$
 Fig. 3. Distribution of stresses: a – $\sigma_{11} = s_{11}, \sigma_{22} = s_{22}$, b – $\sigma_{33} = s_{33}$

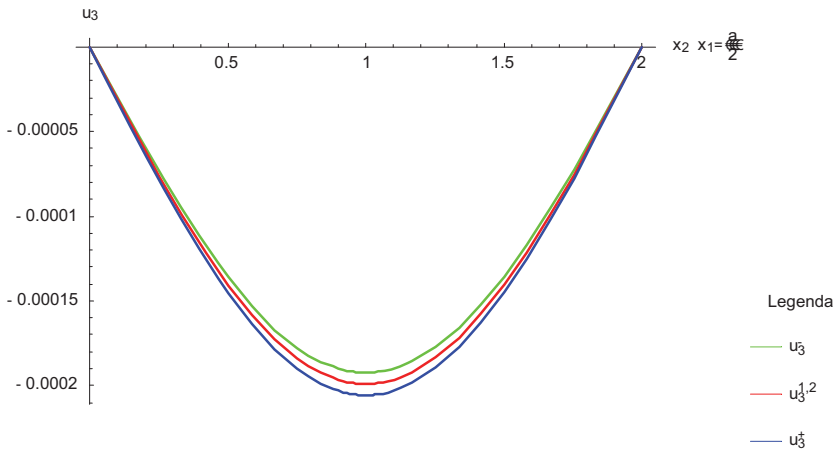
Rozkład naprężenia σ_{33} (rys. 3b) ilustruje dokładne spełnienie warunków brzegowych na dolnej i górnej powierzchni płyty. Z kolei na rysunkach 3a oraz 4a i 4b zgodnie z oczekiwaniem widać, że naprężenia σ_{13} i σ_{23} są znacznie mniejsze od σ_{11}, σ_{22} i σ_{12} .

W przypadku płyt dwuwarstwowych niejednorodnych, dla których własności pierwszej warstwy są opisane wielkościami $E_1 = 30 \cdot 10^6, \nu_1 = 0,15$ oraz drugiej – wielkościami $E_2 = 20 \cdot 10^6, \nu_2 = 0,15$, przy $h_1 = h_2$, wykres przemieszczeń u_3 przedstawiono na rysunku 5. Maksymalne ugięcie zmniejszyło się tutaj w stosunku do ugięcia płyty jednowarstwowej i wynosi $u_3^+ = -20,5658 \cdot 10^{-5}, u_3^{1,2} = -19,9086 \cdot 10^{-5}, u_3^- = -19,2267 \cdot 10^{-5}$.



Rys. 4. Rozkład naprężeń: a – $\sigma_{12} = s_{12}$, b – $\sigma_{13} = s_{13}$, $\sigma_{23} = s_{23}$

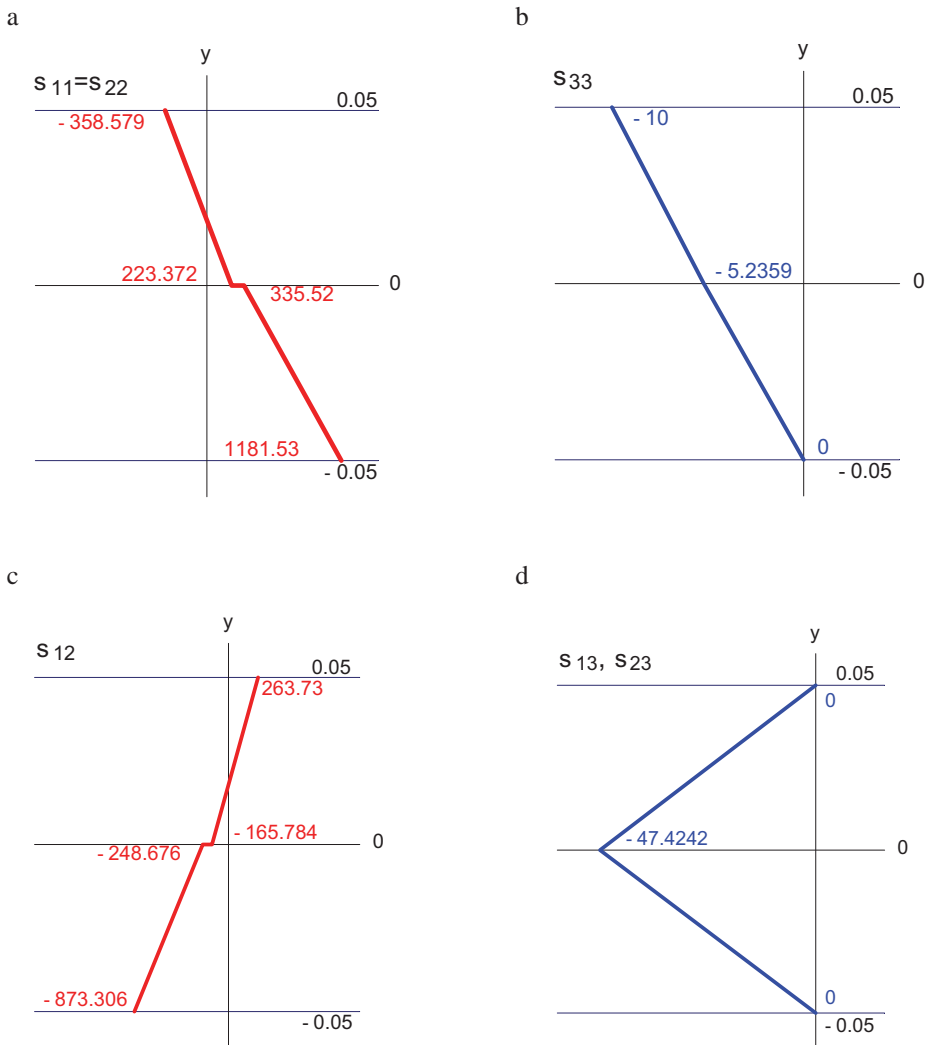
Fig. 4. Distribution of stresses: a – $\sigma_{12} = s_{12}$, b – $\sigma_{13} = s_{13}$, $\sigma_{23} = s_{23}$



Rys. 5. Wykresy przemieszczeń u_3 płyty

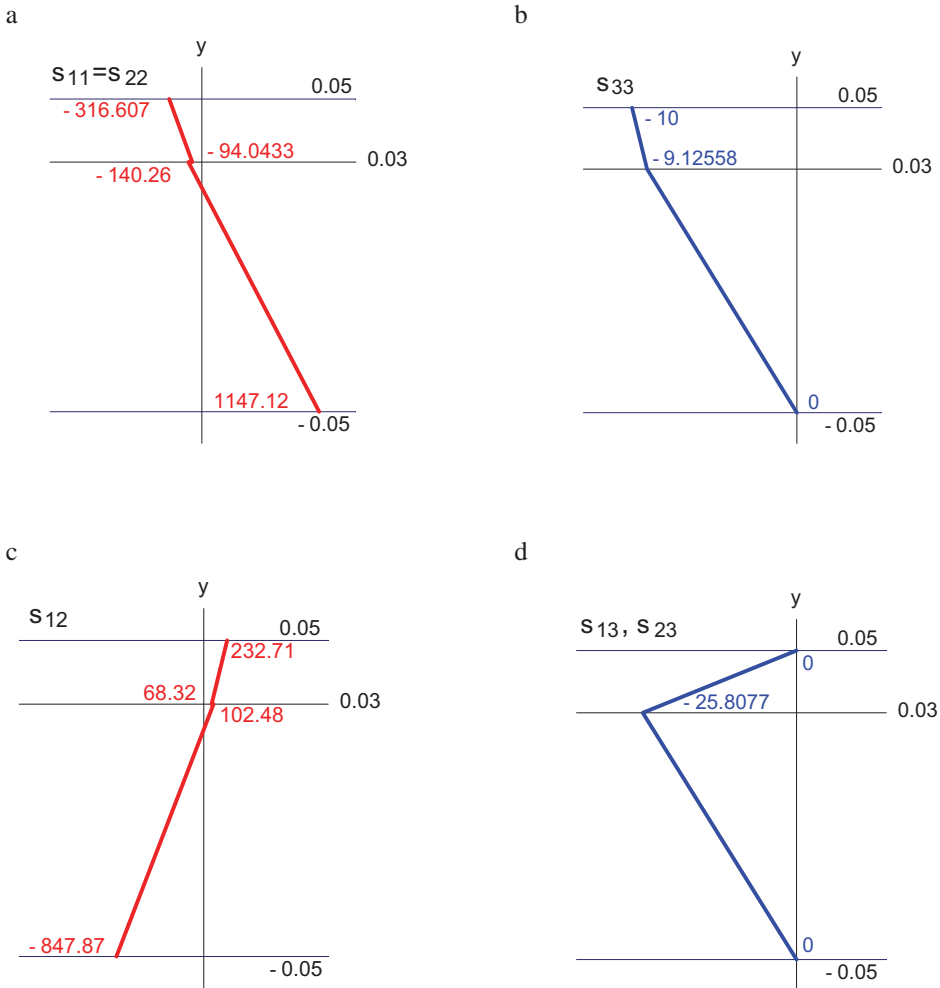
Fig. 5. Graphs of the displacements u_3 of the plate

Wykresy naprężenia σ_{kk} , σ_{12} , $\sigma_{\alpha 3}$ dla tego przypadku przedstawiono na rysunku 6. Wykresy naprężeń σ_{k3} , $k = 1, 2, 3$ nie zmieniły swego charakteru, natomiast wykresy $\sigma_{\alpha\beta}$, $\alpha = \beta = 1, 2$ są już już liniowe po grubości płyty oraz doznają skoku na powierzchniach podziału płyty na warstwy.



Rys. 6. Rozkład naprężeń: a – $\sigma_{11} = s_{11}$, $\sigma_{22} = s_{22}$, b – $\sigma_{33} = s_{33}$, c – $\sigma_{12} = s_{12}$, d – $\sigma_{13} = s_{13}$, $\sigma_{23} = s_{23}$
 Fig. 6. Distribution of stresses: a – $\sigma_{11} = s_{11}$, $\sigma_{22} = s_{22}$, b – $\sigma_{33} = s_{33}$, c – $\sigma_{12} = s_{12}$, d – $\sigma_{13} = s_{13}$, $\sigma_{23} = s_{23}$

Dla płyty niejednorodnej, utworzonej z tych samych materiałów co w poprzednim przykładzie, ale o zmienionych grubościach warstw $h_1 = 0,08$ i $h_2 = 0,02$, wykresy naprężeń σ_{kl} przedstawiono na rysunku 7.



Rys. 7. Rozkład naprężeń: a – $\sigma_{11} = s_{11}$, $\sigma_{22} = s_{22}$, b – $\sigma_{33} = s_{33}$, c – $\sigma_{12} = s_{12}$, d – $\sigma_{13} = s_{13}$, $\sigma_{23} = s_{23}$

Fig. 7. Distribution of stresses: a – $\sigma_{11} = s_{11}$, $\sigma_{22} = s_{22}$, b – $\sigma_{33} = s_{33}$, c – $\sigma_{12} = s_{12}$, d – $\sigma_{13} = s_{13}$, $\sigma_{23} = s_{23}$

W tym przypadku wykresy naprężeń $\sigma_{\alpha\beta}$ i $\sigma_{\alpha 3}$ są podobne do naprężeń rozpatrywanych na rysunku 6, natomiast wykres naprężeń σ_{33} jest liniowy w poszczególnych warstwach, nie jest jednak liniowy po grubości całej płyty.

PODSUMOWANIE

Skonstruowany model jest modelem dwuwymiarowym, czyli modelem, w którym stan trójwymiarowy przemieszczenia, odkształcenia i naprężenia płyty można wyznaczyć po znalezieniu funkcji określonych w obszarze dwuwymiarowym. W modelu tym przemieszczenia płyty są aproksymowane przez przemieszczenia rodziny powierzchni dzielących płytę na warstwy. Do konstrukcji modelu wykorzystano metodę więzów wewnętrznych.

W celu zapewnienia ścisłego spełnienia warunków brzegowych na górnej i dolnej powierzchni płyty zastosowano w więzach metodę korektorów.

Po wyznaczeniu korektorów więzy na przemieszczenia sprowadzono do postaci, w której w każdej warstwie występuje pięć poszukiwanych funkcji – parametrów kinematycznych. Zmienność przemieszczeń po grubości opisano za pomocą funkcji kształtu. Funkcje te nie są określone w modelu w sposób jednoznaczny, ale muszą być znane. W pracy wyznaczono takie funkcje.

Równania na parametry kinematyczne otrzymano z klasycznych równań płyt dla sił wewnętrznych. Równania te wypisuje się dla każdej warstwy, co zapewnia ich właściwą liczbę, a postać więzów, wyliczone korektory i funkcje kształtu powodują ciągłość pól mechanicznych na powierzchniach podziału płyty na warstwy.

Skonstruowany w ten sposób model został zweryfikowany numerycznie. Do uzyskania rozwiązań komputerowych wykorzystano pakiet do obliczeń symbolicznych MATHEMATICA. W obrębie tego pakietu opracowano program złożony z modułów, pozwalający kontrolować i weryfikować wyniki etapowo.

Podsumowując, można stwierdzić:

1. W pracy skonstruowano nowy dwuwymiarowy model płyt warstwowo niejednorodnych, wygodny do zastosowania technik numerycznych, w którym warunki brzegowe na górnej i dolnej powierzchni są spełnione w sposób ścisły.
2. Aproksymacja przemieszczeń płyty przez przemieszczenia powierzchni podziału płyty na warstwy (podziału pomyślanego lub wynikającego ze struktury niejednorodności płyty) pozwala rozważać także płyty grube.
3. Układ równań na niewiadome parametry kinematyczne składa się z $5n$ równań różniczkowych na $5n$ niewiadomych, gdzie n jest liczbą warstw podziału. W układzie tym nie występuje trzecia zmienna przestrzenna (po grubości płyty).
4. Skonstruowany program numeryczny został zweryfikowany.

PIŚMIENNICTWO

- Delyavskyy M., 1993. Application of the minimum potential energy principle in determining the stress-strain state in spatially reinforced composite materials. *Physico-Chemical Mechanics of Materials* 29, 74–82.
- Delyavskyy M., 1995. Calculation of the stress-strain state in orthotropic body under the bending load. *Problems of Strength* 11–12, 117–123.
- Delyavskyy M., Krawchuk M., Nagórko W., 1999a. Метод розрахунку напружено – деформованого стану шаруватих балок. *Visnyk of the Lviv University, Mathematics and Mechanics* 55, 96–99.

- Delyavskyy M., Nagórko W., Podhorecki A., 1999b. O pewnej metodzie wyznaczania odkształceń i naprężeń w prostokątnych belkach ortotropowych. *Zeszyty Naukowe Katedry Mechaniki Stosowanej Politechniki Śląskiej* 9, 51–56.
- Delyavskyy M., Krawchuk M., Nagórko W., 2000a. Cross bending of the rectangular orthotropic bar with imperfect-rigid fixing. *Fracture Mechanics and Physics of Construction Materials and Structures* 4, 122–129.
- Delyavskyy M., Krawchuk M., Nagórko W., Onyszka L., 2000b. Метод розрахунку прямокутних навантажених анізотропних плит. *Наукові Ноутатки* 7, 83–86.
- Delyavskyy M., Krawchuk M., Nagórko W., Podhorecki A., 2002. Pure bending of the orthotropic elastic rectangle. *Engng. Trans.* 6, 55–67.
- Matysiak S.J., Nagórko W., 1977. Tarcze i płyty sprężyste z więzami liniowymi dla deformacji. *Mechanika Teoretyczna i Stosowana* 15, 179–193.
- Matysiak S.J., Nagórko W., 1988. On the problem of microperiodic multilayered plates. *Mech. Res. Comm.* 15, 389–396.
- Matysiak S.J., Nagórko W., 1989. Microlocal parameters in a modelling of microperiodic multilayered elastic plates. *Ing.-Arch.* 59, 434–444.
- Matysiak S.J., Nagórko W., 1995. On the wave propagation in periodically laminated composites. *Bull. Acad. Polon. Sci., Sci. Techn.* 43, 1–12.
- Mazur-Śniady K., 1973. Some problems of torsion of prismatic rods as bodies with internal constraints. *Bull. Acad. Polon. Sci., Sci. Techn.* 22, 7–8.
- Mazur-Śniady K., 1993. Macro-dynamics of micro-periodic elastic beams. *J. Theor. Appl. Mech.* 31, 781–793.
- Nagórko W., 1974. Sterowana dyskretyzacja ciał sprężystych z więzami. W: *Optymalizacja w mechanice*. Wydaw. Politechniki Śląskiej, Gliwice, 189–194.
- Nagórko W., 1976. Modele warstwowe grubych płyt i powłok. *Rozprawy Inżynierskie* 24, 759–770.
- Nagórko W., 1981. Sulle soluzioni approssimate in meccanica. *Rivista di Matematica dell'Università di Parma* 4, 65–71.
- Nagórko W., 1982. O błędzie rozwiązań przybliżonych w mechanice. *Mechanika Teoretyczna i Stosowana* 20, 245–251.
- Nagórko W., 1982. Zasada minimalizacji błędów a zagadnienia mechaniki powłok. *Zeszyty Naukowe Wyższej Szkoły Inżynierskiej w Opolu* 89, 159–163.
- Nagórko W., 1983. On approximate structures in mechanics. *Arch. Mech.* 35, 443–456.
- Nagórko W., 1998. Two methods of modelling of periodic nonhomogeneous elastic plates. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics* 36, 291–303.
- Nagórko W., Zieliński J., 1998. Model płyty sprężystej utworzonej z warstw periodycznie niejednorodnych. *Zeszyty Naukowe Katedry Mechaniki Stosowanej Politechniki Śląskiej* 6, 261–266.
- Nagórko W., Zieliński J., 1999. On heat conduction modelling in plates formed by periodically nonhomogeneous layers. *Visnyk of the Lviv University. Series Mathematics and Mechanics* 55, 100–105.
- Utkin J., 1975. On the technical theory of prismatic elastic rods as bodies with internal constraints. *Bull. Acad. Polon. Sci., Sci. Techn.* 23, 1–9.
- Woźniak C., 1973. Constrained Continuous Media I, II, III. *Bull. Acad. Polon. Sci., Sci. Techn.* 19, 109–116, 167–173, 21, 175–182.
- Woźniak C., 1974. Elastic bodies with constraints imposed on deformations, stresses and moments. *Bull. Acad. Polon. Sci., Sci. Techn.* 22, 407–413.
- Woźniak C., 1984. Materials with generalized constraint. *Arch. Mech.* 36, 539–551.
- Woźniak C., 1985a. Constraints in constitutive relations of mechanics. *Mechanika Teoretyczna i Stosowana* 37, 323–341.

- Woźniak C., 1985b. On the modeling of materials and interactions with thermoelectromechanical constraints. *Bull. Acad. Polon. Sci., Sci. Techn.* 33, 249–254.
- Woźniak C., Kleiber M., 1982. *Nieliniowa mechanika konstrukcji*. PWN, Warszawa – Poznań.
- Zieliński J., 2006. *Modelowanie warstwowe niejednorodnych płyt sprężystych*. Rozprawa doktorska. Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska, Uniwersytet Technologiczno-Przyrodniczy w Bydgoszczy, Bydgoszcz.

ON THE MODELLING OF NONHOMOGENEOUS ELASTIC PLATES

Summary. The paper presents the solution of layered plates arbitrary load on the upper the lower surface. It is assumed that the plates can be by combination of both orthotropic and isotropic layers and that the division of plates into layers can be by nonsymmetric. This model ensures continuity of statical and kinematical values on the surface of the division of the plate into the layers. This can be developed by introduction into the description additional functions called correctors. These functions together with displacements of the division surfaces and with given functions describing the displacements on the thickness of plate are used for the construction of the some form of constraints for the three dimensional displacements of the plate. The method for solutions of composite plates is illustrated by the example of the three-layered free supported rectangular plate under the load at the upper surface.

Key words: elastic plates, layered plates, constraints, modelling

Zaakceptowano do druku – Accepted for print: 5.06.2014