

## **MODELOWANIE TOLERANCYJNE PRZEWODNICTWA CIAPŁA W KOMPOZYTACH O STRUKTURZE DWUKIERUNKOWO-PERIODYCZNEJ**

Marta Mazewska, Ewaryst Wierzbicki

Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie

**Streszczenie.** W niniejszej pracy sformułowano tolerancyjny model przewodnictwa ciepła, a następnie w ramach uzyskanego modelu przedstawiono próbę analizy zjawiska temperaturowego efektu brzegowego w wybranych kompozytach o dwukierunkowo periodycznej strukturze materialnej. Jako przedmiot analizy wybrano przegrodę zbudowaną z kompozytu, w którym każda płaszczyzna równoległa do zewnętrznej i wewnętrznej płaszczyzny przegrody jest płaszczyzną dwukierunkowej periodyki. Jako narzędzie modelowania wykorzystano tolerancyjny model przewodnictwa ciepła kompozytu periodycznego. W pracy ograniczono rozważania do przegród o heksagonalnej strukturze materialnej, a także sformułowano i rozwiązano zagadnienie graniczne opisujące zjawisko efektu brzegowego zachodzące w wymienionej przegrodzie.

**Słowa kluczowe:** przewodnictwo ciepła, przewodniki dwukierunkowo-periodyczne, uśrednianie tolerancyjne, efekt brzegowy

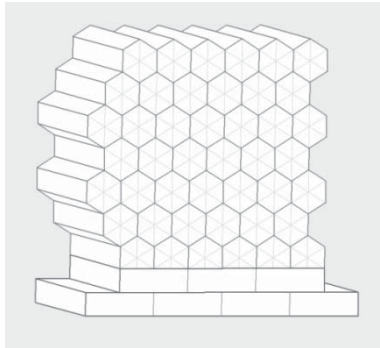
### **WSTĘP**

Każdorazowe wykorzystanie techniki tolerancyjnego uśredniania [Woźniak i Wierzbicki 2000a, Thermomechanics of... 2009, Developments in... 2010, Jędrysiak 2010], jako narzędzia modelowania, wymaga doboru pewnej klasy funkcji kształtu. Czynność ta jest zazwyczaj trudnym do wykonania elementem modelowania. Dla jednokierunkowo periodycznych struktur warstwowych dysponuje się z zasady niezawodnym wyborem kawałkami liniowej funkcji kształtu. Znacznie trudniejsza jest sytuacja w przypadku struktur dwukierunkowo periodycznych. W przypadku struktur heksagonalnych, które są przedmiotem rozważań pracy, wspomniana funkcja kształtu ma swój odpowiednik i zostanie on tutaj wykorzystany. Podobne zagadnienia analizowano w pracach Cieleckiej [1995, 1999], Cieleckiej i Jędrysiaka [2002] oraz Cieleckiej i Woźniaka [1999].

---

Adres do korespondencji – Corresponding author: Marta Mazewska, Ewaryst Wierzbicki, Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego, Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska, Katedra Inżynierii Budowlanej, ul. Nowoursynowska 166, 02-787 Warszawa, e-mail: marta\_mazewska@sggw.pl; ewaryst\_wierzbicki@sggw.pl

Przedmiotem rozważań pracy jest przegroda budowlana o heksagonalnej strukturze materialnej (rys. 1). Należy podkreślić, że ograniczono się tylko do takiego ustawienia tej przegrody, by płaszczyzny równoległe do zewnętrznej i wewnętrznej ściany przegrody były płaszczyznami dwukierunkowej heksagonalnej periodyki. Interesujące wydaje się bowiem pytanie, czy i jak intensywnie tak zbudowana przegroda tłumy zewnętrzne fluktuacje temperatury. Celem pracy jest opisanie i zbadanie zjawiska efektu brzegowego w takiej przegrodzie.



Rys. 1. Przegroda budowlana zbudowana z materiału kompozytowego o strukturze heksagonalnej  
Fig. 1. Wall made of periodic composite with hexagonal-type structure

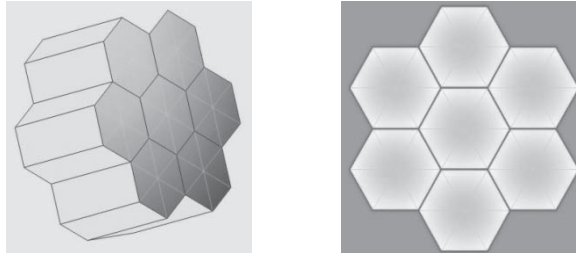
Opisaną przegrodę potraktowano jako szczególny przypadek dwukierunkowo periodycznego przewodnika, którego każda sześciokątna komórka nie zmienia swojej budowy podczas obrotu o kąt  $2\pi/3$  względem osi przechodzącej przez jej środek. Ponieważ jako narzędzie modelowania wybrano technikę tolerancyjnego uśredniania, więc pole temperatury  $w(\cdot, t)$ , określone w obszarze zajęтым przez kompozyt w konfiguracji odniesienia i w ustalonej chwili  $t$  czasu, reprezentowane będzie przez postać znanej hipotezy micro-macro [Woźniak i Wierzbicki 2000a, Thermomechanics of... 2009, Developments in... 2010, Jędrysiak 2010]:

$$w(x, z, t) = u(x, z, t) + g^A(x)\psi^A(x, z, t) \quad (1)$$

w której pole uśrednionej temperatury i pola amplitud fluktuacji temperatury (nazwane tu krócej amplitudami fluktuacji) oznaczono odpowiednio symbolami  $u$ ,  $\psi^A$ . Indeks  $A$  przebiega wartości  $1, \dots, N$ , gdzie  $N$  jest liczbą stosowanych funkcji kształtu  $g^A$ .

Geometrię materiału, z którego zbudowana jest przegroda, zilustrowano na rysunku 2. Ze względu na budowę rozważanej przegrody czasami nazywa się ją przegrodą palisadową. Na rysunkach 1 i 2 cienkimi przerywanymi liniami zaznaczono osie symetrii heksagonalnej struktury przewodnika. Nie są one na ogół osiami symetrii jego struktury materialnej, chociaż może zaistnieć taki przypadek.

Wobec obszernej literatury dotyczącej podstaw i zasad stosowania modelowania tolerancyjnego [Woźniak i Wierzbicki 2000a, Thermomechanics of... 2009, Developments



Rys. 2. Przewodnik o heksagonalnej strukturze materialnej  
 Fig. 2. The conductor with hexagonal-type material structure

in... 2010, Jędrzyak 2010] punktem wyjścia rozważań będzie wielokrotnie opisywany układ równań modelu tolerancyjnego i wyprowadzenie tych równań nie będzie tu przytaczane.

Najpierw przystąpiono do modelowania tolerancyjnego. Będzie ono w tej pracy składać się z dwóch etapów. Pierwszy z nich sprowadza się do uwzględnienia warunków symetrii w stosunku do ogólnych równań modelu tolerancyjnego oraz do uwzględnienia założeń przyjętych zarówno dla struktury materialnej rozważanego kompozytu, jak i dla ogólnej postaci funkcji kształtu. Oznacza to odpowiednie matematyczne przeformułowanie modelu. Etap drugi modelowania polega na wprowadzeniu do modelu odpowiednio wybranych funkcji kształtu. Jako ilustrację dotyczącą rozważań teoretycznych w końcowej części pracy sformułowano zagadnienie graniczne dla równania efektu brzegowego, będącego częścią składową równań modelowych.

W stosunku do stosowanych funkcji kształtu założono niezmienniczość względem obrotów o kąt  $120^\circ$ , identyczną z niezmienniczością opisaną powyżej dla struktury materialnej rozważanego przewodnika. Aby doprowadzić równania tolerancyjnego modelu przewodnictwa ciepła do postaci umożliwiającej analizę zagadnień przewodnictwa ciepła w ośrodku o kompozytowej dwukierunkowo-periodycznej heksagonalnej strukturze materialnej, oznaczono przez  $\langle \cdot \rangle$  całkową operację uśredniania na obszarze powtarzalnej komórki sześciokątnej oraz przytoczono równania modelu tolerancyjnego dla dwukierunkowo-periodycznego przewodnika w postaci [Woźniak i Wierzbicki 2000a]:

$$\begin{aligned}
 (\nabla + \partial)^T [\langle \mathbf{K} \rangle (\nabla + \partial)u] - \langle c \rangle \partial_t u + \nabla^T [\langle \mathbf{K} \nabla g^A \rangle \psi^A] &= \langle f \rangle \\
 \lambda^2 [\langle c g^A g^B \rangle \partial_t \psi^B - \langle a g^A g^B \rangle \partial^T \partial \psi^B] + \lambda \langle \nabla^T g^A \mathbf{K} g^B - g^A \mathbf{K} \nabla g^B \rangle \partial \psi^B + & (2) \\
 + \langle \nabla^T g^A \mathbf{K} \nabla g^B \rangle \psi^B + \langle \nabla^T g^A \mathbf{K} \rangle \nabla u &= -\langle f g^A \rangle
 \end{aligned}$$

w których:  $\nabla = [\partial_1, \partial_2, 0]^T$ ;  $\partial = [0, 0, \partial_3]^T$ ;  $\partial^T = \partial/\partial_t$ , i które otrzymano przy zastosowaniu techniki tolerancyjnego uśredniania z parabolicznego równania przewodnictwa ciepła Fouriera:

$$(\nabla + \partial)^T [\mathbf{K} (\nabla + \partial)w] - c \partial_t w = f \tag{3}$$

Pole uśrednionej temperatury i pola amplitud fluktuacji oznaczono tu odpowiednio symbolami  $u, \psi^A$ ; indeks  $A$  przebiega wartości  $1, \dots, N$ , gdzie  $N$  jest liczbą stosowanych funkcji kształtu  $g^A$ . Pole źródeł ciepła oznaczono symbolem  $f$ . Tu i dalej zastosowano oznaczenia:  $x = [x_1, x_2, 0]^T, z = x_3$ . Wymaga się, by wymienione pola  $u, \psi^A$ , które są podstawowymi niewiadomymi modelu, zdefiniowane w  $\Omega \equiv \Xi \times (-H_1, H_2) \subset R^3$ , były wolnozmieinnymi funkcjami zmiennej  $x \in R^2, u = u(\cdot, z, t), \psi^A(\cdot, z, t) \in SV_0^1(\Omega)$ . W powyższych równaniach występują także pola charakteryzujące strukturę cieplną przewodnika, tzn. ciepło właściwe  $c = c(x, z)$  oraz symetryczna macierz przewodnictwa ciepła:

$$\mathbf{K}(x, z) = \begin{bmatrix} \mathbf{K}(x, z) & \mathbf{h} \\ \mathbf{h}^T & a(z) \end{bmatrix} \quad (4)$$

W szczególnym przypadku macierz  $\mathbf{K}$  będzie także zapisywana w postaci:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Jak już wspomniano, rozważania ograniczono do przewodników z periodyczną strukturą heksagonalną. Strukturę tę dokładnie opisano w następnjej części.

## OPIS WŁASNOŚCI ANIZOTROPOWYCH PRZEWODNIKA

Struktura materialna rozważanego przewodnika składa się z komórek o przekroju sześciokąta foremnego, niezmienniczych względem obrotów o kąt  $120^\circ$  względem środków komórek sześciokątnych. W rozpatrywanym przypadku komórka sześciokątna podzielona będzie na trzy komórki o przekroju w kształcie rombu  $\mathcal{M}_I, \mathcal{M}_{II}, \mathcal{M}_{III}$ . Struktura materialna każdego z trzech rombów w komórce heksagonalnej jest identyczna, lecz anizotropowa. Przez  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_\alpha$  oznaczono macierz obrotu o kąt  $\alpha$ , czyli  $\alpha = 2\pi/3$ :

$$\mathbf{Q}_\alpha \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{Q}(\alpha) & [0,0]^T \\ [0,0] & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\mathbf{Q}_\alpha \equiv \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

Z formalnego punktu widzenia przyjęto zatem dwa założenia dotyczące rozważanego przewodnika. Przyjmując, że rozważana przegroda jest fragmentem pewnej nieskończonej warstwy, założono, że w  $R^2$  dana jest rodzina środków  $x_{\sigma \in \Sigma}$  komórek heksagonalnych.

**Założenie 1.** Struktura materialna rozważanego przewodnika jest niezmiennicza względem obrotu o kąt  $\alpha = 2\pi/3$  wokół każdego środka komórki heksagonalnej:

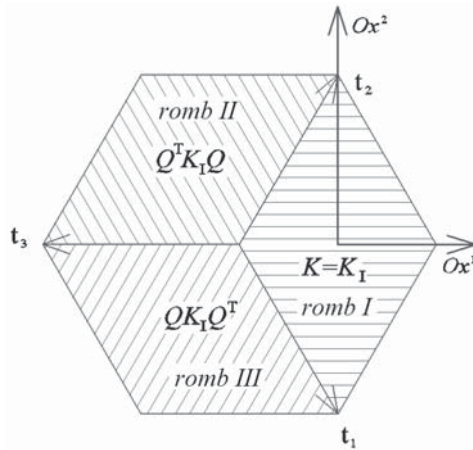
$$\mathbf{K}(x, z) = \mathbf{K}(r_\sigma(x), z), \quad c(x, z) = c(r_\sigma(x), z)$$

gdzie  $r_\sigma(x) = \mathbf{Q}[x - x_\sigma]^T + x_\sigma$  jest obrotem w  $R^2$  dookoła ustalonego środka  $x_\sigma$  dowolnej komórki sześciokątnej.

**Założenie 2.** Funkcje kształtu  $g^1, \dots, g^N$  można posortować na rozłączne trzyelementowe ciągi  $G_s \equiv (g_s^1, g_s^2, g_s^3), s = 1, \dots, n, N = 3n$ , niezmiennicze względem obrotu o kąt  $2\pi/3$  wokół każdego środka  $x_\sigma$  komórki heksagonalnej:

$$g_s^2(x) = g_s^1(r_\sigma(x)), \quad g_s^3(x) = g_s^2(r_\sigma(x)), \quad g_s^1(x) = g_s^3(r_\sigma(x))$$

Komórkę taką zilustrowano na rysunku 3. W celu wyróżnienia wzorcowej (reprezentatywnej) komórki sześciokątnej założono, że rodzina  $x_s$  środków komórek sześciokątnych zawiera początek  $x_0$  przyjętego kartezjańskiego układu współrzędnych i tym samym komórkę o środku  $x_0$  wyróżniono jako komórkę wzorcową (reprezentatywną).



Rys. 3. Pojedyncza komórka heksagonalna o niezmienniczej strukturze materialnej dla obrotów o  $2\pi/3$

Fig. 3. Single hexagonal cell with material structure invariant over  $2\pi/3$  – rotations

Należy podkreślić, że wobec podziału rodziny funkcji kształtu na trzywyrazowe ciągi  $G_s \equiv (g_s^1, g_s^2, g_s^3)$  nie sformułowano wymagań, by każda funkcja kształtu w trójce  $G_s \equiv (g_s^1, g_s^2, g_s^3)$  była inna, czyli by ten trzyelementowy ciąg był stałym ciągiem trzech funkcji. Należy się spodziewać, że sytuacje, w których występują takie trzywyrazowe ciągami stałe, mogą mieć miejsce w modelowaniu struktur dwukierunkowo-periodycznych bardzo często. Jedna z takich sytuacji będzie rozpatrywana w dalszym ciągu pracy.

Spełnienie sformułowanych powyżej założeń sprawia, że możliwe jest zapisanie macierzy przewodnictwa ciepła dla wszystkich trzech rombów  $\mathcal{M}_I, \mathcal{M}_{II}, \mathcal{M}_{III}$ :

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{K}_I & \text{dla } \mathbf{x} = (x, z) \in \mathbb{M}_I \times (-H_1, H_2) \\ \mathbf{K}_{II} = \mathbf{Q}^T \mathbf{K}_I \mathbf{Q} & \text{dla } \mathbf{x} = (x, z) \in \mathbb{M}_{II} \times (-H_1, H_2) \\ \mathbf{K}_{III} = \mathbf{Q}^T \mathbf{K}_{II} \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \mathbf{K}_I \mathbf{Q}^T & \text{dla } \mathbf{x} = (x, z) \in \mathbb{M}_{III} \times (-H_1, H_2) \end{cases} \quad (7)$$

gdzie  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_\alpha$  jest macierzą obrotu o kąt  $\alpha$  dla  $\alpha = 2\pi/3$ . Podobnie niezmienniczość względem obrotów pola ciepła właściwego w obszarach poszczególnych rombów:

$$c(\mathbf{x}) = \begin{cases} c_I & \text{dla } \mathbf{x} = (x, z) \in \mathbb{M}_I \times (-H_1, H_2) \\ c_{II} & \text{dla } \mathbf{x} = (x, z) \in \mathbb{M}_{II} \times (-H_1, H_2) \\ c_{III} & \text{dla } \mathbf{x} = (x, z) \in \mathbb{M}_{III} \times (-H_1, H_2) \end{cases} \quad (8)$$

oznacza, że  $c_I = c_{II} = c_{III}$ , czyli że ciepło właściwe jest stałe prawie wszędzie w obszarze przegrody. W celu zwiększenia czytelności dalszej części pracy w miejscach, gdzie rozważania będą dotyczyły stałych wartości macierzy przewodnictwa odniesionych do obszaru pierwszego rombu, zastosowano dla tych stałych greckie litery  $\mathbf{K}_I = (\kappa_{ij})$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ .

Założono ponadto, że długość  $\lambda$  boku pojedynczej komórki sześciokątnej jest dużo mniejsza od charakterystycznego wymiaru obszaru  $\Xi$  i podkreślono w tym miejscu, że przedmiotem rozważań pracy jest zatem mikroperiodyczny przewodnik anizotropowy, którego własności termiczne wyznaczone są stałą macierzą przewodnictwa  $\mathbf{K}_I$  pierwszego rombu i stałym ciepłem właściwym pierwszego rombu  $\mathbb{M}_I$  oraz założeniami 1 i 2.

## MODELOWANIE TOLERANCYJNE

Najtrudniejszym elementem tolerancyjnego modelowania struktur dwukierunkowo-periodycznych jest dobór odpowiednich funkcji kształtu. To właśnie funkcje kształtu określają zakres badanych w tolerancyjnym modelu przewodnictwa ciepła fluktuacji temperatury i możliwych odpowiedzi przewodnika poddanego takim fluktuacjom. Nie mogą to być funkcje dowolne, lecz muszą spełniać szereg warunków [Woźniak i Wierzbicki 2000a, Thermomechanics of... 2009, Developments in... 2010].

Modelowanie tolerancyjne rozważanego przewodnika sprowadza się tu do wyboru odpowiednich funkcji kształtu. Rozważania ograniczono do jednego stałego trzejelementowego ciągu  $G = G_s \big|_{s=1} \equiv (g_s^1, g_s^2, g_s^3) \big|_{s=1} = (g^1, g^2, g^3)$  złożonego z trzech jednokowych funkcji kształtu  $g \equiv g^1 = g^2 = g^3$ , niezmieniających się podczas obrotu płaszczyzny o kąt  $2\pi/3$  wokół środka  $x_s$  dowolnej komórki heksagonalnej (założenie 2). Oznaczając przez  $\psi \equiv \psi_I + \psi_{II} + \psi_{III}$  sumę amplitud fluktuacji odpowiadających funkcjom kształtu  $(g^1, g^2, g^3)$ , hipotezę micro-macro (1) zapisano w postaci:

$$w(x, z, t) = u(x, z, t) + g(x)\psi(x, z, t) \quad (9)$$

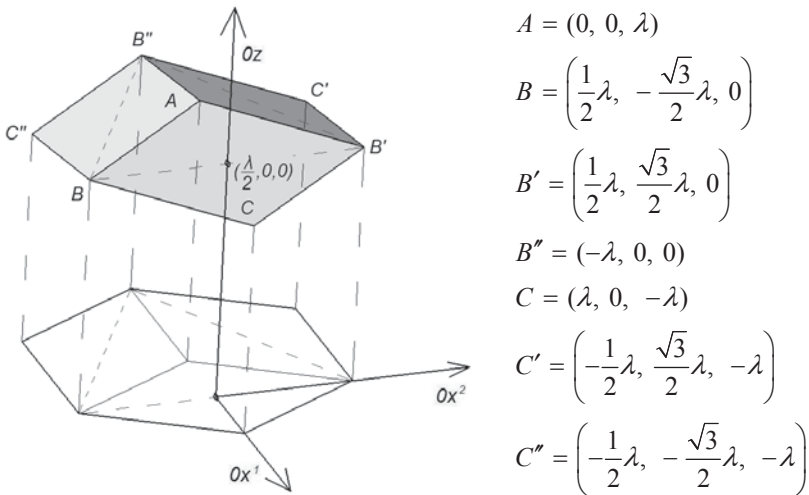
Funkcję  $g(\cdot)$  nazwano bazową funkcją kształtu. Inspiracją do wykorzystania opisanej poniżej bazowej funkcji kształtu są liczne prace [Cielecka 1995 i 1999, Cielecka i Woź-

niak 1999, Woźniak i Wierzbicki 2000b, Kula i in 2012], w których z sukcesami była już wykorzystana.

Wartości bazowej funkcji kształtu wyznaczono przez jej wartości w obrębie pierwszego z rombów  $\mathcal{M}_I$  wzorcowej komórki sześciokątnej (rys. 3). Jako wzorcową komórkę sześciokątną wybrano pojedynczą komórkę sześciokątną położoną względem wprowadzonego układu współrzędnych tak, jak to pokazano na rysunku 3. Wzór funkcji kształtu w rombie  $\mathcal{M}_I$  ma postać  $g_I(x_1, x_2) = -2x_1 + \lambda$ . Uzyskano stąd wartości tej funkcji kształtu w obrębie wszystkich trzech rombów  $\mathcal{M}_I, \mathcal{M}_{II}, \mathcal{M}_{III}$ :

$$g(x) = \begin{cases} g_I(x) & \text{dla } x \in \mathcal{M}_I \\ g_{II}(r_s(x)) = g_I\left(-\frac{1}{2}x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_2, -\frac{\sqrt{3}}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2\right) & \text{dla } x \in \mathcal{M}_{II} \\ g_{III}(r_s(r_s(x))) = g_I\left(-\frac{1}{2}x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_2, -\frac{\sqrt{3}}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2\right) & \text{dla } x \in \mathcal{M}_{III} \end{cases} \quad (10)$$

Fragment wykresu stosowanej funkcji kształtu zilustrowano na rysunku 4.



Rys. 4. Fragment wykresu stosowanej funkcji kształtu  $g(x)$

Fig. 4. Fragment of the graph of applied shape function  $g(x)$

W związku z tym można zapisać uproszczoną postać modelu tolerancyjnego (2):

$$\begin{aligned} (\nabla + \partial)^T [\langle \mathbf{K} \rangle (\nabla + \partial)u] - \langle c \rangle \partial_t u + \nabla^T [\langle \mathbf{K} \nabla g \rangle \psi] &= \langle f \rangle \\ \lambda^2 [\langle c g g \rangle \partial \psi - \langle a g g \rangle \partial^T \partial \psi] + \langle \nabla^T g_r \mathbf{K} \nabla g \rangle \psi + \langle \nabla^T g \mathbf{K} \rangle \nabla u &= -\langle f g \rangle \end{aligned} \quad (11)$$

Postać równań modelu (11) ma bardzo poważną wadę. Nie uwzględnia ona bowiem wpływu niezmienniczych własności rozważanego przewodnika na wykorzystane tu współczynniki. Jest możliwe jednak przeformułowanie tych równań do postaci uwolnionej od tej wady. Aby uzyskać to przeformułowanie, wprowadzono dla każdego  $x \in R^2$  ortogonalną macierz:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{P}(x) & [0, 0]^T \\ [0, 0] & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta(x) & -\sin \beta(x) & 0 \\ \sin \beta(x) & \cos \beta(x) & 0 \\ 0 & 0 & \langle \text{grad } g \rangle \end{bmatrix} \quad (12)$$

gdzie

$$\text{grad } g(x) = \rho(x)[\cos \beta(x), \cos \beta(x)] \quad (13)$$

Przy powyższych oznaczeniach gradient funkcji kształtu może być zapisany jako:

$$\nabla g(x) = \rho(x)\mathbf{P}(x)\mathbf{e}, \quad \mathbf{e} = [1, 0, 0]^T \quad (14)$$

W celu przeprowadzenia kolejnych obliczeń oznaczono także odpowiednio przez  $\langle \cdot \rangle_I$ ,  $\langle \cdot \rangle_{II}$ ,  $\langle \cdot \rangle_{III}$  średnie całkowe na obszarach rombów  $\mathcal{R}_I$ ,  $\mathcal{R}_{II}$ ,  $\mathcal{R}_{III}$  oraz:

$$\mathbf{P}_I = \langle \rho \rangle_I^{-1} \langle \rho \mathbf{P} \rangle_I, \quad \mathbf{P}_{II} = \langle \rho \rangle_{II}^{-1} \langle \rho \mathbf{P} \rangle_{II}, \quad \mathbf{P}_{III} = \langle \rho \rangle_{III}^{-1} \langle \rho \mathbf{P} \rangle_{III} \quad (15)$$

Należy także zwrócić uwagę na tożsamości:

$$\mathbf{P}_{II} = \mathbf{Q}^T \mathbf{P}_I \mathbf{Q}, \quad \mathbf{P}_{III} = \mathbf{Q}^T \mathbf{P}_{II} \mathbf{Q}, \quad \langle \rho \rangle_I = \langle \rho \rangle_{II} = \langle \rho \rangle_{III} \quad (16)$$

Dla rozpatrywanej funkcji bazowej  $\mathbf{P}_I = \mathbf{I}$ , gdzie przez  $\mathbf{I}$  oznaczono macierz jednostkową wymiaru  $3 \times 3$ , oraz  $\langle \rho \rangle_I = 2$ .

Przytoczono także dwie pożyteczne tożsamości macierzowe, spełnione przez dowolną macierz kwadratową  $\mathbf{B}$  wymiaru  $3 \times 3$ .

– pierwsza tożsamość

$$(i) \quad \mathbf{B} + \mathbf{Q}^T \mathbf{B} \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^{2T} \mathbf{B} \mathbf{Q}^2 = 3 \begin{bmatrix} \frac{b_{11} + b_{22}}{2} & \frac{b_{12} - b_{21}}{2} & 0 \\ \frac{-b_{12} + b_{21}}{2} & \frac{b_{11} + b_{22}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{bmatrix} \stackrel{b_{12} = b_{21}}{=} \\ = 3 \begin{bmatrix} \frac{b_{11} + b_{22}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{b_{11} + b_{22}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{bmatrix}$$



– druga tożsamość

$$(ii) \langle \mathbf{Q}_\alpha^T \mathbf{B} \mathbf{Q}_\beta \rangle = \begin{bmatrix} \left\langle \frac{b_{11} + b_{22}}{2} \cos(\alpha - \beta) \right\rangle_I & \left\langle \frac{b_{12} - b_{21}}{2} \cos(\alpha - \beta) \right\rangle_I & 0 \\ -\left\langle \frac{b_{12} - b_{21}}{2} \cos(\alpha - \beta) \right\rangle_I & \left\langle \frac{b_{11} + b_{22}}{2} \cos(\alpha - \beta) \right\rangle_I & 0 \\ 0 & 0 & \langle b_{33} \rangle_I \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} \left\langle \frac{x_{21} - x_{12}}{2} \sin(\alpha - \beta) \right\rangle_I & \left\langle \frac{x_{11} + x_{22}}{2} \sin(\alpha - \beta) \right\rangle_I & 0 \\ -\left\langle \frac{x_{11} + x_{22}}{2} \sin(\alpha - \beta) \right\rangle_I & \left\langle \frac{x_{21} - x_{12}}{2} \sin(\alpha - \beta) \right\rangle_I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ostatnia, trzecia tożsamość jest szczególnym przypadkiem tożsamości drugiej dla symetrycznej macierzy kwadratowej  $\mathbf{B}$  wymiaru  $3 \times 3$ :

– trzecia tożsamość

$$(iii) \langle \mathbf{Q}_\alpha^T \mathbf{B} \mathbf{Q}_\beta \rangle = \begin{bmatrix} \left\langle \frac{b_{11} + b_{22}}{2} \cos(\alpha - \beta) \right\rangle_I & \left\langle \frac{b_{11} + b_{22}}{2} \sin(\alpha - \beta) \right\rangle_I & 0 \\ -\left\langle \frac{b_{11} + b_{22}}{2} \sin(\alpha - \beta) \right\rangle_I & \left\langle \frac{b_{11} + b_{22}}{2} \cos(\alpha - \beta) \right\rangle_I & 0 \\ 0 & 0 & \langle b_{33} \rangle_I \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \left\langle \frac{b_{11} + b_{22}}{2} \cos(\alpha - \beta) \right\rangle_I \mathbf{I} + \left\langle \frac{b_{11} + b_{22}}{2} \sin(\alpha - \beta) \right\rangle_I \mathbf{Q}_{\pi/2}^T & \boldsymbol{\theta} \\ \boldsymbol{\theta}^T & \langle b_{33} \rangle_I \end{bmatrix}$$

Stosując powyższe tożsamości, kolejne współczynniki modelu (11) można zapisać w postaciach, w których widać dominację wpływu geometrycznej budowy przegrody na jej termiczne własności makroskopowe. Oto obliczenie dla pierwszego z tych współczynników:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{K} \nabla g \rangle &= \langle \nabla^T g \mathbf{K} \rangle^T = \\ &= \frac{1}{3} (\langle \rho \mathbf{K} \mathbf{P} \rangle_I + \langle \rho \mathbf{K} \mathbf{P} \rangle_{II} + \langle \rho \mathbf{K} \mathbf{P} \rangle_{III}) \mathbf{e} = \\ &= \frac{1}{3} (\mathbf{K}_I \mathbf{P}_I + \mathbf{Q}^T \mathbf{K}_I \mathbf{P}_I \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \mathbf{K}_I \mathbf{P}_I \mathbf{Q}^T) \mathbf{e} \stackrel{P_I = I}{=} \\ &= \frac{1}{3} (\mathbf{K}_I + \mathbf{Q}^T \mathbf{K}_I \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \mathbf{K}_I \mathbf{Q}^T) \mathbf{e} = \frac{1}{2} [\kappa_{11} + \kappa_{22}, 0, 0]^T \end{aligned} \tag{17}$$

Na podobnej drodze obliczono drugi z nich:

$$\begin{aligned}
 \langle \nabla^T \mathbf{g} \mathbf{K} \nabla \mathbf{g} \rangle &= \\
 &= \frac{1}{3} \mathbf{e}^T (\langle \rho^2 \mathbf{P}^T \mathbf{K} \mathbf{P} \rangle_I + \langle \rho^2 \mathbf{P}^T \mathbf{K} \mathbf{P} \rangle_{II} + \langle \rho^2 \mathbf{P}^T \mathbf{K} \mathbf{P} \rangle_{III}) \mathbf{e} = \\
 &= \frac{1}{3} \mathbf{e}^T (\mathbf{P}_I^T \mathbf{K}_I \mathbf{P}_I + \mathbf{Q}^T \mathbf{P}_I^T \mathbf{K}_I \mathbf{P}_I \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \mathbf{P}_I^T \mathbf{K}_I \mathbf{P}_I \mathbf{Q}^T) \mathbf{e} \stackrel{P_I=I}{=} \\
 &= [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} \frac{\kappa_{11} + \kappa_{22}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\kappa_{11} + \kappa_{22}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} (\kappa_{11} + \kappa_{22})
 \end{aligned} \tag{18}$$

W końcu obliczono trzeci współczynnik:

$$\langle \mathbf{K} \rangle = \frac{1}{3} \langle \mathbf{K}_I + \mathbf{Q}^T \mathbf{K}_I \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \mathbf{K}_I \mathbf{Q}^T \rangle_I = \begin{bmatrix} \frac{\kappa_{11} + \kappa_{22}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\kappa_{11} + \kappa_{22}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{33} \end{bmatrix} \tag{19}$$

i dla współczynników proporcjonalnych do średniej  $\langle \mathbf{g} \mathbf{g} \rangle_I = \frac{1}{6} \lambda^2$ :

$$\begin{aligned}
 \langle c \mathbf{g} \mathbf{g} \rangle &= c_I \langle \mathbf{g} \mathbf{g} \rangle_I = \frac{1}{6} \lambda^2 c_I \\
 \langle a \mathbf{g} \mathbf{g} \rangle &= \kappa_{33} \langle \mathbf{g} \mathbf{g} \rangle_I = \frac{1}{6} \lambda^2 \kappa_{33}
 \end{aligned} \tag{20}$$

Nie wprowadzając żadnych ograniczeń dotyczących źródeł ciepła, zaznaczono tylko, że:

$$\langle f \mathbf{g} \rangle = \frac{1}{3} (\langle f \mathbf{g} \rangle_I + \langle f \mathbf{g} \rangle_{II} + \langle f \mathbf{g} \rangle_{III}) \tag{21}$$

Uwzględniając nowe postaci współczynników i uproszczoną postać hipotezy micro-macro, zapisano równania modelowe (11) w postaci:

$$\begin{aligned}
 & (\nabla + \partial)^T \begin{bmatrix} \frac{\kappa_{11} + \kappa_{22}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\kappa_{11} + \kappa_{22}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{33} \end{bmatrix} (\nabla + \partial)u - c_I \partial_t u + \nabla^T \left[ \frac{1}{2} [\kappa_{11} + \kappa_{22}, 0, 0]^T \psi^r \right] = \\
 & = \frac{1}{3} (f_I + f_{II} + f_{III}) \\
 & \lambda^2 \left[ \frac{1}{6} \lambda^2 c_I \partial \psi^s - \frac{\sqrt{3}}{3} \lambda^2 \kappa_{33} \partial^T \partial \psi^s \right] + \\
 & + \frac{1}{2} (\kappa_{11} + \kappa_{22}) \psi^s + \frac{1}{2} [\kappa_{11} + \kappa_{22}, 0, 0] \nabla u = -\frac{1}{3} (\langle fg \rangle_I + \langle fg \rangle_{II} + \langle fg \rangle_{III})
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

Równania te stanowią punkt wyjścia do dalszych rozważań.

### ANALIZA ZJAWISKA EFEKTU BRZEGOWEGO

Dla rozważanej w pracy przegrody pod pojęciem efektu brzegowego rozumiemy zjawisko polegające na „wygaszaniu” przez przegrodę zewnętrznych zmian temperatury. Zmiany temperatury są reprezentowane w zastosowanym modelu przez pole amplitudy fluktuacji  $\psi$ . W celu dokonania próby analizy tego zjawiska wyodrębniono z równań modelu (11) równanie efektu brzegowego [Cielecka i Woźniak 1999, Kula i in. 2012]:

$$\lambda^2 [\langle agg \rangle \partial^T \partial \psi] - \langle \nabla^T g \mathbf{K} \nabla g \rangle \psi = 0
 \tag{23}$$

i sformułowano bezwymiarową postać tego równania. W tym celu położono  $\kappa = \frac{\kappa_{33}}{\kappa_{11} + \kappa_{22}}$  oraz wprowadzono następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned}
 H &= H_2 - H_1, \quad \delta = \frac{\lambda}{H}, \quad \gamma(\xi) = \lambda^{-1} g(H\xi) \\
 \varphi(\xi) &= \frac{1}{H} \psi(z), \quad z = H\xi, \quad \kappa_0 = \langle \kappa \gamma \gamma \rangle
 \end{aligned}
 \tag{24}$$

Nową, bezwymiarową, nieznaną funkcję  $\varphi(\cdot)$  nazwano bezwymiarową amplitudą fluktuacji. Stała  $\delta$  to bezwymiarowy parametr skali. Wykorzystując powyższe oznaczenia, można zapisać bezwymiarowe równanie efektu brzegowego:

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \varphi = 0
 \tag{25}$$

gdzie  $\varepsilon = \delta^2 (a)_{tr(K)}$  jest małym parametrem.

Poniżej przeanalizowano zjawisko efektu brzegowego (25), przy założeniu następujących warunków granicznych:

$$\begin{aligned}\varphi(x, \xi = \xi_1) &= \varphi_1(x) \\ \varphi(x, \xi = \xi_2) &= \varphi_2(x)\end{aligned}\quad (26)$$

oraz biorąc pod uwagę, że:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \frac{H_1}{H}, \quad \xi_2 = \frac{H_2}{H} \\ \psi_1(H\xi) &= H\varphi_1(\xi), \quad \psi_2(H\xi) = H\varphi_2(\xi)\end{aligned}\quad (27)$$

Sformułowane zagadnienie ilustruje sposób wygaszania przez przegrodę zewnętrznych zaburzeń temperatury reprezentowanych na ścianach wyznaczonych równaniami:  $z = H_1$  i  $z = H_2$ , odpowiednio przez amplitudy fluktuacji  $\psi_1(H\xi) = H\varphi_1(\xi)$ ,  $\psi_2(H\xi) = H\varphi_2(\xi)$  i przyjętą w rozważaniach funkcję kształtu. Rozwiązanie powyższego zagadnienia można zapisać w postaci:

$$\begin{aligned}\varphi(x, z) &= \left( \frac{e^{\frac{2}{\delta}}}{e^{\frac{2}{\delta}} - 1} \varphi_1 - \frac{e^{\frac{1}{\delta}}}{e^{\frac{2}{\delta}} - 1} \varphi_2 \right) e^{-\frac{\xi}{\delta}} + \\ &+ \left( -\frac{1}{e^{\frac{2}{\delta}} - 1} \varphi_1 + \frac{e^{\frac{1}{\delta}}}{e^{\frac{2}{\delta}} - 1} \varphi_2 \right) e^{\frac{\xi}{\delta}}\end{aligned}\quad (28)$$

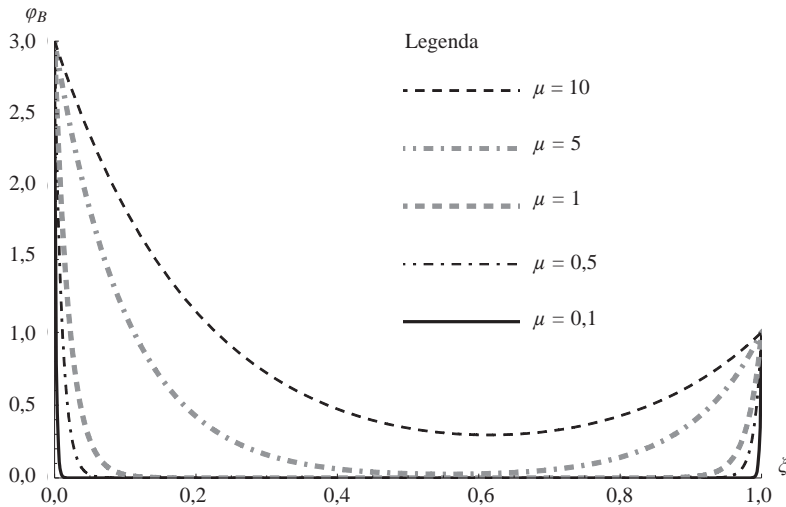
Należy zauważyć, że uzyskane rozwiązanie zależy od trzech wyrazów  $\kappa_{11}, \kappa_{22}, \kappa_{33}$  za pośrednictwem bezwymiarowego parametru ułamka  $\kappa = \frac{\kappa_{33}}{\kappa_{11} + \kappa_{22}}$  oraz od bezwymiarowego parametru skali  $\delta$ .

Rysunek 5 przedstawia zależność bezwymiarowej amplitudy fluktuacji dla wybranych wartości parametru  $\delta$  oraz wybranych wartości ilorazu  $\kappa_{33}/(\kappa_{11} + \kappa_{22})$  reprezentowanych stałą  $\mu$ :

$$\delta = \frac{1}{20}; \quad \sqrt{\langle \mathcal{N} \rangle} = \frac{1}{\sqrt{6}} \lambda; \quad \mu = \sqrt{\frac{a}{\text{tr}(\mathbf{K})}} = \sqrt{\frac{\kappa_{33}}{\kappa_{11} + \kappa_{22}}}\quad (29)$$

Stąd  $\delta_{a,K} = \frac{1}{20\sqrt{6}} \mu$ , gdzie  $\frac{1}{20\sqrt{6}} \approx 0,0204$ .

Dla założonych warunków brzegowych  $\varphi_1 = 3$ ,  $\varphi_2 = 1$  i kilku przykładowo przyjętych wartości  $\mu$  uzyskano ilustrację rozwiązania (28) przedstawioną na rysunku 5.



Rys. 5. Rozwiązanie zagadnienia brzegowego dla przykładowych wartości parametru  $\mu$   
 Fig. 5. The solution of boundary effect problem for few example values of parameter  $\mu$

Uzyskane rozwiązania sformułowanego zagadnienia brzegowego prowadzą do wniosku, że intensywność tłumienia zewnętrznych zmian temperatury zależy od wielkości parametru mikrostruktury i termicznych właściwości przegrody reprezentowanych wielkością  $\kappa_{33}/(\kappa_{11} + \kappa_{22})$ , utworzoną przez składowe macierzy przewodnictwa w obszarze pierwszego rombu.

## PODSUMOWANIE

W pracy zaprezentowany został sposób dostosowania tolerancyjnego modelu przewodnictwa ciepła dla przewodnika o dwukierunkowo-periodycznej heksagonalnej strukturze materialnej. Rozważony został szczególny przypadek takiej struktury, w której pojedyncza komórka sześciokątna składa się z trzech składników o przekroju rombu, a każdy z tych składników ma taką samą wewnętrzną strukturę materialną. W obrębie każdej komórki heksagonalnej struktura materialna jest niezmiennicza względem obrotu o kąt  $2\pi/3$  względem środka tej komórki. Również funkcja kształtu opisująca strukturę kolejnych składników o przekroju rombu posiada tę własność. W związku z tym przy zastosowaniu tylko jednej funkcji kształtu w równaniach modelu redukuje się składnik z pierwszą pochodną amplitudy fluktuacji, co znacznie upraszcza analizę uśrednionego modelu tolerancyjnego rozważanego przewodnika. Wykazano, że otrzymany uśredniony model jest modelem izotropowym.

Jako ilustrację rozważań z równań modelu wyodrębniono tzw. równanie efektu brzegowego, które w rozważanym przypadku jest równaniem różniczkowym zwyczajnym drugiego rzędu. Dla tego równania sformułowano zagadnienie brzegowe i przedstawiono jego rozwiązanie dla rozważanej struktury materialnej. Można na tej podstawie stwierdzić, że możliwe jest takie projektowanie struktury materialnej spełniającej dwa założen-

nia przedstawione na początku pracy, aby uzyskać jak największe stłumienie amplitudy fluktuacji przy przejściu od zewnętrznych powierzchni przegrody ku jej wnętrzu. Istnieje więc możliwość konstruowania przegród budowlanych z prezentowanego kompozytu tak, aby uzyskiwać możliwie najlepsze własności izolacyjne.

Należy podkreślić, że otrzymane wyniki dotyczą tylko najprostszej postaci oscylacji temperatury, wyznaczonej przez zastosowaną pojedynczą funkcję kształtu.

W pracy nie uzyskano odpowiedzi na pytanie, czy bardziej skomplikowane oscylacje temperatury mają duży wpływ na zmianę opisanego sposobu wygaszania tych oscylacji wewnątrz rozważanej przegrody, a także, czy geometria przewodnika, a nie jego struktura termiczna, ma dominujący wpływ na makrowłasności przewodnika, jak to wykazano dla rozważanego przypadku.

## PIŚMIENNICTWO

- Cielecka I., 1995. On continuum modelling the dynamic behaviour of certain composite lattice-type structures. *J. Theor. Appl. Mech.* 33, 351–359.
- Cielecka I., 1999. Continuum modelling of the dynamic problems for lattice-type plates. *Visnyk Lviv Univ. Ser. Mech.-Math.* 55, 55–63.
- Cielecka I., Jędrzyński J., 2002. On continuum modelling of the dynamic behaviour of periodic lattice-type plates with a complex structure. *J. Theor. Appl. Mech.* 40, 23–46.
- Cielecka I., Woźniak C., 1999. Dynamic behaviour of honeycomb structures. *Zeszyty Naukowe Katedry Mechaniki Stosowanej, Politechnika Śląska* 9, 35–38.
- Developments in Mathematical Modeling and Analysis of Microstructured Media*, 2010. Ed. C. Woźniak et al. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice.
- Jędrzyński J., 2010. Thermomechanics of laminates, plates and shells with the functional gradation of properties [Thermomechanika laminatów, płyt i powłok o funkcyjnej gradacji własności] Technological University of Łódź, Łódź.
- Kula D., Mazewska M., Wierzbicki E., 2012. Some remarks on the tolerance averaging of heat conduction in chessboard palisade-type periodic composites. *Przegląd Naukowy Inżynieria i Kształtowanie Środowiska* 57, 131–140.
- Thermomechanics of microheterogeneous solids and structures. Tolerance averaging approach, 2009. Ed. C. Woźniak et al. Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź.
- Wierzbicki E., Siedlecka U., 2004. Isotropic models for a heat transfer in periodic composites. *Proc. Appl. Math. Mech.* 4, 502–503.
- Wierzbicki E., Siedlecka U., 2004. An averaged isotropic model of nonstationary heat transfer in anisotropic hexagonal-type conductors. *J. Theor. Appl. Mech.* 42 (4), 755–770.
- Wierzbicki E., 2010. On the tolerance averaging of heat conduction for periodic hexagonal-type composites. *Civil and Environmental Engineering Reports* 5.
- Woźniak C., Wierzbicki E., 2000a. Averaging techniques in thermomechanics of composite solids. Technological University of Częstochowa, Częstochowa.
- Woźniak C., Wierzbicki E., 2000b. On the dynamic behaviour of honeycomb based composite solids. *Acta Mechanica* 141, 161–172.

## **SOME REMARKS ON THE TOLERANCE AVERAGING OF HEAT CONDUCTION IN COMPOSITES WITH BIPERIODIC STRUCTURE**

**Abstract.** This paper shows some attempt of analysis of temperature boundary effect in wall with bi-periodic material structure in which every surface parallel to outside and inside surface is bi-periodic surface. As the instrument of modeling there are used the tolerance model equations for periodic composite. The considerations are limited to walls made with material with hexagonal-type structure. There is also formulated and solved boundary problem for boundary effect in mentioned wall.

**Key words:** heat conduction, biperiodic conductors, tolerance averaging, boundary effect

Zaakceptowano do druku – Accepted for print: 20.02.2013