

DYNAMIKA MOSTU SOLIDARNOŚCI W PŁOCKU

Wojciech Gilewski, Andrzej Kasprzak

Politechnika Warszawska, Warszawa

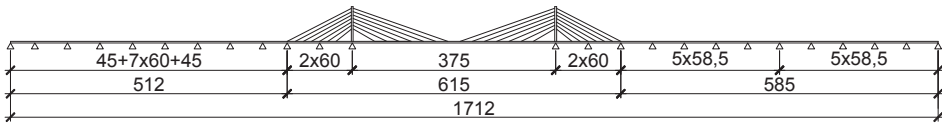
Streszczenie. W pracy przedstawiono analizę dynamiczną mostu podwieszonoego w Płocku (mostu Solidarności). Do obliczeń zbudowano model metodą elementów skończonych przy wykorzystaniu programu SOFISTIK. Jako podstawę do analizy dynamicznej wykonano obliczenia częstości drgań własnych i postaci drgań. Analizę drgań niestabilnych przeprowadzono metodą Newmarka i metodą superpozycji modalnej. Porównano obie te metody pod kątem kosztu obliczeń. Podano, przy jakich warunkach można z powodzeniem stosować metodę superpozycji modalnej.

Słowa kluczowe: dynamika budowli, mosty, metoda elementów skończonych

WSTĘP

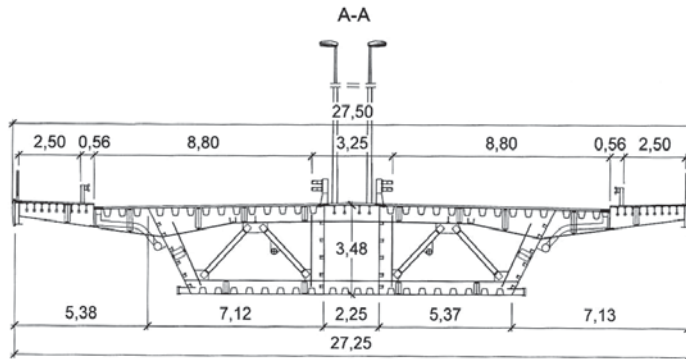
Przedmiotem pracy jest modelowanie obiektu mostowego w celu wykonania analizy dynamicznej. Zbudowano model MES mostu, dokonano analizy modalnej oraz wykonano obliczenia efektów oddziaływania dynamicznego na model za pomocą metody Newmarka, jako przykładu metody bezpośredniego całkowania równań ruchu, oraz za pomocą metody superpozycji modalnej.

Analizowano most Solidarności przez Wisłę w Płocku. Obiekt jest mostem drogowym o dwóch pasach ruchu w każdą stronę wraz z chodnikami po obu stronach pomostu. Został on zaprojektowany jako element wschodniego obejścia drogowego miasta. Łączna długość obiektu mostowego wraz z estakadami i mostem nad terenami zalewowymi wynosi 1712 m. Najważniejszą – nurtową część przeprawy – stanowi most podwieszony (rys. 1). Jest to dwupylonowa konstrukcja o rozpiętościach teoretycznych przęseł wynoszących odpowiednio $60 + 60 + 375 + 60 + 60$ m, co daje łączną rozpiętość wynoszącą 615 m. Co istotne, podpory przedskrajne służą jedynie dodatkowemu kotwieniu konstrukcji i pracują na wyrwanie, równoważąc ciężar i obciążenia z przęsła nurtowego.



Rys. 1. Schemat mostu Solidarności w Płocku
 Fig. 1. Scheme of the Solidarity Bridge in Płock

Pomost, o ciągłym schemacie statycznym, jest swobodnie podparty na przyczółkach i podporach sąsiadujących z przęsłem nurtowym oraz podwieszony do dwóch pylonów typu „I”, wysokości 63,67 m każdy, za pomocą 28 par cięgień ułożonych w niesymetrycznym układzie wachlarzowym. Stalowe pylony zostały utwierdzone w pomoście. Mają one przekrój skrzynkowy, usztywniony teownikami (rys. 2). Przenoszenie sił pionowych z pomostu (poza odrywaniem) oraz swoboda przesuwu konstrukcji zostały zapewnione przez 12 łożysk (po 3 na podporze). Pomost został skonstruowany jako trzykomorowy przekrój skrzynkowy z płytą ortotropową. Wysokość przekroju wynosi 3,5 m, natomiast całkowita szerokość (wraz ze wspornikami) – 27,5 m. Wewnątrz skrzynki rozmieszczone są kratownicowe stężenia poprzeczne. W strefach podporowych i strefach zakotwień zastosowano przepony pełnościenne. Na moście znajdują się dwie jezdnie, szerokości 8,80 m każda, dwa chodniki po obu stronach pomostu, po 2,50 m każdy, oraz pas rozdziału szerokości 2,50 m. Przekrój skonstruowano ze stali Fe 510 DD (18G2A).



Rys. 2. Przekrój poprzeczny pomostu [Chróścielewski i in. 2007]
 Fig. 2. Cross-section of the deck [Chróścielewski et al. 2007]

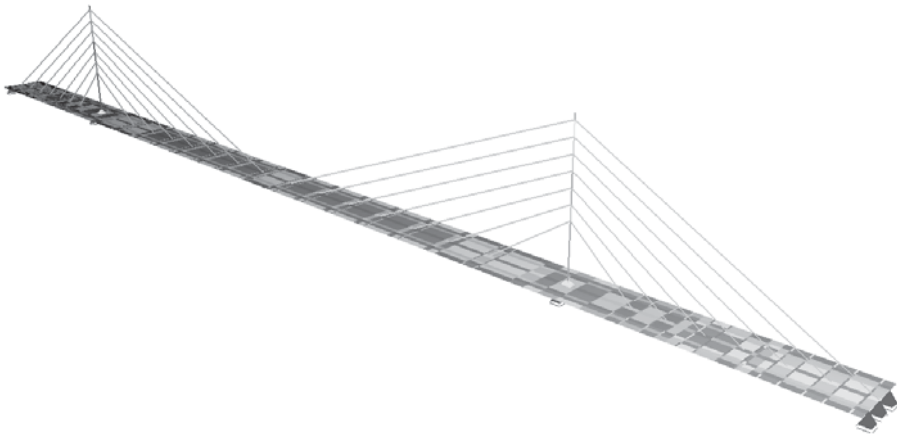
MODEL SKOŃCZENIE ELEMENTOWY

Celem pracy było zbudowanie możliwie prostego modelu MES [Hughes 1987, Zienkiewicz i Taylor 2006] obiektu, dobrze odwzorowującego charakterystyki dynamiczne rozpatrywanej konstrukcji, związane z drganiami skrętnymi i giętymi pomostu w płaszczyźnie pionowej (podwieszenia). Drgania w płaszczyźnie poziomej (pomostu) nie były brane pod uwagę. Taki typ modelu pozwala na badanie odpowiedzi konstrukcji na obciążenia dynamiczne związane z ruchem taboru (np. przejazd pojazdu przez dylatację,

nierówność nawierzchni, hamowanie pojazdu). Nie jest jednak odpowiedni do badań związanych z obciążeniami dynamicznymi działającymi w poprzek obiektu (np. działanie wiatru, uderzenie boczne pojazdu w barierę).

Modelowanie wykonano w programie SOFiSTiK 23. Zbudowano model w przestrzeni trójwymiarowej. Pylon zbudowano z elementów prętowych typu „non-conforming Timoshenko beam” [DYNA 2007], dwuwęzłowych, definiując zmienną geometrię przekrojów w programie, który na tej podstawie wyznaczył ich parametry geometryczne. Za pomocą modyfikacji ciężaru własnego materiału konstrukcyjnego w poszczególnych przekrojach w elementach modelujących pylon uwzględniono dodatkowy ciężar przepon, żeber i zakotwień lin podwieszenia. Każda para lin została zamodelowana pojedynczym elementem prętowym, nieprzenoszącym ściskania. Pomost został zbudowany z czterowęzłowych elementów powłokowych typu „Mindlin-Reissner” [DYNA 2007]. Wzdłuż pomostu wyodrębniono 16 rodzajów przekrojów poprzecznych, o stałych grubościach blach. Podzielono również sam przekrój poprzeczny na 9 symetrycznie rozmieszczonych sekcji. W ten sposób uzyskano siatkę fragmentów pomostu o danej uśrednionej sztywności giętej. Na podstawie tych sztywności wyznaczono grubości powłokowych elementów skończonych w poszczególnych fragmentach pomostu. Grubości elementów dobrano w ten sposób, aby w kierunku zginania w płaszczyźnie pionowej sztywność płytowa elementów powłokowych odpowiadała sztywności giętej belek o przekroju wyodrębnionym w danym fragmencie pomostu. Ciężar własny elementów materiału użytego do modelowania pomostu zmodyfikowano, uwzględniając ciężar elementów niekonstrukcyjnych i wyposażenia obiektu.

W ten sposób powstał model odzwierciedlający rozkład masy w konstrukcji mostu oraz rozkład sztywności związanej ze zginaniem w płaszczyźnie pionowej, co uznano za wystarczające dla obliczeń dynamicznych z punktu widzenia celu, jaki postawiono przed modelowaniem. Model MES przedstawiono na rysunku 3.



Rys. 3. Model MES – SOFiSTiK

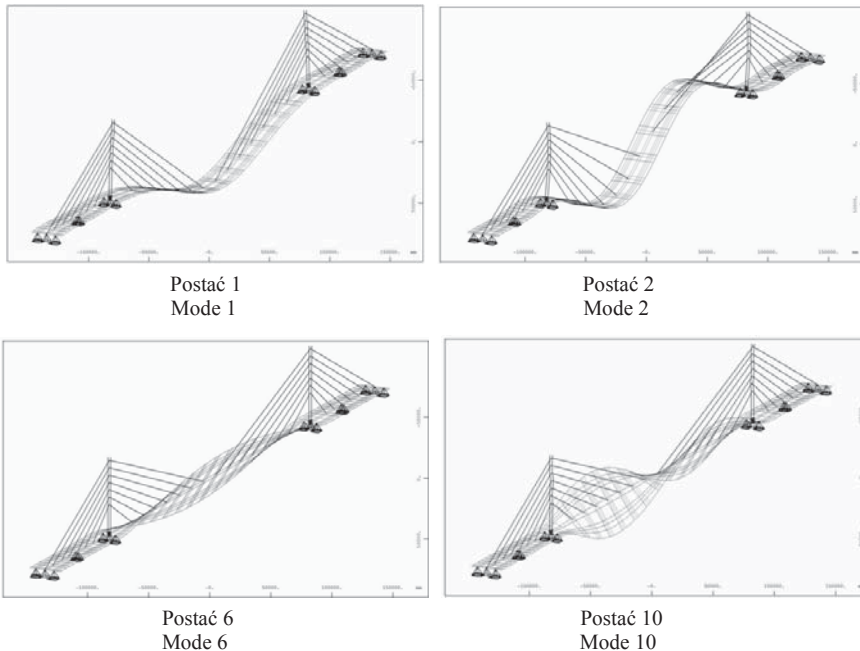
Fig. 3. FEM model – SOFiSTiK

ANALIZA DYNAMICZNA

W programie obliczeniowym SOFISTIK wyznaczono częstotliwości i postaci drgań własnych za pomocą metody Lanczosa. W tabeli 1 zestawiono częstotliwości drgań własnych, a na rysunku 4 przedstawiono wybrane postaci drgań. Otrzymane wyniki są zgodne z badaniami doświadczalnymi [Chróścielewski i in. 2007].

Tabela 1. Częstotliwości drgań własnych
Table 1. Natural vibration frequencies

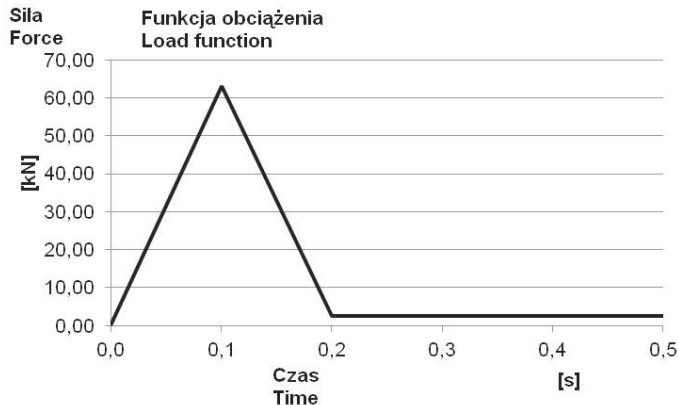
Nr No	Postać drgań – Eigen-mode	Częstotliwość – Frequency [Hz]
1	1. giętna pionowa / 1st bending vertical	0,374
2	giętna pylonu I / bending of pylon I	0,484
3	giętna pylonu II / bending of pylon II	0,484
4	2. giętna pionowa / 2nd bending vertical	0,536
5	3. giętna pionowa / 3rd bending vertical	0,780
6	1. skrętna / 1st torsional	1,111
7	4. giętna pionowa / 4th bending vertical	1,127
8	5. giętna pionowa / 5th bending vertical	1,597
9	6. giętna pionowa / 6th bending vertical	2,130
10	2. skrętna / 2nd torsional	2,227



Rys. 4. Wybrane postaci drgań własnych
Fig. 4. Selected eigen-forms

W celu porównania metody Newmarka, jako jednej z metod bezpośredniego całkowania równań ruchu, oraz metody superpozycji modalnej obliczono efekty oddziaływania 3 obciążeń dynamicznych. W obliczeniach pominięto tłumienie i ciężar własny konstrukcji. Obliczenia wykonano przy różnych rodzajach obciążeń dynamicznych – wybrane wyniki przedstawiono poniżej.

Rozważono obciążenie działaniem 4 sił skupionych przyłożonych w sąsiadujących węzłach konstrukcji w 1/4 rozpiętości przęsła nurtowego, w odległości 9,37 m od osi pomostu. Funkcję wartości obciążenia przedstawiono na rysunku 5.



Rys. 5. Rozkład funkcji obciążenia w czasie

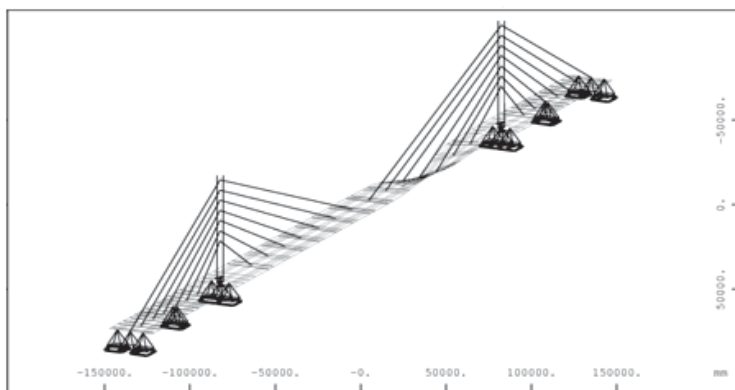
Fig. 5. Load distribution in time

Przy założonym czasie i charakterze zmienności funkcji obciążenia jej wartość odpowiada sile koniecznej do wyhamowania masy 1,0 t, spadającej z wysokości 30 m.

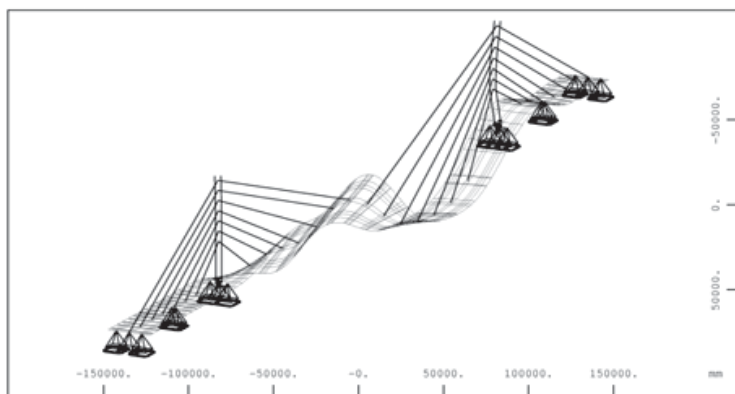
Obliczenia odpowiedzi konstrukcji wykonano przy wykorzystaniu metody Newmarka bezpośredniego całkowania równań ruchu, o parametrach $\delta = 0,50$ i $\alpha = 0,25$. Ze względu na dużą szybkość zmian obciążenia przyjęto krok czasowy obliczeń, wynoszący 0,02 s.

Charakter odpowiedzi konstrukcji jest w pewnym stopniu chaotyczny – na podstawie uzyskanych wyników przemieszczeń w poszczególnych krokach czasowych nie można jednoznacznie skojarzyć charakteru drgań z konkretnymi postaciami drgań własnych. Poniżej przedstawiono przemieszczenia konstrukcji w kroku czasowym 0,10 i 0,40 s. Rysunek 6 pokazuje początek drgań, kiedy oddziaływanie ma charakter lokalny – drgania nie objęły jeszcze całej konstrukcji, natomiast rysunek 7 ukazuje złożoność drgań po ustabilizowaniu obciążeń.

W celu późniejszego porównania sporządzono wykresy przemieszczeń pionowych węzłów w funkcji czasu. Na rysunku 8 przedstawiono przemieszczenia węzłów przekroju poprzecznego w środku rozpiętości przęsła nurtowego – kolorem czarnym węzła środkowego, kolorami zielonym i czerwonym węzłów po lewej i prawej stronie pomostu. Na rysunku 9 przedstawiono przemieszczenia węzła pod jedną z sił skupionych.



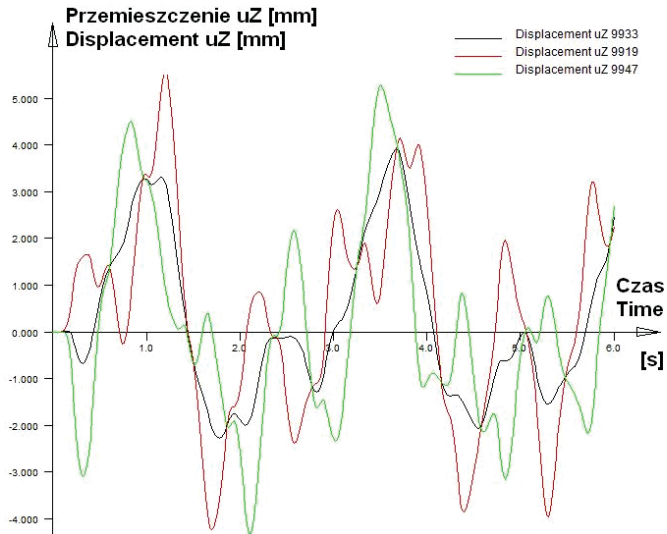
Rys. 6. Przemieszczenia konstrukcji po czasie $t = 0,10$ s (powiększone 8000 razy)
 Fig. 6. Displacements of the structure after $t = 0,10$ s (expanded 8000 times)



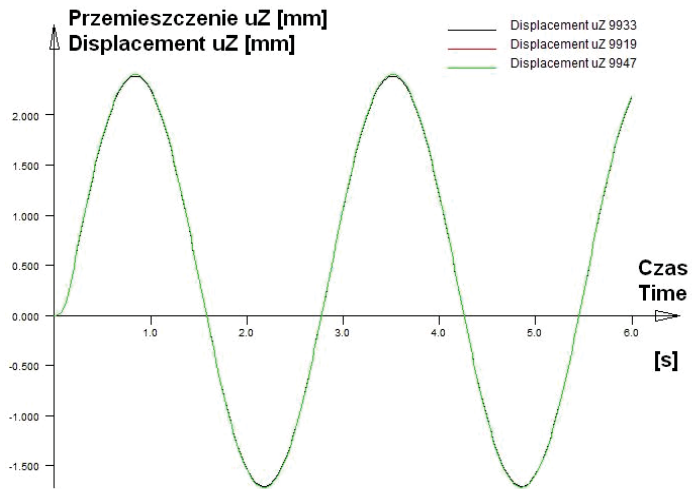
Rys. 7. Przemieszczenia konstrukcji po czasie $t = 0,40$ s (powiększone 8000 razy)
 Fig. 7. Displacements of the structure after $t = 0,40$ s (expanded 8000 times)

Podobne obliczenia przeprowadzono za pomocą metody superpozycji modalnej (MSM). Metoda ta w tym przypadku może być efektywna w znaczeniu kosztu (czasu) obliczeń, jedynie przy wykorzystaniu redukcji bazy wektorów własnych. W omawianych obliczeniach sterowano parametrem M , oznaczającym liczbę wektorów własnych uwzględnionych w obliczeniach.

Na podstawie wizualizacji wyników przemieszczeń stwierdzono, że obciążenie wywołuje drgania o trudnym do określenia, skomplikowanym charakterze. Dzieje się tak za sprawą dużej szybkości zmienności obciążenia oraz miejsca jego przyłożenia. Nie jest możliwe łatwe wyróżnienie pewnych postaci drgań, zbliżonych do postaci drgań własnych. Zatem, co istotne z punktu widzenia efektywności metody superpozycji modalnej, nie można opisać drgań jako sumy kilku pierwszych postaci drgań własnych. Mechanizm działania metody superpozycji modalnej można przeanalizować, przyglądając się przedstawionym wykresom przemieszczeń.

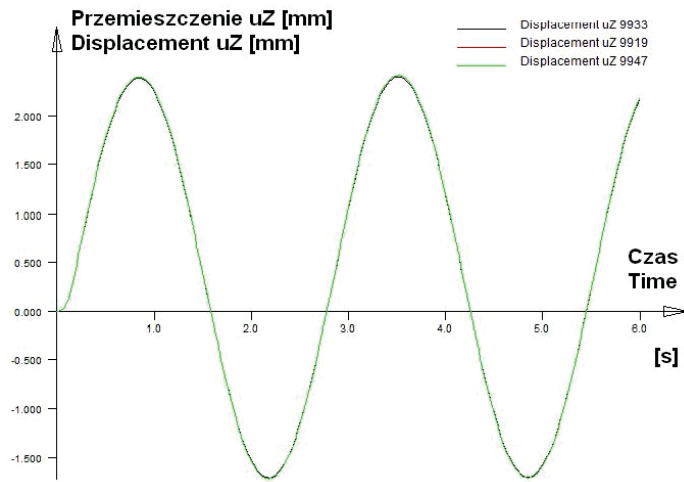


Rys. 8. Metoda Newmarka, rozkład przemieszczeń węzłów w czasie
 Fig. 8. Newmark method, distribution of nodal displacements in time

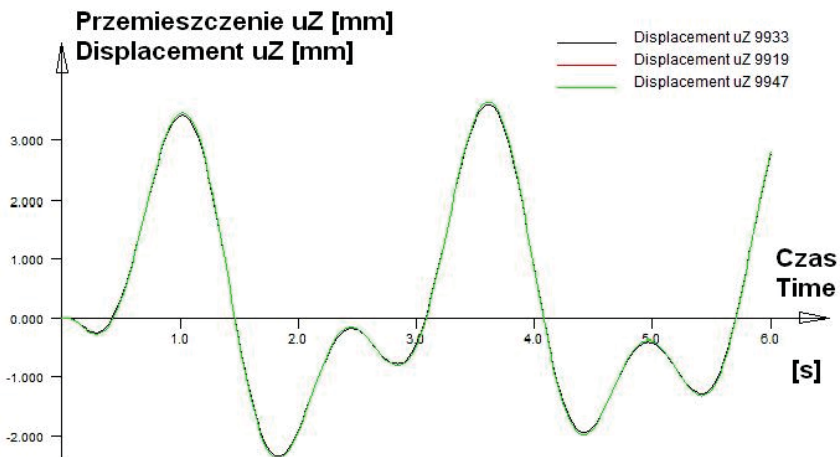


$M = 1$ Rozkład wybranych przemieszczeń węzłów w czasie
 $M = 1$ Distribution of selected nodal displacements in time

Rys. 9. Metoda superpozycji modalnej, zależność wyników od liczby M
 Fig. 9. Method of modal superposition, dependence of the results on M

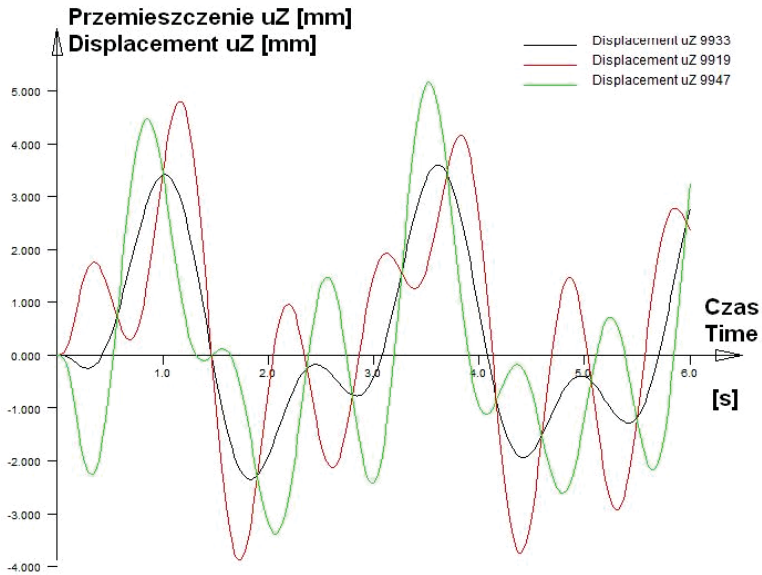


$M = 4$ Rozkład wybranych przemieszczeń węzłów w czasie
 $M = 4$ Distribution of selected nodal displacements in time

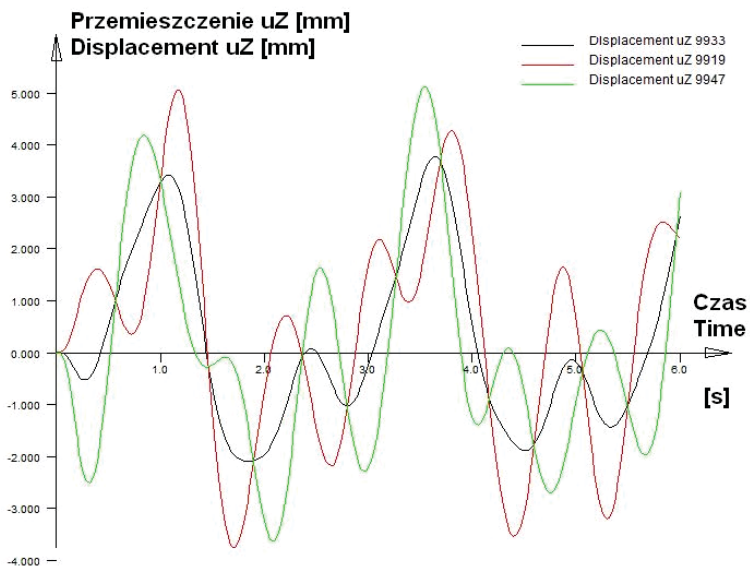


$M = 5$ Rozkład wybranych przemieszczeń węzłów w czasie
 $M = 5$ Distribution of selected nodal displacements in time

Rys. 9, cd. Metoda superpozycji modalnej, zależność wyników od liczby M
 Fig. 9, cont. Method of modal superposition, dependence of the results on M

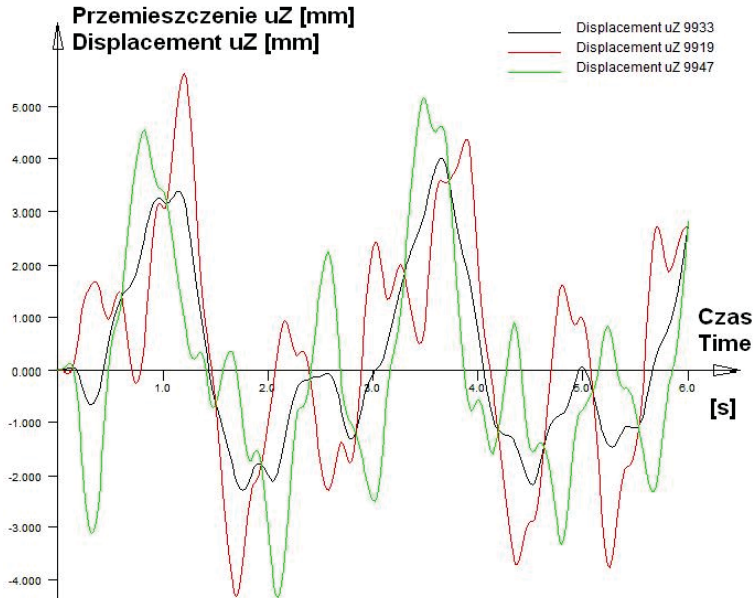


$M = 6$ Rozkład wybranych przemieszczeń węzłów w czasie
 $M = 6$ Distribution of selected nodal displacements in time



$M = 10$ Rozkład wybranych przemieszczeń węzłów w czasie
 $M = 10$ Distribution of selected nodal displacements in time

Rys. 9, cd. Metoda superpozycji modalnej, zależność wyników od liczby M
 Fig. 9, cont. Method of modal superposition, dependence of the results on M



$M = 30$ Rozkład wybranych przemieszczeń węzłów w czasie
 $M = 30$ Distribution of selected nodal displacements in time

Rys. 9, cd. Metoda superpozycji modalnej, zależność wyników od liczby M
 Fig. 9, cont. Method of modal superposition, dependence of the results on M

Przy $M = 1$, czyli przy uwzględnieniu jedynie pierwszej, giętej postaci drgań, przemieszczenia węzłów określone są tylko przez takie właśnie drgania. Dla rozpatrywanych w rozważaniach węzłów, nie zmienia się to aż do $M = 4$, bo druga i trzecia postać drgań własnych dotyczy drgań pylonów. Ponieważ czwartej częstotliwości drgań własnych odpowiada druga postać gięta mostu, więc przy $M = 4$ wykres przemieszczeń węzłów środkowego przekroju nie ulega znaczącej modyfikacji (druga postać drgań giętych jest postacią antysymetryczną), natomiast wykres przemieszczeń węzła pod jedną z sił skupionych staje się superpozycją funkcji przemieszczeń węzła przy pierwszej i drugiej postaci drgań giętych (z odpowiednimi wagami). Przy $M = 5$ (uwzględnienie trzeciej postaci drgań giętych – postać symetryczna) do wszystkich wykresów zostaje dodana kolejna funkcja ugięcia. Jednak ponieważ jeszcze nie została uwzględniona żadna z postaci drgań skrętnych pomostu, więc ugięcia całego przekroju pomostu są niemal identyczne. Różnicowanie uzyskuje się dopiero dla $M = 6$, ponieważ są to drgania skrętne, natomiast nie ulegają modyfikacji przemieszczenia węzła znajdującego się w osi pomostu. Dal-szy wzrost wartości liczby M powoduje dodawanie kolejnych postaci drgań własnych. W tabeli 2 przedstawiono porównanie wybranych wyników maksymalnych przemieszczeń badanych węzłów.

Tabela 2. Wpływ liczby M na wyniki obliczeń metodą superpozycji modalnej
 Table 2. The influence of M for the results in the method of modal superposition

Liczba częstości Number of eigenvalues	Maksymalne przemieszczenie – Maximal displacement [mm]			
	Przekrój środkowy – Middle cross-section			pod siłą under force
	strona lewa left side	środek midside	strona prawa right side	
1	2,40	2,39	2,40	1,06
4	2,41	2,40	2,41	3,50
5	3,64	3,59	3,64	4,77
6	4,80	3,59	5,17	5,20
8	5,05	3,78	5,12	5,34
15	5,20	3,98	5,15	5,11
20	5,69	4,00	5,06	4,91
30	5,59	4,00	5,16	4,86
Newmark	5,61	3,91	5,30	4,89

Kolejne postaci drgań własnych – o coraz wyższych częstościach, są coraz trudniej wzbudzone, dlatego wyniki uzyskane metodą superpozycji modalnej są zbieżne do skończonych wartości. Otwarte pozostaje pytanie, jak przyjmować wartość liczby M , aby uzyskać satysfakcjonujące wyniki. W tym przypadku czas obliczeń obu metod był podobny przy M równym około 15, natomiast wyniki obliczeń przy takiej wartości mogą nie być satysfakcjonujące.

Brak dokładności przy małym M wynika ze skomplikowanego charakteru wzbudzonych drgań. Podstawowym powodem tego stanu są: krótki czas zmienności obciążenia w stosunku do okresu drgań własnych odpowiadających pierwszym postaciom drgań oraz miejsce jego przyłożenia. W celu sprawdzenia tej tezy do obiektu przyłożono inne obciążenia. Pierwsze sprawdzenie polegało na przyłożeniu siły skupionej o takiej samej funkcji wartości w czasie jak wcześniej, ale w węźle przekroju środkowego, po prawej stronie. W tym wypadku, ponieważ obciążenie znalazło się w miejscu maksymalnych ugięć giętych postaci drgań własnych, więc można przewidzieć, że efekt oddziaływania będzie zależny od nieparzystych (symetrycznych) postaci drgań giętych ($M = 1, 5, 8, \dots$) oraz nieparzystych (symetrycznych) postaci drgań skrętnych ($M = 6, \dots$).

W tym przypadku uzyskano satysfakcjonującą zbieżność wyników już przy $M = 6$, czyli jedynie po uwzględnieniu dwóch pierwszych nieparzystych postaci drgań giętych i pierwszej postaci drgań skrętnych.

Drugie sprawdzenie polegało na wydłużeniu okresu zmienności obciążenia z 0,2 s na 1,2 s. Wartość i miejsce (4 siły w 1/4 rozpiętości) pozostały bez zmian.

Również w tym przypadku uzyskano bardzo dobrą zbieżność wyników już przy $M = 6$, szczególnie w środku rozpiętości przęsła środkowego, a więc w miejscu największych przemieszczeń w pierwszych nieparzystych postaciach drgań własnych.

PODSUMOWANIE

Wyniki obliczeń otrzymanych za pomocą opracowanego modelu MES są zgodne z badaniami doświadczalnymi. Uprawnia to do stosowania tego modelu do obliczeń drgań nieustalonych. Porównując wyniki uzyskane za pomocą dwu rozważanych metod, można stwierdzić, że w badanym przypadku metoda superpozycji modalnej może być korzystna pod względem kosztów obliczeń, pod warunkiem że charakter drgań może być określony przez superpozycję przemieszczeń związanych z kilkoma pierwszymi postaciami drgań własnych. W innym przypadku nie można zastosować dostatecznie dużej (z punktu widzenia oszczędności) redukcji bazy współrzędnych uogólnionych. Metoda może okazać się nieskuteczna, jeśli tempo zmian obciążenia będzie zbyt wysokie w stosunku do częstości drgań własnych. Niekorzystna będzie też sytuacja, gdy miejsce przyłożenia obciążenia będzie daleko od miejsc ekstremalnych ugięć pierwszych postaci drgań własnych, jednak w zastosowaniach inżynierskich, w których zazwyczaj celem obliczeń jest wyznaczenie maksymalnych ugięć konstrukcji, taka sytuacja nie powinna nastąpić.

PIŚMIENNICTWO

- Chróścielewski J., Malinowski M., Miśkiewicz M., Żółtowski K., 2007. Badania mostu głównego przez Wisłę w ciągu obwodnicy Płocka. *Inżynieria i Budownictwo* 63, 11, 587–591.
- DYNA – Dynamic Analysis v.12.12. SOFISTIK AG, 2007. Oberschleissheim.
- Hughes T.J.R., 1987. *The finite element method*. Englewood Cliffs, New York.
- Zienkiewicz O.C., Taylor R., 2006. *Finite element method*, 1–2. Elsevier, Amsterdam.

DYNAMICS OF SOLIDARITY BRIDGE IN PŁOCK

Abstract. Dynamic analysis of a cable-stayed bridge in Płock (Solidarity Bridge) has been considered. Finite element model was used in the frame of the SOFISTIK Programme. Free vibration modes are calculated as a base for the analysis. Dynamic transient analysis was done by the Newmark method as well as the method of modal superposition. The two methods have been compared from the point of view of the cost of analysis. Conditions of the successful use of modal superposition were defined.

Key words: dynamic of structures, bridges, finite element method

Zaakceptowano do druku – Accepted for print: 7.01.2013