

EFEKT BRZEGOWY W WARSTWOWEJ PRZEGRODZIE O PODŁUŻNEJ GRADACJI WŁASNOŚCI

Olga Szlachetka, Monika Wągrowska

Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie

Streszczenie. Rozpatrzono stacjonarne, jednowymiarowe zagadnienie przewodnictwa ciepła w wielowarstwowej przegrodzie o podłużnej gradacji własności. Zbadano wpływ efektu warstwy brzegowej na rozkład pól temperatury w wielowarstwowym laminacie. Przegroda zbudowana jest z dwóch jednorodnych, izotropowych przewodników ciepła.

Słowa kluczowe: przewodnictwo ciepła, materiał z funkcyjną gradacją własności efektywnych

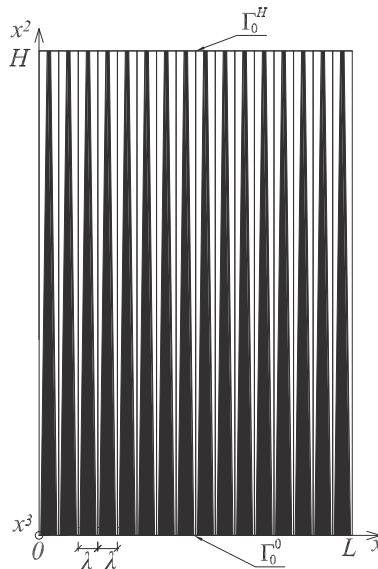
WSTĘP

Jednym z najważniejszych zadań w badaniach nad wielowarstwowymi strukturami jest określenie w nich rozkładu naprężeń, odkształceń czy temperatury. W pracy uwaga skupiona jest tylko na zagadnieniach termicznych.

W przypadku niejednorodnych struktur warstwowych bezpośrednio zastosowanie równania przewodnictwa ciepła Fouriera do wyznaczania rozkładu temperatury stwarza komplikacje obliczeniowe, bowiem równanie to posiada nieciągłe, silnie oscylujące współczynniki, a konieczność spełnienia warunków ciągłości strumienia ciepła na styku warstw prowadzi do dużej liczby równań. Celowe jest więc stosowanie modeli przybliżonych. Jednym z nich jest metoda modelowania asymptotycznego. Pozwala ona w prosty sposób wyznaczyć przybliżony rozkład pola temperatury w rozpatrywanym laminacie. Niestety wyznaczone pole temperatury nie spełnia zadanych warunków brzegowych na brzegach przecinających uwarstwienie. Otrzymane w ramach modelu asymptotycznego rozwiązanie uzupełnia się o dodatkowy składnik [Woźniak 2010, Szlachetka i Wągrowska 2010], by otrzymane nowe przybliżone rozwiązanie na pole temperatury spełniło warunki brzegowe. Za pomocą tego nowego rozwiązania wyznaczyć można rozkład temperatury w obszarze przybrzegowym i określić zasięg wpływu warstwy brzegowej.

Rozpatrywana wielowarstwowa przegroda, będąca przewodnikiem ciepła, w konfiguracji odniesienia zajmuje obszar: $\Omega \equiv (0, L) \times (0, H) \times R$, $\mathbf{x} = (x, x^2, x^3)$, $x \in (0, L)$, $x^2 \in (0, H)$, $x^3 \in R$.

Przegroda zbudowana jest z m dwuskładnikowych warstw o stałej grubości $\lambda = \frac{L}{m}$, $\frac{1}{m} \ll 1$. Składniki w warstwach przylegają do siebie idealnie. Współczynniki przewodzenia ciepła izotropowych komponentów wchodzących w skład przegrody oznaczono przez k' i k'' . Schemat struktury przegrody został zaprezentowany na rysunku 1.



Rys. 1. Schemat struktury o podłużnej gradacji własności: λ – grubość warstwy, L, H – wymiary laminatu, Γ_0^0, Γ_0^H – brzozi laminatu
 Fig. 1. Scheme of FGM with longitudinal gradation: λ – thickness, L, H – dimensions of the laminate, Γ_0^0, Γ_0^H – boundaries of the laminate

Na rysunku kolorem czarnym zaznaczono materiał, który w pracy nazywany będzie wtrąceniem. Funkcja $\varphi(\cdot) \in C^1(\bar{\Omega})$, opisująca rozkład frakcji materiału wtrącenia, ze względu na budowę przegrody zależy tylko od współrzędnej x^2 . Przyjmuje ona wartości z przedziału $(0, 1)$ dla każdego $x^2 \in [0, H]$. Udział drugiego materiału (na rys. 1 oznaczonego kolorem białym), nazywanego osnową, wynosi $1 - \varphi(\cdot)$. Funkcja $\varphi(\cdot)$ wolno zmienia swoje wartości w kierunku osi Ox^2 . Taki kompozyt nazywa się strukturą o funkcyjnej podłużnej gradacji własności. Przegroda będzie poddana jednokierunkowemu, stacjonarnemu przewodnictwu ciepła w kierunku osi Ox .

METODYKA

Ze względu na budowę przegrody nie można w niej wyznaczyć analitycznie rozkładu temperatury bezpośrednio ze znanego równania przewodnictwa ciepła Fouriera. Rozwiązanie przybliżone uzyskano, stosując metodę modelowania asymptotycznego [Thermo-

mechanics... 2008], i zgodnie z jej procedurą poszukiwane pole temperatury aproksymuje się wyrażeniem będącym sumą temperatury uśrednionej i iloczynu fluktuacyjnej funkcji kształtu i amplitudy fluktuacji:

$$\tilde{\theta}_\lambda(\mathbf{x}) = \vartheta(\mathbf{x}) + h_\lambda(x, x^2) \psi(\mathbf{x}) \quad (1)$$

gdzie: $\vartheta(\cdot), \psi(\cdot) \in C^1(\bar{\Omega})$ – poszukiwane funkcje, nazywane odpowiednio temperaturą uśrednioną i amplitudą fluktuacji temperatury,

$h_\lambda(\cdot)$ – dana z góry fluktuacyjna funkcja kształtu, która spełnia warunek $h_\lambda(0, \cdot) = h_\lambda(L, \cdot) = 0$ i jest liniową funkcją argumentu (x, x^2) , przy czym jej wartości w kierunku osi zmieniają się bardzo wolno; dodatkowo założono, że funkcja ta przyjmuje naprzemiennie wartości $\frac{\lambda}{2}$ i $-\frac{\lambda}{2}$ i na granicy materiałów.

Pamiętając, że rozkład materiału wtrącenia wewnątrz pojedynczej warstwy zmienia się bardzo wolno w kierunku osi Ox^2 , można przybliżyć prostopadłą do płaszczyzny granicznej między materiałami przez oś Ox . Dzięki temu warunek ciągłości wektora strumienia ciepła w kierunku prostopadłym do uwarstwienia na interfejsach może być przedstawiony w postaci $q_i^R = q_i^M$. Daje to możliwość wyrażenia w ramach modelu asymptotycznego nieznanego pola $\psi(\cdot)$ przez $\partial\vartheta(\cdot)$:

$$\psi(\mathbf{x}) = -\frac{\varphi(x^2)(1-\varphi(x^2))(k' - k'')}{\varphi(x^2)k'' + (1-\varphi(x^2))k'} \partial\vartheta(\mathbf{x}) \quad (2)$$

gdzie: $\partial \equiv \frac{\partial}{\partial x}$.

Dla stacjonarnego jednowymiarowego zagadnienia przewodnictwa ciepła równanie na temperaturę uśrednioną w modelu asymptotycznym przyjmuje postać:

$$\langle k \rangle (x^2) \partial^2 \vartheta(\mathbf{x}) = 0 \quad (3)$$

gdzie $\langle k \rangle$ jest efektywnym współczynnikiem przewodzenia ciepła, który wynosi:

$$\langle k \rangle (x^2) \equiv k' \varphi(x^2) + k'' (1 - \varphi(x^2)) \quad (4)$$

Równania (3) wraz z dekompozycją pola temperatury (1) reprezentują model asymptotyczny, opisujący stacjonarne jednokierunkowe przewodnictwo ciepła w kierunku prostopadłym do osi Ox^2 w rozpatrywanej przegrodzie o podłużnej gradacji własności efektywnych.

Po rozwiązaniu równania (3) na $\vartheta(\cdot)$ rozwiązanie na poszukiwane pole temperatury dla rozpatrywanego laminatu, zgodnie z formułą aproksymacyjną, można zapisać:

$$\theta_{\lambda}^{(1)}(\mathbf{x}) \approx \tilde{\theta}_{\lambda}(\mathbf{x}) = \vartheta(\mathbf{x}) + h_{\lambda}(x, x^2) M(x^2) \partial \vartheta(\mathbf{x}) \quad (5)$$

gdzie:

$$M(x^2) = -\frac{\varphi(x^2)(1-\varphi(x^2))(k' - k'')}{\varphi(x^2)k'' + (1-\varphi(x^2))k'} \quad (6)$$

Z postaci otrzymanego rozwiązania (5) wynika, że warunek brzegowy na brzegu: $\Gamma_0 = (0, L) \times \{0\} \times R \cup (0, L) \times \{H\} \times R = \Gamma_0^0 \cup \Gamma_0^H$, nie jest spełniony (rys. 1). Taka sama sytuacja wystąpiła podczas analizy stacjonarnego jednokierunkowego przewodnictwa ciepła w kierunku prostopadłym do uwarstwienia w przegrodzie o poprzecznej gradacji własności [Szlachetka i Wągrowska 2010].

W bieżącej pracy problem ten zostanie rozwiązany analogicznie jak w pracy Szlachetka i Wągrowska [2010]. Rozwiązanie na temperaturę w obszarze przyległym do brzegów Γ_0 laminatu dla danego punktu \mathbf{x} [Woźniak 2010] przyjęto w postaci:

$$\theta_{\lambda}^{(2)}(\mathbf{x}; \xi) = \theta_{\lambda}^{(1)}(\mathbf{x}) + h_{\lambda}(x, x^2) v(x, \xi, x^3) \quad (7)$$

gdzie: ξ – współrzędna prostopadła do brzegów Γ_0^0, Γ_0^H i skierowana do wnętrza kompozytu,

$\theta_{\lambda}^{(1)}(\cdot)$ – pole temperatury uzyskane w ramach modelowania asymptotycznego, przedstawione zależnością (5),

funkcja $h_{\lambda}(\cdot)$ – znana fluktuacyjna funkcja kształtu,

$\vartheta(\cdot)$ – poszukiwana funkcja, wolnozmienna ze względu na zmienną x .

Funkcję $\vartheta(\cdot)$ w każdym z obszarów przyległych do odpowiednich brzegów Γ_0^0, Γ_0^H wyznacza się z równania otrzymanego w ramach modelu tolerancyjnego:

$$\left\langle (h_{\lambda})^2 k \right\rangle(x) \partial_{\xi}^2 v(x, \xi, x^3) - \left\langle (\partial h_{\lambda})^2 k \right\rangle(x) v(x, \xi, x^3) = 0 \quad (8)$$

W równaniu (8) przyjęto oznaczenie $\partial_{\xi} \equiv \frac{\partial}{\partial \xi}$.

Funkcja $\vartheta(\cdot)$, która występuje w równaniu (8), na brzegach Γ_0^0, Γ_0^H spełnia odpowiednie warunki brzegowe:

$$v(x, \xi, x^3) \Big|_{\Gamma_0^0} = -M(x^2) \partial \vartheta(\mathbf{x}) \Big|_{\Gamma_0^0}; \quad v(x, \xi, x^3) \Big|_{\Gamma_0^H} = -M(x^2) \partial \vartheta(\mathbf{x}) \Big|_{\Gamma_0^H} \quad (9)$$

Wykorzystując rozwiązanie równania (8) z warunkami brzegowymi (9), można stwierdzić, że poszukiwane pole temperatury dla rozpatrywanego laminatu z uwzględnieniem efektu warstwy brzegowej przyjmuje w obszarze przyległym do brzegu Γ_0^0 postać (10a), wtedy $\xi = x^2$, a w obszarze przyległym do brzegu Γ_0^H przyjmuje postać (10b), wtedy $\xi = H - x^2$:

$$\begin{aligned} \theta_{\lambda}^{(2)}(\mathbf{x}) = & \vartheta(\mathbf{x}) + h_{\lambda}(x, x^2) M(x^2) \partial \vartheta(\mathbf{x}) + \\ & + h_{\lambda}(x, x^2) \left(-M(x^2) \partial \vartheta(\mathbf{x}) \right) \Big|_{\Gamma_0^0} \exp \left(- \sqrt{\frac{\langle (\partial h_{\lambda}(x, x^2))^2 k \rangle}{\langle (h_{\lambda}(x, x^2))^2 k \rangle}} \cdot x^2 \right) \end{aligned} \quad (10a)$$

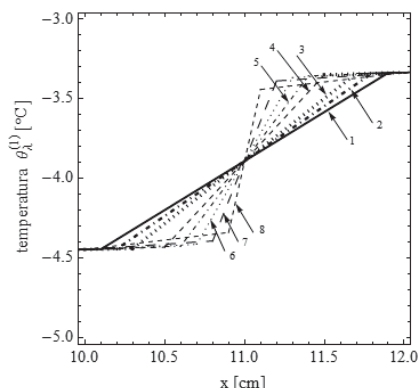
$$\begin{aligned} \theta_{\lambda}^{(2)}(\mathbf{x}) = & \vartheta(\mathbf{x}) + h_{\lambda}(x, x^2) M(x^2) \partial \vartheta(\mathbf{x}) + \\ & + h_{\lambda}(x, x^2) \left(-M(x^2) \partial \vartheta(\mathbf{x}) \right) \Big|_{\Gamma_0^H} \exp \left(- \sqrt{\frac{\langle (\partial h_{\lambda}(x, x^2))^2 k \rangle}{\langle (h_{\lambda}(x, x^2))^2 k \rangle}} \cdot (H - x^2) \right) \end{aligned} \quad (10b)$$

Z postaci rozwiązania (10) wynika, że efekt warstwy brzegowej zanika wraz z oddalaniem się od brzegów Γ_0^0 , Γ_0^H do wnętrza kompozytu.

ANALIZA

Rozpatrywany jest laminat o podłużnej gradacji własności o grubości $L = 54$ cm, wysokości $H = 200$ cm i nieskończonej długości w kierunku osi x^3 . Składa się on z 27 dwuskładnikowych warstw o stałej grubości $\lambda = 2$ cm. Współczynniki przewodzenia ciepła komponentów wynoszą $k' = 0,045 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ we wtrąceniu oraz $k'' = 1,7 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ w matrycy. Zgodnie z procedurą modelowania asymptotycznego przyjęto następujące warunki brzegowe na jednowymiarową temperaturę uśrednioną: $\vartheta(0, x^2, x^3) = -10^\circ\text{C}$, $\vartheta(54, x^2, x^3) = 20^\circ\text{C}$, $x^2 \in (0, 200)$, $x^3 \in R$, $\vartheta(x, 0, x^3) = \vartheta(x, 200, x^3) = -10 + \frac{5}{9}x$, $x \in (0, 54)$, $x^3 \in R$. Rozkład funkcji $\varphi(\cdot)$ zadano w postaci funkcji liniowej $\varphi(x^2) = \frac{225 - x^2}{250}$.

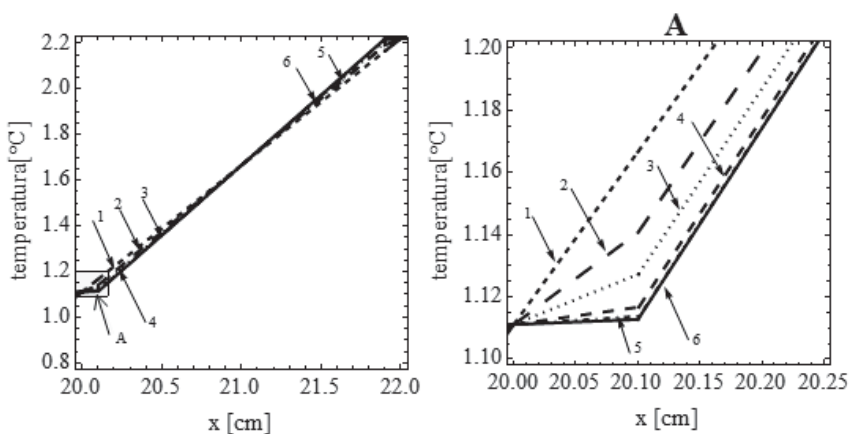
Na rysunku 2 przedstawiono wykresy temperatury w piątej warstwie przegrody wyznaczone ze wzoru (5) na różnych wysokościach x^2 . Zmienność rozkładów temperatury związana jest z faktem, że wraz ze zmianą współrzędnej x^2 zmienia się zawartość materiału wtrącenia (styropianu), który jest lepszym izolatorem ciepła niż materiał matrycy (beton). Ponadto krzywa 1 i krzywa 8, które zostały wykreślone odpowiednio dla $x^2 = 0$ cm i $x^2 = 200$ cm, czyli na brzegach dolnym i górnym przegrody, obrazują sygnalizowany w rozdziale „Metodyka” problem niespełnienia założonych warunków brzegowych.



Rys. 2. Rozkłady pola temperatury w piątej warstwie bez uwzględnienia efektu warstwy brzegowej dla różnych współrzędnych x^2 : 1 – $x^2 = 0$ cm, 2 – $x^2 = 25$ cm, 3 – $x^2 = 50$ cm, 4 – $x^2 = 100$ cm, 5 – $x^2 = 125$ cm, 6 – $x^2 = 150$ cm, 7 – $x^2 = 175$ cm, 8 – $x^2 = 200$ cm

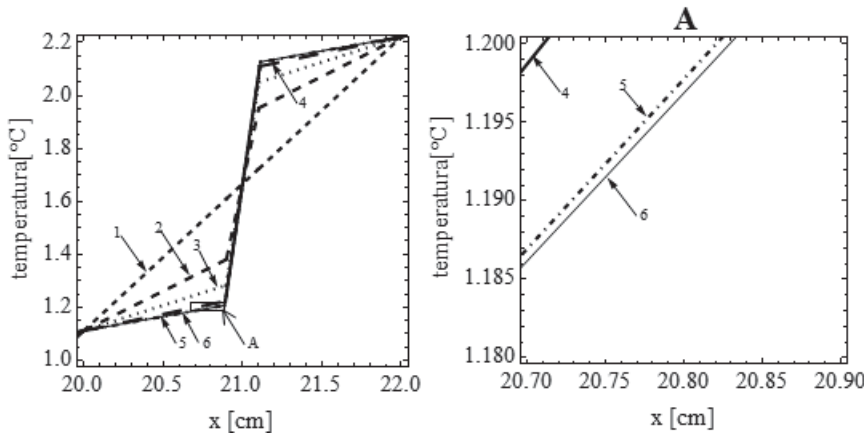
Fig. 2. Distribution of temperature field without consideration of boundary layer effect in the 5th layer for different coordinates x^2 : 1 – $x^2 = 0$ cm, 2 – $x^2 = 25$ cm, 3 – $x^2 = 50$ cm, 4 – $x^2 = 100$ cm, 5 – $x^2 = 125$ cm, 6 – $x^2 = 150$ cm, 7 – $x^2 = 175$ cm, 8 – $x^2 = 200$ cm

Natomiast rozwiązanie (10), uwzględniające efekt warstwy brzegowej, spełnia warunki brzegowe na brzegach przecinających uwarstwienie. Można to zaobserwować na rysunkach 3 i 4 wykonanych dla dziesiątej warstwy przegrody, na których krzywe 1 przedstawiają wykresy temperatury odpowiednio na brzegu Γ_0^0 i Γ_0^H . Wykres krzywych 1 jest gładki, bez oscylacji.



Rys. 3. Rozkłady pola temperatury w dziesiątej warstwie z uwzględnieniem efektu warstwy brzegowej dla różnych odległości ζ od brzegu Γ_0^0 : 1 – $\zeta = 0$ cm, 2 – $\zeta = 0,05$ cm, 3 – $\zeta = 0,1$ cm, 4 – $\zeta = 0,2$ cm, 5 – $\zeta = 0,26$ cm, i bez uwzględnienia efektu warstwy brzegowej: 6 – $x^2 = 0,26$ cm; A – powiększony fragment wykresu

Fig. 3. Distribution of temperature field in 10th layer with consideration of boundary layer effect for different distances ζ from the edge Γ_0^0 : 1 – $\zeta = 0$ cm, 2 – $\zeta = 0,05$ cm, 3 – $\zeta = 0,1$ cm, 4 – $\zeta = 0,2$ cm, 5 – $\zeta = 0,26$ cm, and without consideration of boundary layer effect: 6 – $x^2 = 0,26$ cm; A – magnified part of the graph



Rys. 4. Rozkłady pola temperatury w dziesiątej warstwie z uwzględnieniem efektu warstwy brzegowej dla różnych odległości ζ od brzegu Γ_0^H : 1 – $\zeta = 0$ cm, 2 – $\zeta = 0,5$ cm, 3 – $\zeta = 1$ cm, 4 – $\zeta = 2$ cm, 5 – $\zeta = 2,8$ cm, i bez uwzględnienia efektu warstwy brzegowej: 6 – $x^2 = 197,2$ cm; A – powiększony fragment wykresu

Fig. 4. Distribution of temperature field in 10th layer with consideration of boundary layer effect for different distances ζ from the edge Γ_0^H : 1 – $\zeta = 0$ cm, 2 – $\zeta = 0,5$ cm, 3 – $\zeta = 1$ cm, 4 – $\zeta = 2$ cm, 5 – $\zeta = 2,8$ cm, and without consideration of boundary layer effect 6 – $x^2 = 197,2$ cm; A – magnified part of the graph

Na omawianych rysunkach znajdują się wykresy temperatury dla różnych odległości ζ od poszczególnych brzegów Γ_0^0 , Γ_0^H , oznaczone kolejno symbolami 2–5. Krzywe oznaczone symbolem 6 przedstawiają wykresy temperatury w środku kompozytu, według wzoru (5).

Przyjęto, że wpływ brzegu dochodzi do głębokości ζ , dla której różnica między rozwiązaniem (5) i (10) jest w przybliżeniu równa $0,001^\circ\text{C}$, tj. $0,003\%$. Można stwierdzić, że w pobliżu brzegu Γ_0^0 zasięg wpływu warstwy brzegowej dochodzi do głębokości $\zeta_0 \approx 0,26$ cm, a w pobliżu brzegu Γ_0^H – do głębokości $\zeta_H \approx 0,28$ cm.

Wynika stąd, że w pobliżu brzegu Γ_0^H , gdy $\zeta < 1,4 \lambda$, rozkład temperatury można przyjąć zgodnie ze wzorem (10b), a w pobliżu brzegu Γ_0^0 , gdy $\zeta < 0,13 \lambda$, rozkład temperatury można przyjąć zgodnie ze wzorem (10a). Po przekroczeniu granicznych wartości ζ_0 i ζ_H rozkład temperatury we wnętrzu przegrody może być wyznaczony ze wzoru (5).

PODSUMOWANIE

W wyniku zastosowania procedury modelowania tzw. efektu warstwy brzegowej otrzymane rozwiązanie na temperaturę spełnia zadane warunki brzegowe.

Wpływ efektu warstwy brzegowej zanika wraz z oddalaniem się od brzegów Γ_0^0 , Γ_0^H . Wpływ ten utrzymuje się do głębokości równej $1,4$ grubości pojedynczej warstwy rozważanego laminatu w pobliżu brzegu Γ_0^H , a w pobliżu brzegu Γ_0^0 do głębokości równej $0,13$ grubości pojedynczej warstwy. Oznacza to, że w odległościach od brzegów Γ_0^0 , Γ_0^H , większych niż określone graniczne wartości odpowiednio ζ_0 i ζ_H , pole temperatury może być aproksymowane przez rozwiązanie otrzymane w ramach modelowania asymptotycznego.

Z postaci rozwiązania (10) wynika, że efekt warstwy brzegowej zależy od rodzaju materiałów wchodzących w skład przegrody (dla materiałów o zbliżonych wartościach współczynników przewodzenia ciepła wpływ ten będzie mniejszy, niż dla materiałów charakteryzujących się znaczną różnicą między wartościami stałych materiałowych), od budowy wewnętrznej (rozkładu frakcji materiału wtrącenia), od wymiarów zewnętrznych przegrody, od kierunku przewodnictwa ciepła (wzdłuż uwarstwienia w rozważanym kompozycie nie wystąpiłby efekt brzegowy).

PIŚMIENNICTWO

- Mathematical Modelling and Analysis in Continuum Mechanics of Microstructured Media. Professor Margaret Woźniak pro Memoria, 2010. Ed. Cz. Woźniak et al. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice.
- Szlachetka O., Wągrowska M., 2010. Efekt warstwy brzegowej w warstwowej przegrodzie o poprzecznej gradacji własności. *Acta Scientiarum Polonorum, Architectura* 9, 4, 15–23.
- Thermomechanics of Heterogeneous Solids and Structures. Tolerance Averaging Approach, 2008. Ed. Cz. Woźniak, B. Michalak, J. Jędrysiak. Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź.
- Woźniak Cz., 2010. Asymptotic modelling and boundary-layer effect for functionally graded microcracked composites. *Acta Scientiarum Polonorum, Architectura* 9, 2, 3–9.

BOUNDARY LAYER EFFECT IN LONGITUDINAL FGM WALL

Summary. The stationary, one-dimensional heat conduction problem for multilayer longitudinal FGM was investigated. The influence of the boundary layer effect on the distribution of temperature fields in longitudinal FGM was considered. The wall was built of two homogeneous, isotropic heat conductors.

Key words: longitudinal FGM, heat conduction, asymptotic modelling, boundary layer effect



Wyniki pracy współfinansowane ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

Zaakceptowano do druku – Accepted for print: 20.09.2011