

ZAGADNIENIE EFEKTU WARSTWY BRZEGOWEJ W PRZEGRODZIE O PODŁUŻNEJ GRADACJI WŁASNOŚCI

Monika Wągrow ska, Joanna Witkowska-Dobrev
Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie

Streszczenie. Rozpatrzono zagadnienie efektu warstwy brzegowej w wielowarstwowej przegrodzie budowlanej charakteryzującej się podłużną gradacją własności dla zagadnienia stacjonarnego. Przegroda zbudowana jest z dwóch izotropowych, jednorodnych, sprężystych materiałów. Rozwiązanie ograniczono do jednowymiarowego zagadnienia.

Słowa kluczowe: materiał z funkcyjną gradacją własności efektywnych, podłużna gradacja własności, modelowanie asymptotyczne, efekt warstwy brzegowej

WSTĘP

Jednym z najważniejszych problemów teorii sprężystości w rozważaniach nad niejednorodnymi, wielowarstwowymi laminatami jest określenie rozkładu pola przemieszczeń, naprężeń i odkształceń.

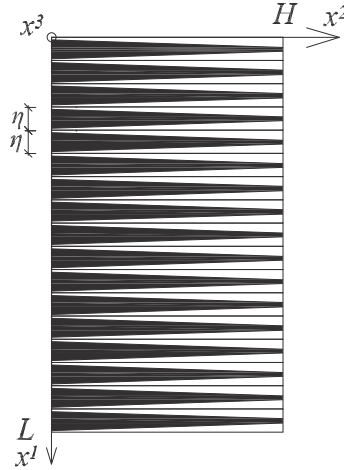
W przypadku struktur warstwowych bezpośrednie zastosowanie równań równowagi do wyznaczania rozkładu naprężeń oraz odkształceń jest niemożliwe, ponieważ równania te posiadają nieciągłe, silnie oscylujące współczynniki. Konieczne jest więc zastosowanie metod przybliżonych. Jedną z nich jest metoda modelowania asymptotycznego [Woźniak et al. 2010]. Metoda ta pozwala wyznaczyć w przybliżeniu poszukiwane pola przemieszczenia, odkształcenia i naprężenia. Niestety omawiana metoda posiada pewną wadę. Jest nią to, że wyznaczone pole przemieszczenia nie spełnia zadanych warunków brzegowych na brzegach przecinających uwarstwienie. Dlatego dokonujemy modyfikacji rozwiązania otrzymanego w ramach modelowania asymptotycznego poprzez dodanie do tego rozwiązania dodatkowego składnika otrzymanego w ramach tego modelu [Woźniak 2010]. Składnik ten spełnia równanie tzw. efektu warstwy brzegowej, otrzymane na drodze modelowania tolerancyjnego, a warunki brzegowe nałożone na niego są takie, że pole przemieszczeń spełnia zadane na początku warunki brzegowe. W pracy ograniczono rozważania do płaskiego stanu odkształcenia, a potem do jednowymiarowego zagadnienia.

Adres do korespondencji – Corresponding author: Joanna Witkowska-Dobrev, Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego, Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska, Katedra Inżynierii Budowlanej, ul. Nowoursynowska 159, 02-776 Warszawa, e-mail: joanna_witkowska@sggw.pl

Rozpatrywana wielowarstwowa przegroda budowlana (rys. 1) w konfiguracji odniesienia zajmuje obszar:

$$\Omega \equiv (0, L) \times (0, H) \times R, \quad \mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3) \in \Omega, \quad x^1 \in (0, L), \quad (x^2, x^3) \in (0, H) \times R,$$

$$x = (x^1, x^2) \in (0, L) \times (0, H)$$



Rys. 1. Schemat kompozytu o podłużnej gradacji własności
Fig. 1. Scheme of FGM with longitudinally gradation

Każda warstwa kompozytu ma stałą grubość:

$$\eta = \frac{L}{p}$$

gdzie: p – liczba warstw, $\frac{1}{p} \ll 1$,

i składa się z dwóch izotropowych liniowo-sprężystych, idealnie przylegających materiałów. Jeden z materiałów nazywamy umownie osnową, a drugi wzmocnieniem. Rozpatrywany kompozyt charakteryzuje się podłużną gradacją własności, co oznacza, że nasycenie w ramach wszystkich warstw zmienia się bardzo wolno w kierunku osi Ox^2 . Funkcja $v^R(\cdot)$, $v^R(x^2) \in (0, 1)$, $x^2 \in [0, H]$, $v^R \in C^1([0, H])$ jest funkcją opisującą średnią frakcję wzmocnienia w warstwie, natomiast $v^M(\cdot)$, które opisuje średnią frakcję osnowy w warstwie, wynosi $v^M(x^2) = 1 - v^R(x^2)$, $x^2 \in [0, H]$. Własności materiałowe składników komponentów opisane są stałymi sprężystości Lamego i wynoszą odpowiednio: μ_M , λ_M i μ_R , λ_R , w macyzy i wzmocnieniu. Część kompozytu zajęta przez materiał osnowy oznaczona jest przez Ω_M , a wzmocnienia przez Ω_R .

METODYKA

Zgodnie z procedurą modelowania asymptotycznego [Woźniak et al. 2008, Woźniak 2010, Wągrowska i Witkowska-Dobrev 2010], dla rozpatrywanego kompozytu znajdującego się w płaskim stanie odkształcenia dla zagadnienia stacjonarnego poszukiwane pole przemieszczenia przybliżamy przez funkcję $\tilde{w}(\cdot)$, $\tilde{w} = (\tilde{w}_1, \tilde{w}_2)$:

$$\tilde{w}_1(x) = u_1(x) + h(x^1, x^2)v_1(x) \quad (1)$$

$$\tilde{w}_2(x) = u_2(x) + h(x^1, x^2)v_2(x)$$

gdzie: funkcje $u_1(\cdot)$, $u_2(\cdot)$, $v_1(\cdot)$, $v_2(\cdot) \in C^1(\bar{\Omega})$ są nieznanymi polami, noszącymi nazwę uśrednionego pola przemieszczeń i amplitudy fluktuacji przemieszczenia, $h(\cdot) \in C^0(\bar{\Omega})$ jest fluktuacyjną funkcją kształtu, która dla rozpatrywanego kompozytu jest funkcją kawałkami liniową, periodyczną w kierunku osi x^1 i wolno zmienia swoje wartości wzdłuż osi Ox^2 [Woźniak et al. 2008, Wągrowska i Witkowska-Dobrev 2010] i przyjmuje wartości z przedziału $\left(-\frac{\eta}{2}, \frac{\eta}{2}\right)$. W wyniku zastosowania procedury modelowania asymptotycznego [Woźniak et al. 2008, Wągrowska i Witkowska-Dobrev 2010] nieznanne pola $u_1(\cdot)$, $u_2(\cdot)$ można przedstawić jako funkcje zależne od $\partial_1 u_2(\cdot)$, $\partial_2 u_1(\cdot)$:

$$v_1 = -\left(\frac{v^R v^M}{(\lambda_R + 2\mu_R)v^M + (\lambda_M + 2\mu_M)v^R}\right) \times$$

$$\times \left[\left((2\mu_R + \lambda_R) - (2\mu_M + \lambda_M) \right) u_{11} + (\lambda_R - \lambda_M) u_{22} \right] \quad (2)$$

$$v_2 = \left(\frac{v^R v^M}{(v^R \mu_M + v^M \mu_R)}\right) \left[\left((\mu_R - \mu_M) u_{12} + (\mu_R - \mu_M) u_{21} \right) \right]$$

natomiast równania na nieznanne pola $u_1(\cdot)$, $u_2(\cdot)$ przyjmują postać [Wągrowska i Witkowska-Dobrev 2010]:

$$(2\mu + \lambda)_0 u_{11} + \left((\mu_0 + \tilde{\lambda}) u_{21} \right)_2 + (\mu_0 u_{12})_2 = 0 \quad (3)$$

$$\left((\mu_0 + \tilde{\lambda}) u_{11} \right)_2 + \mu_0 u_{21} + \left((2\mu + \lambda) u_{22} \right)_2 = 0$$

Występujące w nich ciągłe współczynniki noszą nazwę modułów efektywnych [Wągrowska i Witkowska-Dobrev 2010] i wynoszą odpowiednio:

$$\begin{aligned}
(2\mu + \lambda)_0 &= \frac{(2\mu_R + \lambda_R)(2\mu_M + \lambda_M)}{(2\mu_R + \lambda_R)v^M + (2\mu_M + \lambda_M)v^R} \\
\tilde{\lambda} &= \frac{(2\mu_M + \lambda_M)\lambda_R v^R + (2\mu_R + \lambda_R)v^M \lambda_M}{(2\mu_R + \lambda_R)v^M + (2\mu_M + \lambda_M)v^R} \\
\langle 2\mu + \lambda \rangle &= (2\mu_R + \lambda_R)v^R + (2\mu_M + \lambda_M)v^M \\
\overline{2\mu + \lambda} &= \langle 2\mu + \lambda \rangle - \frac{v^R v^M (\lambda_R - \lambda_M)^2}{(2\mu_R + \lambda_R)v^M + (2\mu_M + \lambda_M)v^R} \\
(2\mu + \lambda)_0 &= \frac{(2\mu_R + \lambda_R)(2\mu_M + \lambda_M)}{(2\mu_R + \lambda_R)v^M + (2\mu_M + \lambda_M)v^R} \\
\mu_0 &= \frac{\mu_R \mu_M}{\mu_R v^M + \mu_M v^R}
\end{aligned} \tag{4}$$

ROZWIĄZANIA SZCZEGÓLNE

Jako szczególny przypadek w rozpatrywanym modelu rozpatrzmy zagadnienie jednowymiarowe o niezerowej składowej wektora przemieszczenia $u_2(\cdot)$, zależnej od zmiennej x , $x^2 \in (0, H)$. Równania równowagi (3) redukują się wtedy do jednego równania w postaci [Wągrowska i Witkowska-Dobrev 2010]:

$$\left(\overline{(2\mu + \lambda)u_{22}} \right)_{,2} = 0 \tag{5}$$

a poszukiwane pola przemieszczenia w_1 i w_2 są przybliżone przez [Woźniak et al. 2008]:

$$w_1 \approx hM \partial_2 u_2 \tag{6}$$

$$w_2 \approx u_2 \tag{7}$$

gdzie:

$$M = - \left(\frac{v^R v^M}{(\lambda_R + 2\mu_R)v^M + (\lambda_M + 2\mu_M)v^R} \right) [(\lambda_R - \lambda_M)] \tag{8}$$

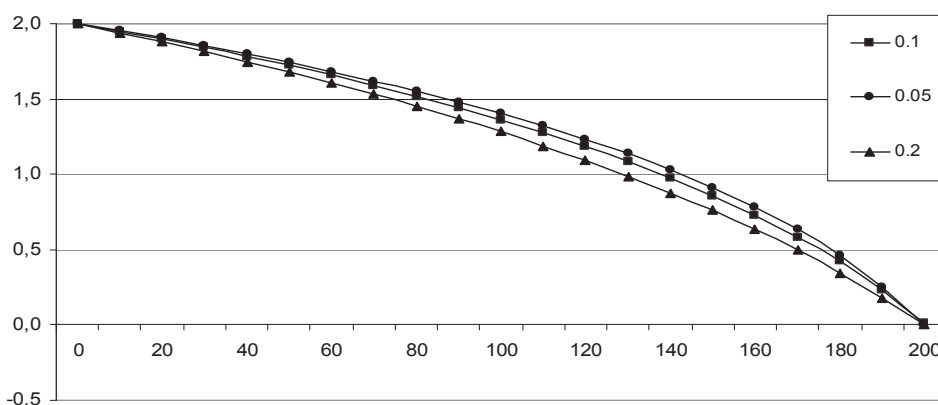
Z postaci rozwiązania (6) i (8) na pole w_1 widać, że nie jesteśmy w stanie spełnić warunków brzegowych na brzegach przecinających uwarstwienie.

W dalszej części pracy przedstawione zostanie rozwiązanie dla kompozytu o podłużnej gradacji własności, w przypadku gdy $L = 200$ cm, $H = 200$ cm i η cm, dla warunków brzegowych $u_2(x^1, 0, x^3) = u_o$, $u_2(x^1, H, x^3) = 0$, $x^1 \in [0, L]$, $x^3 \in R$. Dodatkowo zakładamy, że frakcja $\nu_R(\cdot)$ jest funkcją liniową daną wzorem $\nu^R(x^2) = \left(-\frac{0,8}{H}x^2 + 0,9\right)$.

1. Rozwiązanie dla $\lambda_R + \lambda_M$

Niech $\alpha \equiv \frac{2\mu_M + \lambda}{2\mu_M + \lambda}$, przyjmując jednocześnie, że $\alpha \in (0, 1)$, co nie ogranicza rozważań.

Dla dowolnej wartości α przemieszczenie $w_1(\cdot)$ jest równe zeru, natomiast pole przemieszczenia $w_2 \approx u_2$ dla różnych wartości α zostało przedstawione na rysunku 2.



Rys. 2. Rozkład pola przemieszczeń w_2 otrzymany w wyniku procedury modelowania asymptotycznego

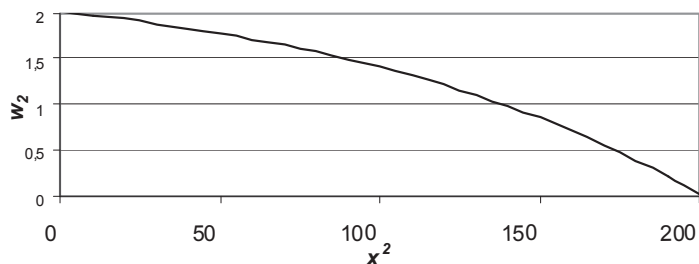
Fig. 2. Distribution of displacement field w_2 obtained by the asymptotic modelling procedure

2. Rozwiązanie dla $\lambda_R \neq \lambda_M$

Załóżmy, że $\lambda_M = 0,128$, $\mu_M = 0,055$, $\lambda_R = 0,5035$, $\mu_R = 0,2594$. Rozwiązanie na $w_2(\cdot)$ otrzymane w wyniku procedury modelowania asymptotycznego może być przedstawione w postaci $w_2 \approx u_2$, gdzie u_2 wynosi:

$$u_2(x^2) = -0,02215 \cdot \left[-160,46 \ln(|-112,1x^2 + 37\,366|) - 272,56 \ln(|112,1x^2 + 96\,829|) \right] - 104,72 \quad (9)$$

Rozkład przemieszczenia $w_2(\cdot)$ w ramach pojedynczej warstwy został przedstawiony na rysunku 3.



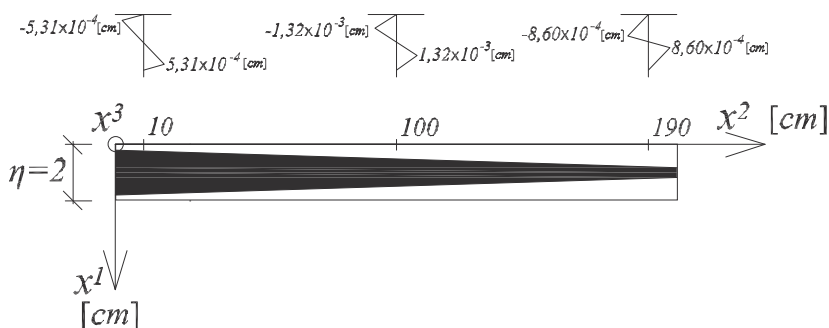
Rys. 3. Rozkład pola przemieszczenia w_2 otrzymanego w ramach modelowania asymptotycznego dla pojedynczej warstwy kompozytu

Fig. 3. Distribution of displacement field w_2 obtained under the asymptotic modeling for a single layer of composite

Natomiast składowa pola przemieszczenia $w_1(\cdot)$ otrzymana w ramach modelowania asymptotycznego jest przybliżona przez $hM\partial_2 u_2$, gdzie M jest przedstawione w postaci zależności (8), a:

$$\partial_2 u_2 = \frac{9,5914x^2 + 1057,6}{(x^2)^2 + 530,45x^2 - 2,8792 \cdot 10^5} \quad (10)$$

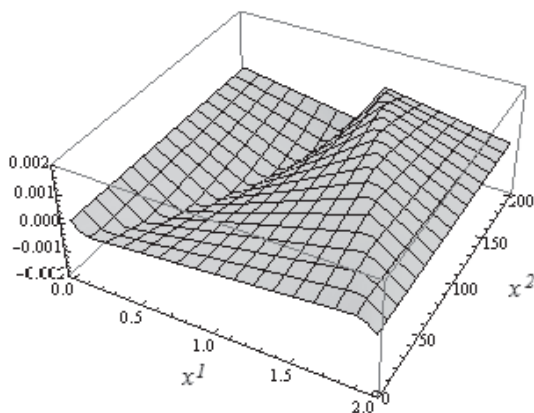
Na rysunku 4 przedstawiono rozkład składowej pola przemieszczenia $w_1(\cdot)$ w obrębie jednej warstwy dla wartości x^2 , wynoszącej odpowiednio: 10, 100, 190. Natomiast na rysunkach 5 i 6 przedstawiono rozkład pola przemieszczenia $w_1(\cdot)$ w obrębie całej jednej warstwy.



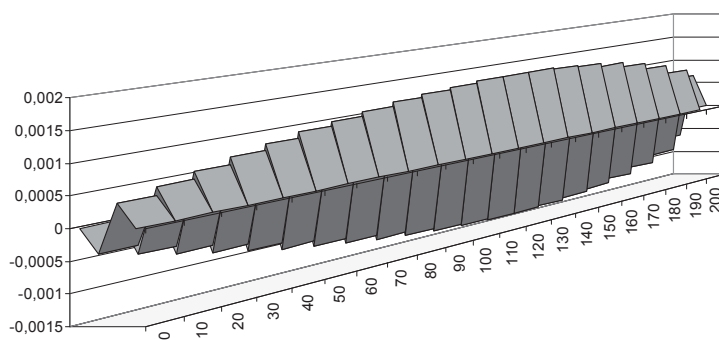
Rys. 4. Rozkład pola przemieszczenia $w_1(\cdot)$ w pojedynczej warstwie kompozytu dla $x^2 = 10, 100, 190$

Fig. 4. Distribution of the displacement field $w_1(\cdot)$ in a single layer for $x^2 = 10, 100, 190$

Należy pamiętać, że rozkład przemieszczenia w przekroju rozpatrywanej przegrody dla $x^3 = 0$ jest taki sam w każdej z rozpatrywanych warstw.



Rys. 5. Rozkład pola przemieszczenia $w_1(\cdot)$ dla pojedynczej warstwy kompozytu
 Fig. 5. Distribution of the displacement field $w_1(\cdot)$ for a single layer of composite



Rys. 6. Rozkład przemieszczenia $w_1(\cdot)$ dla pojedynczej warstwy kompozytu
 Fig. 6. Distribution of the displacement field $w_1(\cdot)$ for a single layer of the composite

EFEKT WARSTWY BRZEGOWEJ

Z postaci otrzymanych rozwiązań wynika, że w przypadku gdy $\lambda_R = \lambda_M$, rozwiązanie na $w_1(\cdot)$ otrzymane w ramach modelowania asymptotycznego spełnia warunek brzegowy na brzegach Γ :

$$\Gamma = (0, L) \times \{0\} \times R \cup (0, L) \times \{H\} \times R = \Gamma_0 \cup \Gamma_H \quad (11)$$

Natomiast w przypadku gdy $\lambda_R \neq \lambda_M$, rozwiązanie na $w_1(\cdot)$ otrzymane w ramach modelowania asymptotycznego nie spełnia warunków brzegowych na brzegach Γ opisanych zależnością (11).

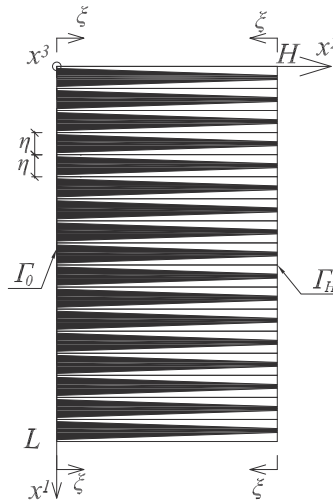
Aby rozwiązanie na $w_1(\cdot)$ spełniało warunki brzegowe na Γ , poszukujemy go w postaci $w_1^{(2)}(\cdot)$ [Woźniak 2010]:

$$w_1^{(2)} = w_1 + h q_1 = h M \partial_2 u_2 + h q_1 \quad (12)$$

gdzie: $u_2(\cdot)$ – rozwiązanie otrzymane w ramach procesu modelowania asymptotycznego,
 $h(\cdot)$ – dana (z metody asymptotycznej) fluktuacyjna funkcja kształtu.

Nieznane pole $q_1(\cdot)$ wyznaczamy z równania tzw. efektu warstwy brzegowej, otrzymanego w ramach procesu modelowania tolerancyjnego [Woźniak 2010].

Wprowadźmy współrzędną ξ , która jest prostopadła do brzegów Γ_0 i Γ_H oraz jest skierowana do wnętrza kompozytu (rys. 7).



Rys. 7. Przekrój kompozytu dla $x^3 = 0$ z nowymi współzrędnymi ξ
 Fig. 7. A cross section of composite for $x^3 = 0$ with the new coordinate ξ

Równanie efektu warstwy brzegowej na nieznane pole $q_1(\cdot)$ [Woźniak 2010] przyjmuje postać:

$$\langle (2\mu + \lambda) h^2 \rangle q_{1, \xi \xi \xi} - \langle (h_{,1})^2 \mu \rangle q_1 = 0 \quad (13)$$

gdzie $q_1(\cdot)$ spełnia warunki brzegowe odpowiednio dla warstwy przylegającej do Γ_0 i Γ_H :

$$q_1|_{\Gamma_0} = -M \partial_2 u_2|_{\Gamma_0} \quad \text{i} \quad q_1|_{\Gamma_H} = -M \partial_2 u_2|_{\Gamma_H} \quad (14)$$

Oznaczmy:

$$A_0 \equiv \langle (2\mu + \lambda)h^2 \rangle = \frac{\eta^2}{12} \langle 2\mu + \lambda \rangle$$

$$B_0 \equiv \langle \mu(h_{,1})^2 \rangle = \frac{\mu_M V^R + \mu_R V^M}{V^R V^M}$$
(15)

wtedy równanie (13) można przedstawić jako:

$$A_0 q_{1,\xi\xi} + B_0 q_1 = 0$$
(16)

Występujące w równaniu (13) wielkości A_0 i B_0 zależą od x^2 , a więc od zmiennej ξ (w pobliżu Γ_0 : $x^2 = \xi$, ($\xi = x^2$), Γ_H : $x^2 = -\xi$, ($\xi = H - x^2$)). Równanie (13) jest więc równaniem różniczkowym liniowym o funkcyjnych współczynnikach. Należy pamiętać, że współczynniki te są wielkościami, które bardzo wolno zmieniają swoje wartości względem zmiennej x^2 . Dotychczasowe wyniki badań dotyczące efektu warstwy brzegowej wykazały, że jego zasięg jest bardzo mały w porównaniu z wymiarem charakterystycznym ciała. W związku z tym możemy wartości współczynników A_0 i B_0 w dostatecznie małym otoczeniu Γ_0 i Γ_H przybliżyć przez wartości stałe. Przyjmujemy je odpowiednio przez wartości dla $x^2 = 0$ w otoczeniu Γ_0 i $x^2 = H$ w otoczeniu Γ_H i oznaczamy odpowiednio:

$$A_0^0 = A_0(0), \quad A_0^H = A_0(H)$$

$$B_0^0 = B_0(0), \quad B_0^H = B_0(H)$$
(17)

Zastępując zmienne wielkości A_0 i B_0 w równaniu (16) odpowiednio przez A_0^0 i B_0^0 w warstwie przylegającej do brzegu Γ_0 oraz A_0^H i B_0^H w warstwie przylegającej do brzegu Γ_H , otrzymujemy równania różniczkowe na $q_1(\xi)$ o stałych współczynnikach. Po rozwiązaniu tego równania otrzymujemy, że pole przemieszczenia $w_1^{(2)}(\cdot)$ może być aproksymowane w obszarze warstwy brzegowej w postaci:

- w obszarze przylegającym do Γ_0 ($\xi = x^2$)

$$w_1(x) \approx w_1^{(2)} = h(x^1, x^2)M(x^2)\partial_2 u_2(x^2) -$$

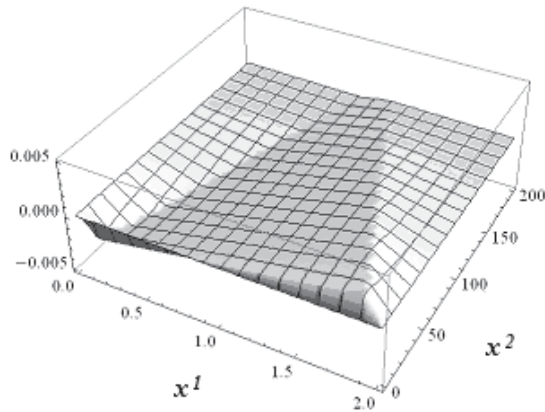
$$-h(x^1, 0)M(0)\partial_2 u_2(x^1, 0)\exp\left(-\frac{2}{\eta}\sqrt{\frac{3B_0^0}{A_0^0}}x^2\right)$$
(18a)

- w obszarze przylegającym do Γ_H ($\xi = H - x^2$)

$$w_1(x) \approx w_1^{(2)} = h(x^1, x^2)M(x^2)\partial_2 u_2(x^2) -$$

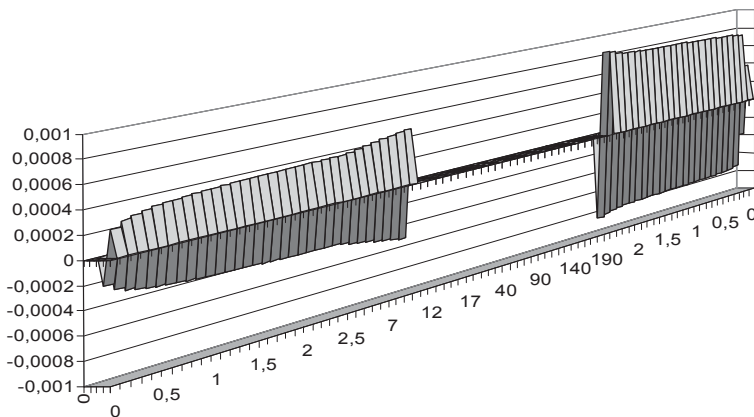
$$-h(x^1, 0)M(H)\partial_2 u_2(x^1, H)\exp\left(-\frac{2}{\eta}\sqrt{\frac{3B_0^H}{A_0^H}}(H - x^2)\right)$$
(18b)

Z postaci otrzymanych rozwiązań wynika, że wraz z oddalaniem się od brzegu Γ_0 i Γ_H składnik otrzymany w wyniku rozwiązania efektu warstwy brzegowej zanika. Rysunki 8 i 9 przedstawiają rozwiązania na $w_1^{(2)}(\cdot)$ w obrębie jednej warstwy. Należy pamiętać, że przy założonych warunkach brzegowych rozkład przemieszczeń w obrębie wszystkich warstw jest taki sam.



Rys. 8. Rozkład pola przemieszczenia $w_1(\cdot)$ z uwzględnieniem efektu warstwy brzegowej w pojedynczej warstwie

Fig. 8. Distribution of the displacement field $w_1(\cdot)$ taking into account the effect of boundary layers in a single layer



Rys. 9. Fragment rozkładu $w_1(\cdot)$ z uwzględnieniem efektu warstwy brzegowej w pojedynczej warstwie

Fig. 9. Fragment of distribution of $w_1(\cdot)$ including the effect boundary of layer

WNIOSKI

1. Rozwiązanie na pole przemieszczenia $w_1(\cdot)$ dla $\lambda_R = \lambda_M$ otrzymane w ramach modelowania asymptotycznego spełnia warunek brzegowy na brzegach przecinających uwarstwienie.

2. Rozwiązanie na $w_1(\cdot)$ dla $\lambda_R \neq \lambda_M$ otrzymane w ramach modelowania asymptotycznego nie spełnia warunków brzegowych na brzegach przecinających warstwę.

3. W wyniku zastosowania równań tzw. efektu warstwy brzegowej dla $\lambda_R \neq \lambda_M$ otrzymane rozwiązania na pole przemieszczenia $w_1(\cdot)$ spełniają warunki brzegowe na brzegach przecinających uwarstwienie. Efekt warstwy brzegowej zanika wraz z oddalaniem się od brzegu.

4. Na zasięg efektu warstwy brzegowej wpływa rodzaj materiałów, z jakich zbudowana jest przegroda – im bardziej różnią się one własnościami materiałowymi, tym zasięg ten jest większy.

PIŚMIENNICTWO

- Wągrowska M., Witkowska-Dobrev J., 2010. Wpływ struktury gradientowej na własności sprężyste kompozytów warstwowych. *Acta Scientiarum Polonorum, Architectura* 9 (4), 5–13.
- Woźniak Cz. 2010. Asymptotic Modelling and Boundary – Layer Effect for Functionally Graded Microlayered Composites. *Acta Scientiarum Polonorum, Architectura* 9 (2), 3–9.
- Woźniak Cz., Michalak B., Jędrysiak J., 2008. Thermomechanics of Heterogeneous Solids and Structures. Tolerance Averaging Approach. Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź.
- Woźniak Cz. et al., 2010. Mathematical Modelling and Analysis in Continuum Mechanics of Microstructured Media. Professor Margaret Woźniak pro Memoria. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice.

EFFECT OF BOUNDARY LAYER IN A WALL WITH LONGITUDINAL GRADATION OF EFFECTIVE PROPERTIES

Abstract. The boundary layer effect for multilayered wall with longitudinal gradation of effective properties was investigated. The consideration was reduced to the one dimensional stationary problem. This wall was made of two isotropic, homogeneous and linear elastic components.

Key words: functional gradation of the material properties, asymptotic modelling, boundary layer effect

Zaakceptowano do druku – Accepted for print: 20.09.2011