

WPLYW STRUKTURY GRADIENTOWEJ NA WŁASNOŚCI SPRĘŻYSTE KOMPOZYTÓW WARSTWOWYCH

Monika Wągrowa, Joanna Witkowska-Dobrev

Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie

Streszczenie. Przedmiotem rozważań jest wielowarstwowa przegroda zbudowana z kompozytu o funkcyjnej gradacji własności, charakteryzująca się podłużną gradacją materiału (FGM – Functionally Graded Materiale). Każda z warstw kompozytu składa się z dwóch izotropowych jednorodnych składników, będących w płaskim stanie odkształcenia.

Słowa kluczowe: materiał typu FGM, podłużna gradacja własności, modelowanie asymptotyczne

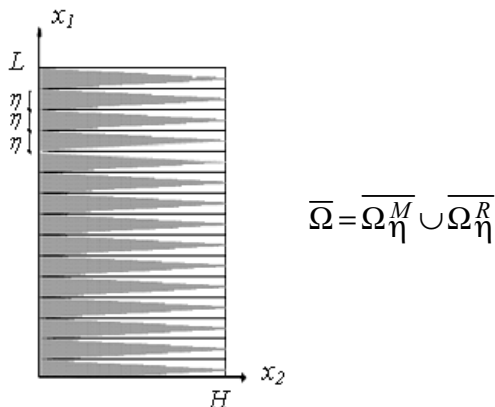
WSTĘP

Materiały z funkcyjną gradacją własności (Functionally Graded Materiale – FGM) już od dawna były znane w Japonii. Robiono z nich słynne samurajskie miecze z różnych rodzajów stali. Obecnie materiały typu FGM mają bardzo duże zastosowanie w wielu gałęziach przemysłu, m.in. w budownictwie, medycynie, lotnictwie oraz w technologiach kosmicznych. W równaniach opisujących zachowanie się tych materiałów pojawiają się skokowo zmieniające się współczynniki, co powoduje niemożność wyznaczenia w większości przypadków rozwiązań analitycznych, dotyczących problemów inżynierskich. Stworzono więc wiele sposobów przybliżonego rozwiązywania danego problemu. Wśród nich należy wyróżnić metodę tolerancyjnego uśredniania oraz metodę modelowania asymptotycznego dla wielowarstwowych dwuskładnikowych materiałów typu FGM [Woźniak i in. 2008, Woźniak i in. 2010].

Celem pracy jest odpowiedź na pytanie: czy jest możliwe zaproponowanie takiej budowy kompozytu typu FGM, o podłużnej gradacji własności, znajdującego się w płaskim stanie odkształcenia, aby w ramach modelu asymptotycznego występowały w nim zadane *a priori* jednowymiarowe pola przemieszczeń?

METODYKA

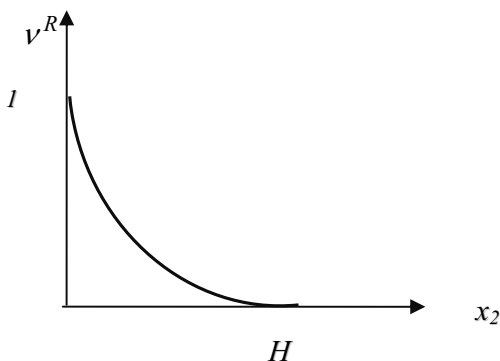
Rozpatrywany kompozyt (rys. 1) w konfiguracji odniesienia zajmuje obszar: $\Omega = (0, L) \times (0, H)$, $x_1 \in [0, L]$, $x_2 \in [0, H]$. Każda z warstw kompozytu ma stałą grubość $\eta = L/n$, $\eta \ll L$, i składa się z dwóch izotropowych, jednorodnych składników, noszących nazwę matrycy oraz wzmocnienia. Ich własności opisane są stałymi sprężystości Lamego i wynoszą odpowiednio: w matrycy μ_M, λ_M i we wzmocnieniu μ_R, λ_R .



Rys. 1. Schemat kompozytu typu FGM o gradacji podłużnej

Fig. 1. Scheme of FGM with longitudinally gradation

Część kompozytu zajęta przez materiał matrycy oznaczona jest przez Ω_M^η , a wzmocnienia – przez Ω_R^η . Funkcja $v^R(x_2)$, $x_2 \in (0, H)$ dla kompozytów o podłużnej gradacji jest funkcją opisującą średnią frakcję wzmocnienia w warstwie: $v^R(\cdot) \in C^1[0, H]$, $v^R(x_2) \in (0, 1)$, $v^M(\cdot) \equiv 1 - v^R(\cdot)$ – rysunek 2.



Rys. 2. Przykładowy rozkład funkcji charakteryzującej frakcję wzmocnienia $v^R(\cdot)$ w warstwie

Fig. 2. Example of function characterizing reinforcement fraction $v^R(\cdot)$ in a layer

Równania rozpatrywanego kompozytu w ramach liniowej teorii sprężystości dla zagadnień stacjonarnych przyjmują postać:

$$\left[(2\mu_\eta + \lambda_\eta) w_{1,1} \right]_{,1} + (\lambda_\eta w_{2,2})_{,1} + \left[\mu_\eta (w_{1,2} + w_{2,1}) \right]_{,2} = 0 \quad (1)$$

$$\left[\mu_\eta (w_{1,2} + w_{2,1}) \right]_{,1} + \left[(2\mu_\eta + \lambda_\eta) w_{2,2} \right]_{,2} + (\lambda_\eta w_{1,1})_{,2} = 0$$

Z powodu skokowo zmieniających się wartości współczynników w równaniach (1) w wielu przypadkach inżynierskich nie posiadają one analitycznych rozwiązań. W celu znalezienia rozwiązania pola przemieszczenia należy wykorzystać zaproponowaną przez Woźniaka i innych [2010] metodę modelowania asymptotycznego.

W procesie modelowania asymptotycznego zakłada się, że wektor przemieszczenia przyjmuje postać:

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + h_\lambda \mathbf{v}$$

gdzie h_λ jest daną z góry funkcją kształtu [Wągrowaska 2010], a poszukiwane są pola $\mathbf{u}(\cdot), \mathbf{v}(\cdot) \in C^1(\bar{\Omega})$.

W wyniku zastosowania procedury modelowania asymptotycznego otrzymuje się równania na składowe $u_1(\cdot), u_2(\cdot)$ nowego pola przemieszczeń $\mathbf{u}(\cdot) = (u_1(\cdot), u_2(\cdot))$:

$$(2\mu + \lambda)_0 u_{1,1} + \left[(\mu_0 + \tilde{\lambda}) u_{2,1} \right]_{,2} + (\mu_0 u_{1,2})_{,2} = 0 \quad (2)$$

$$\left[(\mu_0 + \tilde{\lambda}) u_{1,1} \right]_{,2} + \mu_0 u_{2,1} + \left[(2\mu + \lambda) u_{2,2} \right]_{,2} = 0$$

a równania na $v_1(\cdot), v_2(\cdot)$, gdzie $\mathbf{v} = (v_1(\cdot), v_2(\cdot))$ przyjmują postać:

$$v_1 = - \left[\frac{\mathbf{v}^R \mathbf{v}^M}{(\lambda_R + 2\mu_R) \mathbf{v}^M + (\lambda_M + 2\mu_M) \mathbf{v}^R} \right] \times \\ \times \left[((2\mu_R + \lambda_R) - (2\mu_M + \lambda_M) u_{1,1}) + (\lambda_R - \lambda_M) u_{2,2} \right] \quad (3)$$

$$v_2 = - \left[\frac{\mathbf{v}^R \mathbf{v}^M}{(\mathbf{v}^R \mu_M + \mathbf{v}^M \mu_R)} \right] \left[((\mu_R - \mu_M) u_{1,2} + (\mu_R - \mu_M) u_{2,1}) \right]$$

W równaniach (2) i (3) występują nowe współczynniki, zwane modułami efektywnymi, które wynoszą odpowiednio:

$$\tilde{\lambda} = \frac{(2\mu_M + \lambda_M) \lambda_R \mathbf{v}^R + (2\mu_R + \lambda_R) \mathbf{v}^M \lambda_M}{(2\mu_R + \lambda_R) \mathbf{v}^M + (2\mu_M + \lambda_M) \mathbf{v}^R} \quad (4)$$

$$(2\mu + \lambda)_0 = \frac{(2\mu_R + \lambda_R)(2\mu_M + \lambda_M)}{(2\mu_R + \lambda_R)v^M + (2\mu_M + \lambda_M)v^R} \quad (4)$$

$$\mu_0 = \frac{\mu_R \mu_M}{\mu_R v^M + \mu_M v^R}$$

ANALIZA

Rozważania zawężono do zagadnienia jednowymiarowego o niezerowej składowej wektora przemieszczenia $u_2(\cdot)$, która zależy od zmiennej x_2 . W związku z tym równania równowagi redukują się do jednego równania na jedną składową pola przemieszczenia $u_2(\cdot)$:

$$\left(\overline{(2\mu + \lambda)u_{2,2}} \right)_{,2} = 0 \quad (5)$$

Zakłada się dodatkowo, że $\lambda_R = \lambda_M = \lambda$, wtedy moduł efektywny $\overline{2\mu + \lambda}$ redukuje się do postaci :

$$\begin{aligned} \overline{2\mu + \lambda} &= (2\mu_M + \lambda)v^M + (2\mu_R + \lambda)v^R = (2\mu_M + \lambda) - (2\mu_M + \lambda)v^R + (2\mu_R + \lambda)v^R = \\ &= (2\mu_R + \lambda) \left(\alpha + (1 - \alpha)v^R \right) \end{aligned}$$

gdzie: $\alpha \equiv \frac{2\mu_M + \lambda}{2\mu_R + \lambda}$

Zakładając dodatkowo, że $\alpha \in (0,1)$, co nie ogranicza tych rozważań, otrzymuje się:

$$u_{2,2}(x_2) = \frac{B}{\alpha + (1 - \alpha)v^R(x_2)} \quad (6)$$

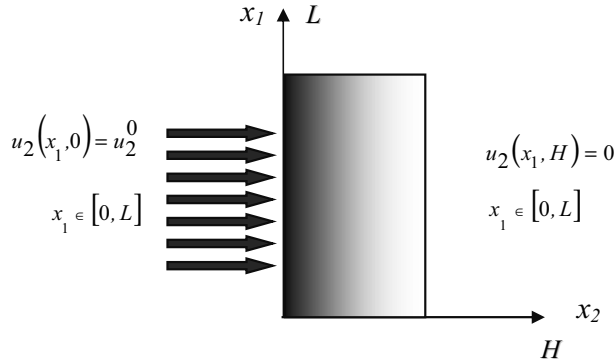
gdzie B powinno być wyznaczone z warunków brzegowych.

Z równania (6) wynika, że funkcja charakteryzująca średnią frakcję wzmocnienia $v^R(x_2)$ wynosi:

$$v^R(x_2) = \frac{B - \alpha u_{2,2}(x_2)}{(1 - \alpha)u_{2,2}(x_2)} \quad (7)$$

Należy odpowiedzieć na pytanie: czy istnieje taki rozkład funkcji $v^R(\cdot)$, dla którego w ramach modelu asymptotycznego otrzyma się jednowymiarowy zadany *a priori* rozkład przemieszczenia, spełniający warunki brzegowe: $u_2(x_1, 0) = u_2^0$, $u_2(x_1, H) = 0$, $x_1 \in [0, L]$?

Przypadek 1. Należy sprawdzić, czy istnieje taki rozkład malejącej funkcji $v^R(\cdot)$, spełniającej warunki $v^R(0) = 1, v^R(H) = 0$, dla której jednowymiarowa malejąca funkcja przemieszczenia spełnia zadane warunki brzegowe (rys. 3).



Rys. 3. Model asymptotyczny kompozytu o gradacji podłużnej z zadanymi warunkami brzegowymi
 Fig. 3. Asymptotic model of FGM with longitudinal gradation with given boundary conditions

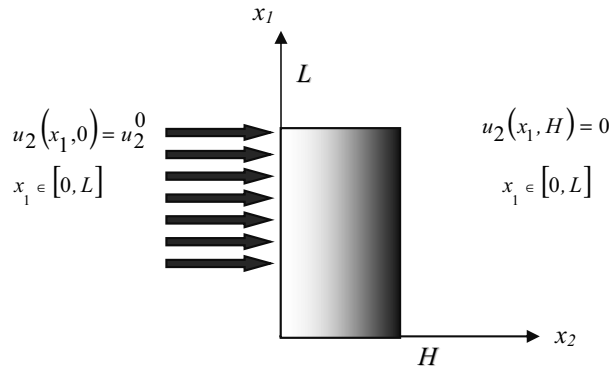
Odpowiedź jest pozytywna, gdy gradient zadanego wektora przemieszczenia spełnia dodatkowe warunki:

$$\alpha u_{2,2}(H^-) = u_{2,2}(0^+), \quad \partial^2 u_2(x_2) < 0, \quad x_2 \in (0, H)$$

Wtedy $v^R(\cdot)$ przyjmuje postać:

$$v^R(x_2) = \frac{u_{2,2}(0^+) - \alpha u_{2,2}(x_2)}{(1 - \alpha)u_{2,2}(x_2)} = \frac{\alpha u_{2,2}(H^+) - \alpha u_{2,2}(x_2)}{(1 - \alpha)u_{2,2}(x_2)} \quad (8)$$

Przypadek 2. Należy sprawdzić, czy istnieje taki rozkład malejącej funkcji $v^R(\cdot)$, spełniającej warunki $v^R(0) = 1, v^R(H) = 0$, dla której jednowymiarowa malejąca funkcja przemieszczenia spełnia zadane warunki brzegowe (rys. 4).



Rys. 4. Model asymptotyczny kompozytu o gradacji podłużnej z zadanymi warunkami brzegowymi
 Fig. 4. Asymptotic model of FGM with longitudinal gradation with given boundary conditions

Odpowiedź jest pozytywna, gdy gradient zadanego wektora przemieszczenia spełnia dodatkowe warunki:

$$\alpha u_{2,2}(H^-) = u_{2,2}(0^+), \quad \partial^2 u_2(x_2) < 0, \quad x_2 \in (0, H)$$

Wtedy $v^R(\cdot)$ przyjmuje postać:

$$v^R(x_2) = \frac{u_{2,2}(0^+) - \alpha u_{2,2}(x_2)}{(1-\alpha)u_{2,2}(x_2)} = \frac{\alpha u_{2,2}(H^+) - \alpha u_{2,2}(x_2)}{(1-\alpha)u_{2,2}(x_2)} \quad (9)$$

Ilustracja graficzna, przedstawiająca zależność między rozkładem przemieszczeń i odpowiadających im nasyceń przy zadanych warunkach brzegowych.

W przypadku 1, gdy:

$$u_2(x_2) = ax_2^2 + bx_2 + c, \quad u_2(\cdot) \text{ jest wypukłą funkcją kwadratową,}$$

$$a = -\frac{u_0(1-\alpha)}{H^2(1+\alpha)}, \quad b = -\frac{2\alpha u_0}{H(1+\alpha)}, \quad c = u_0,$$

wtedy odpowiadająca im funkcja $v^R(\cdot)$ jest rosnąca i opisana wzorem:

$$v^R = \frac{\alpha x}{(1-\alpha)x - H}, \quad x_2 \in [0, H]$$

Wykresy funkcji przemieszczenia $u_2(\cdot)$ i odpowiadającej jej funkcji $v^R(\cdot)$ dla różnych wartości α przedstawia rysunek 5.

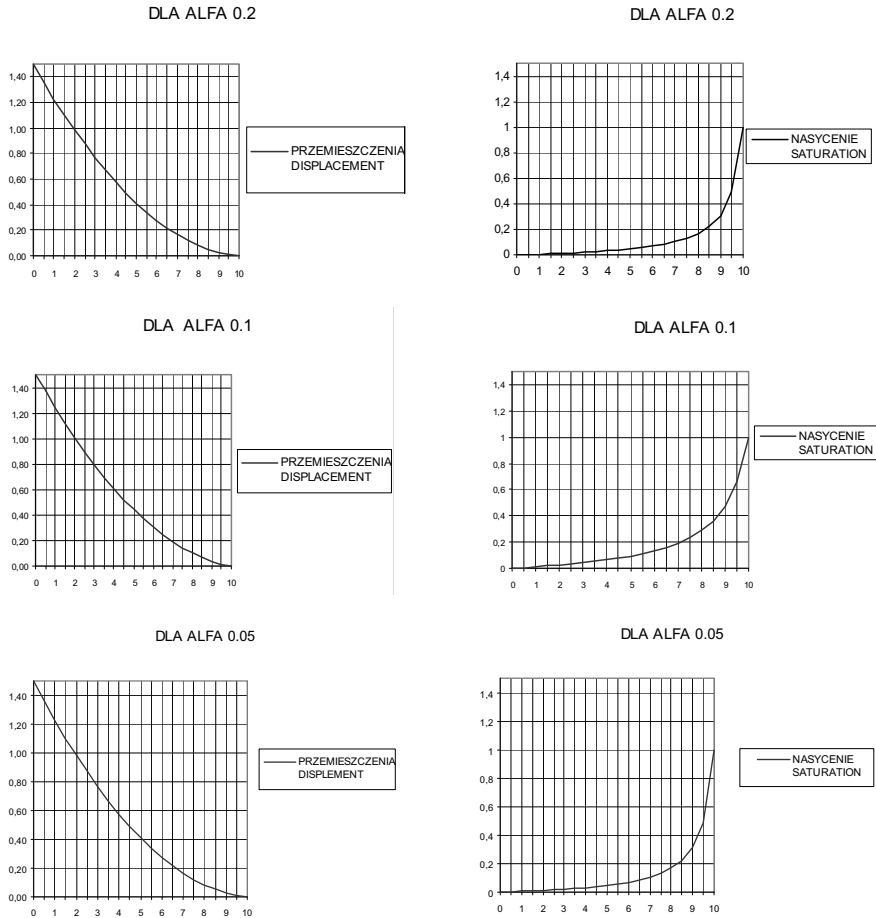
W przypadku 2, gdy:

$$u_2(x_2) = ax_2^2 + bx_2 + c, \quad u_2(\cdot) \text{ jest wklęsłą funkcją kwadratową,}$$

$$a = -\frac{u_0(1-\alpha)}{H^2(1+\alpha)}, \quad b = -\frac{2\alpha u_0}{H(1+\alpha)}, \quad c = u_0,$$

wtedy odpowiadająca im funkcja $v^R(\cdot)$ jest malejąca i opisana wzorem:

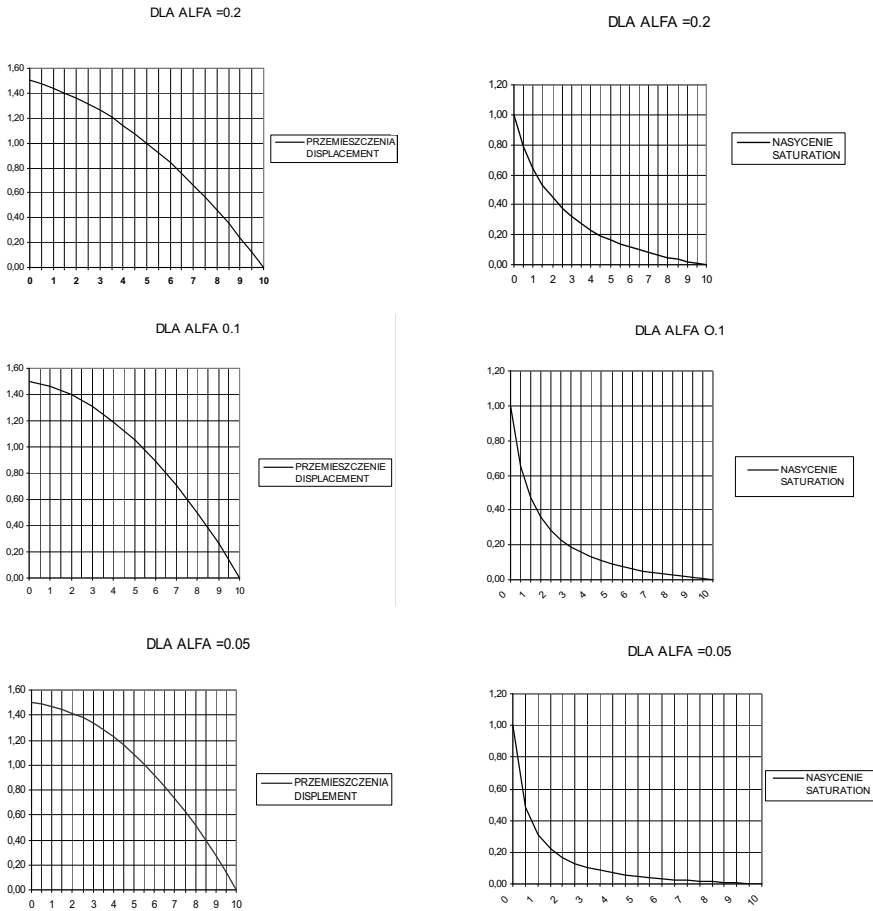
$$v^R = \frac{\alpha(H-x)}{(1-\alpha)x + H\alpha}$$



Rys. 5. Wykresy funkcji przemieszczenia i odpowiadającej jej funkcji nasycenia dla $\alpha = 0,2, 0,1, 0,05, H = 10$

Fig. 5. Graphs of functions of displacement and reinforcement fraction for $\alpha = 0,2, 0,1, 0,05, H = 10$

Wykresy funkcji przemieszczenia $u_2(\cdot)$ i odpowiadającej funkcji $v^R(\cdot)$ dla różnych wartości α przedstawia rysunek 6.



Rys. 6. Wykresy funkcji przemieszczenia i odpowiadającej jej funkcji nasycenia dla $\alpha = 0,2, 0,1, 0,05, H = 10$

Fig. 6. Graphs of functions of displacement and reinforcement fraction for $\alpha = 0,2, 0,1, 0,05, H = 10$

WNIOSEK

W ramach modelowania asymptotycznego dla zagadnienia jednowymiarowego w przypadku kompozytów typu FGM, charakteryzujących się podłużną gradacją własności, można zaproponować taką postać funkcji $v^R(\cdot)$, dla której zostanie zrealizowane zadane *a priori* pole przemieszczeń:

- gdy $u_2(\cdot)$ jest funkcją wypukłą malejącą, to $v^R(\cdot)$ jest funkcją rosnącą,
- gdy $u_2(\cdot)$ jest funkcją wklęsłą malejącą, to $v^R(\cdot)$ jest funkcją malejącą.

PIŚMIENNICTWO

- Wągrowka M., 2010. Modele asymptotyczne w elastostatyce materiałów gradientowych. Konferencja „Mechanika ośrodków niejednorodnych”. Łagów, 87–88.
- Wągrowka M., Witkowska-Dobrev J., 2010. Wpływ struktury gradientowej na własności sprężyste kompozytów warstwowych. Konferencja „Mechanika ośrodków niejednorodnych”. Łagów, 89–90.
- Woźniak Cz., Michalak B., Jędrysiak J., 2008. Thermomechanics of microheterogeneous solids and structures. Wydawnictwa Politechniki Łódzkiej, Łódź.
- Woźniak Cz. i in., 2010. Mathematical modelling and analysis in continuum mechanics of microstructured media. Wydawnictwa Politechniki Śląskiej, Gliwice.

INFLUENCE OF GRADIENT STRUCTURE ON ELASTIC PROPERTIES FOR MULTILAYERED COMPOSITES

Abstract. The aim of this paper is a multilayered thick plate with longitudinal gradation of materials. Every layer contains of two isotropic, homogeneous components which are in a plane strain.

Key words: FGM materials, longitudinal gradation of properties, asymptotic modelling

Zaakceptowano do druku – Accepted for print: 22.12.2010