

O PEWNEJ METODZIE OBLICZANIA PIERWSZEJ CZĘSTOŚCI DRGAŃ WŁASNYCH SŁUPÓW STALOWYCH W KSZTAŁCIE WYDRAŻONEGO ŚCIĘTEGO STOŻKA

Jacek Jaworski

Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie

Streszczenie. W pracy wyprowadzono wzory na pierwszą częstość drgań własnych (giętych) stalowego słupa w kształcie wydrążonego ściętego stożka (rury stożkowej) o zmiennej grubości ścianki. Zastosowano pewien przybliżony sposób wyznaczania okresu drgań własnych słupa lub innej konstrukcji typu wieżowego. Uzyskane rozwiązanie zawiera całki, dla których nie jest znane rozwiązanie ogólne, konieczne jest ich obliczenie numeryczne. Rozwiązano także przypadek rury stożkowej o stałej grubości ścianki.

Słowa kluczowe: słup stalowy, okres drgań własnych, pierwsza częstość drgań własnych

WSTĘP

Obliczanie pierwszej częstości drgań własnych (giętych) konstrukcji wieżowych (utwierdzonych w podstawie prętów wspornikowych: wież, słupów, kominów) wynika najczęściej z konieczności oszacowania podatności konstrukcji na oddziaływanie porywów wiatru. Powszechne zastosowanie w tych obliczeniach znalazły programy komputerowe, wykorzystujące metodę elementów skończonych, które umożliwiają przeprowadzenie analizy modalnej i określenie częstości drgań własnych konstrukcji. Inne sposoby postępowania dla różnie ukształtowanych konstrukcji wieżowych podane są w normie PN-77/B-02011.

METODA OBLICZEŃ

Jedna z przybliżonych metod obliczania pierwszej częstości drgań własnych konstrukcji wieżowych, podana na przykład w tablicy Z2-2 normy PN-77/B-02011, polega na podziale słupa na pewną liczbę mas skupionych, określeniu ugięcia słupa na wysoko-

ści każdej z mas (pod działaniem jednostkowej siły poziomej przyłożonej do wierzchołka słupa) i obliczeniu okresu drgań zgodnie z pierwszą formą wzoru (1). Korzystając z tego, że dla słupów (także niektórych wież, kominów) o regularnych kształtach, wykonanych z materiałów sprężystych o stałej gęstości, moment bezwładności przekroju poprzecznego i ugięcie można wyrazić funkcjami ciągłymi, sumowanie może być zastąpione całkowaniem, jak podano w drugiej formie wzoru (1):

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^z M_i f_i^2}{f_1}} = 2\pi \sqrt{\frac{\int_0^H f^2(x) M(x) dx}{f_1}} \quad (1)$$

gdzie: T – okres drgań,

M_i – wielkość i -tej masy skupionej,

f_i – przemieszczenie słupa na wysokości i -tej masy pod działaniem siły $P = 1$,

f_1 – przemieszczenie wierzchołka słupa pod działaniem siły $P = 1$,

$f(x)$ – przemieszczenie słupa pod działaniem siły $P = 1$ na wysokości określonej przez współrzędną x ,

H – wysokość słupa.

Taka metoda postępowania dla słupów o stałym przekroju walcowym jest powszechnie znana. Jej zaletą jest brak niedokładności związanej z przyjęciem skończonej liczby mas skupionych, a ograniczeniem – możliwością obliczenia tylko pierwszej częstości drgań własnych (giętych). Podstawową wadą jest uproszczenie, polegające na arbitralnym przyjęciu kształtu drgań w postaci linii ugięcia. Inne uproszczenia tej metody omówiono na przykład w pracach Awrejcewicza i Kryski [2000] oraz Bijaka-Żochowskiego i innych [2006]. Obszerne porównanie wyników obliczeń pierwszej częstości drgań własnych słupa o przekroju walcowym tą i innymi metodami uproszczonymi znaleźć można w pracy Dyląga i innych [2000].

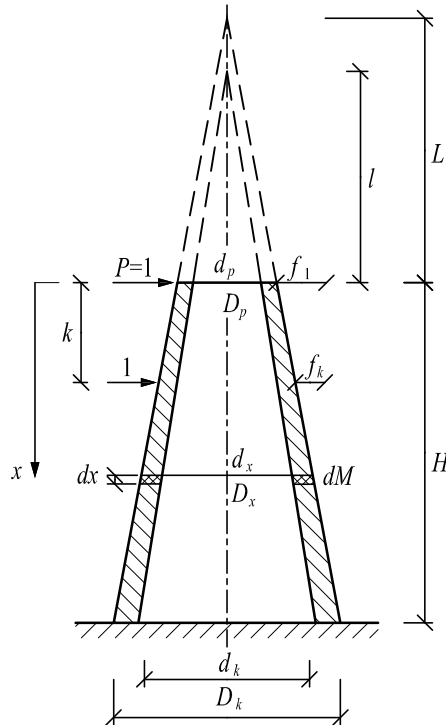
Zastosowanie tego sposobu postępowania dla słupów w kształcie ściętego stożka (pełnego) doprowadziło do wyprowadzenia prostego wzoru na obliczenie okresu drgań [Jaworski i in. 2009a]. Uzyskane rozwiązanie można też łatwo dostosować do słupów w kształcie ostrosłupów prawidłowych, a także pewnego przypadku szczególnego słupów wydrążonych, kiedy tworzące stożka zewnętrzne i wewnętrzne przecinają się na osi stożka w jednym punkcie. Porównanie wyników z innymi metodami [Jaworski i in. 2009b] pokazało, że otrzymano zbliżone wartości okresów drgań dla słupów w kształcie ściętych stożków o małych i średnich zbieżnościach stożka i znacznie różniące się wartości okresów drgań dla słupów o dużych zbieżnościach stożka.

W niniejszej pracy zastosowano opisaną metodę postępowania do przypadku słupa w kształcie wydrążonego ściętego stożka (rury stożkowej o zmiennej grubości ścianki). Wyprowadzono wzory na okres drgań takiego słupa. Rozpatrzono też ważny, z praktycznego punktu widzenia, przypadek słupa w kształcie ściętego stożka, wykonanego z blachy o stałej grubości, czyli rury stożkowej o zmiennym przekroju i stałej grubości ścianki.

SŁUP W KSZTAŁCIE RURY STOŻKOWEJ O ZMIENNEJ GRUBOŚCI ŚCIANKI

Przy wyprowadzeniu wzorów wykorzystujemy schemat budowy słupa i oznaczenia przedstawione na rysunku 1. Przez n , m i α oznaczono odpowiednio stosunki średnic:

$$n = \frac{D_k}{D_p} \quad (2); \quad m = \frac{d_k}{d_p} \quad (3); \quad \alpha = \frac{d_p}{D_p} \quad (4)$$



Rys. 1. Schemat do obliczeń okresu drgań własnych dla rury stożkowej o zmiennej grubości ścianki: x – oś współrzędnych, H – wysokość, L , l – odległości wierzchołka słupa od punktów przecięcia tworzących stożka zewnętrznego i wewnętrznego z osią słupa, D_p , D_x , D_k , d_p , d_x , d_k – zewnętrzne i wewnętrzne średnice przy wierzchołku, dla współrzędnej x i przy podstawie, P – siła poprzeczna, 1 – siła jednostkowa, k – odległość od wierzchołka do punktu przyłożenia siły jednostkowej, f_1 – ugięcie wierzchołka słupa, f_k – ugięcie słupa na wysokości określonej przez odległość k , dx – elementarna długość, dM – elementarna masa

Fig. 1. Scheme for calculations of natural period for tube shaped like a cone with variable wall thickness: x – coordinate axe, H – height, L , l – distances between the head of column and points of intersection of generating lines of external and internal cones with a cone axis, D_p , D_x , D_k , d_p , d_x , d_k – external and internal diameters at head, for coordinate x and at footing, P – transverse force, 1 – unit force, k – distance between the head of column and the point of application of the unit force, f_1 – deflection at the head of column, f_k – deflection at the point defined by a distance k , dx – infinitesimal length, dM – infinitesimal mass

gdzie: D_k – średnica zewnętrzna rury przy podstawie słupa,
 D_p – średnica zewnętrzna rury przy wierzchołku słupa,
 d_k – średnica wewnętrzna rury przy podstawie słupa,
 d_p – średnica wewnętrzna rury przy wierzchołku słupa.

Odległości L i l od wierzchołka słupa do punktu przecięcia tworzących stożka zewnętrznego i wewnętrznego z osią stożka mogą być określone w funkcji wysokości słupa (H):

$$L = H \frac{D_p}{D_k - D_p} = \frac{H}{n-1}; \quad l = H \frac{d_p}{d_k - d_p} = \frac{H}{m-1} \quad (5)$$

zewnętrzną zaś i wewnętrzną średnicę na wysokości określonej przez współrzędną x można wyrazić jako:

$$D_x = \frac{D_p}{L}(x+L); \quad d_x = \frac{d_p}{l}(x+l) \quad (6)$$

Masa elementarna (masa plastra o grubości dx usytuowanego na wysokości określonej przez współrzędną x) jest zależna od gęstości materiału (ρ) i można ją określić wzorem:

$$dM = \rho \frac{\pi(D_x^2 - d_x^2)}{4} dx = \rho \frac{\pi D_p^2}{4H^2} \left[(n-1)^2(x+L)^2 - \alpha^2(m-1)^2(x+l)^2 \right] dx \quad (7)$$

Wprowadzając dla skrócenia zapisu dalszych wzorów oznaczenia:

$$a = n-1 \quad (8); \quad b = \alpha(m-1) \quad (9); \quad c = (n-1)L \quad (10); \quad d = \alpha(m-1)l \quad (11)$$

masę elementarną możemy wyrazić jako:

$$dM = \rho \frac{\pi}{4} \frac{D_p^2}{H^2} \left[(a^2 - b^2)x^2 + 2(ac - bd)x + (c^2 - d^2) \right] dx \quad (12)$$

Moment bezwładności przekroju poprzecznego słupa można określić, jak następuje:

$$J(x) = \frac{\pi(D_x^4 - d_x^4)}{64} = \frac{\pi}{64} \frac{D_p^4}{H^4} \left[(n-1)^4(x+L)^4 - \alpha^4(m-1)^4(x+l)^4 \right] \quad (13)$$

Ugięcie swobodnego (górnego) końca słupa pod działaniem przyłożonej poziomo do wierzchołka siły $P = 1$ obliczyć można metodą Maxwella-Mohra jako:

$$f_1 = \int_0^H \frac{x^2 dx}{EJ(x)} = \frac{64H^4}{\pi ED_p^4} \int_0^H \frac{x^2 dx}{(n-1)^4(x+L)^4 - \alpha^2(m-1)^4(x+L)^4} = \frac{64H^4}{\pi ED_p^4} \int_0^H K_2(x) dx \quad (14)$$

Ugięcia na jednostkę siły w odległości k od wierzchołka słupa ($0 \leq k \leq H$) można natomiast określić, przykładając siłę $P = 1$ do wierzchołka słupa, a siłę jednostkową w punkcie odległym o k od wierzchołka (k jest tu traktowane jak wielkość stała):

$$f_k = \int_k^H \frac{x(x-k)}{EJ(x)} dx = \frac{64H^4}{\pi ED_p^4} \left(\int_k^H K_2(x) dx - k \int_k^H K_1(x) dx \right) \quad (15)$$

Określone poniżej wyrażenia $K_1(x)$ i $K_2(x)$ można przekształcić do innej, wygodniejszej do całkowania postaci:

$$K_1(x) = \frac{x}{(n-1)^4(x+L)^4 - \alpha^4(m-1)^4(x+L)^4} = \frac{\alpha_1}{(a-b)x + (c-d)} + \frac{\alpha_2}{(a+b)x + (c+d)} + \frac{\beta x + \gamma}{(a^2 + b^2)x^2 + (2ac + 2bd)x + (c^2 + d^2)} \quad (16)$$

$$K_2(x) = \frac{x^2}{(n-1)^4(x+L)^4 - \alpha^4(m-1)^4(x+L)^4} = K_1(x)x = \frac{\alpha_1 x}{(a-b)x + (c-d)} + \frac{\alpha_2 x}{(a+b)x + (c+d)} + \frac{\beta x^2 + \gamma x}{(a^2 + b^2)x^2 + (2ac + 2bd)x + (c^2 + d^2)} \quad (17)$$

gdzie a, b, c, d – jak we wzorach (8–11), a $\alpha_1, \alpha_2, \beta, \gamma$ oraz A, B, C, D określone zostały zależnościami (18) i (19):

$$\alpha_1 = -\frac{D}{AB - CD}; \quad \alpha_2 = \frac{B}{AB - CD} \quad (18)$$

$$\beta = -\alpha_1 \frac{a^2 + b^2}{a-b} - \alpha_2 \frac{a^2 + b^2}{a+b}; \quad \gamma = -\alpha_1 \frac{c^2 + d^2}{c-d} - \alpha_2 \frac{c^2 + d^2}{c+d}$$

$$A = (a-b)(2ac + 2bd) - \frac{a^2 + b^2}{a+b}(a-b)(c+d) - \frac{c^2 + d^2}{c+d}(a-b)(a+b) \quad (19)$$

$$B = (c+d)(2ac + 2bd) - \frac{a^2 + b^2}{a-b}(c-d)(c+d) - \frac{c^2 + d^2}{c-d}(a-b)(c+d)$$

$$\begin{aligned}
 C &= (a+b)(2ac+2bd) - \frac{a^2+b^2}{a-b}(a+b)(c-d) - \frac{c^2+d^2}{c-d}(a-b)(a+b) \\
 D &= (c-d)(2ac+2bd) - \frac{a^2+b^2}{a+b}(c-d)(c+d) - \frac{c^2+d^2}{c+d}(a+b)(c-d)
 \end{aligned} \tag{19}$$

W powyższych wyrażeniach mianowniki muszą być różne od zera, co niesie ze sobą następujące ograniczenia:

- 1) $n - 1 \neq 0$, z czego wynika, że $D_k \neq D_p$, a więc powierzchnia zewnętrzna słupa nie może być walcem, czyli przypadek walca nie jest przypadkiem szczególnym tego rozwiązania,
- 2) $m - 1 \neq 0$, z czego wynika, że $d_k \neq d_p$, a więc powierzchnia wewnętrzna nie może być walcowa,
- 3) $a - b \neq 0$, co prowadzi do warunku, że $g_k \neq g_p$, a więc grubość ścianki nie może być stała i dlatego przypadek słupa w kształcie rury stożkowej z blachy o stałej grubości nie jest przypadkiem szczególnym tego rozwiązania i jest analizowany oddzielnie,
- 4) $c - d \neq 0$, co prowadzi do warunku, że $D_p \neq d_p$, a więc grubość ścianki przy wierzchołku słupa (g_p) nie może być równa zero.

Ponadto trzeba dodać, że wzory zostały wyprowadzone dla słupa, którego grubość ścianki i średnica zewnętrzna przy podstawie są większe niż przy wierzchołku jak na rysunku 1.

Korzystając z tablic wzorów matematycznych [Spiegel i Abellanas 1991], obliczono całkę z $K_2(x)$ w granicach od 0 do H:

$$\begin{aligned}
 \int_0^H K_2(x) dx &= \left(\frac{\alpha_1}{a-b} + \frac{\alpha_2}{a+b} \right) H - \alpha_1 \frac{c-d}{(a-b)^2} \ln \frac{(a-b)H + (c-d)}{c-d} + \\
 &- \alpha_2 \frac{c+d}{(a+b)^2} \ln \frac{(a+b)H + (c+d)}{c+d} + \frac{\beta H}{a^2 + b^2} + \\
 &+ \left[\frac{\gamma}{2(a^2 + b^2)} - \beta \frac{ac + bd}{(a^2 + b^2)^2} \right] \ln \frac{(a^2 + b^2)H^2 + 2(ac + bd)H + (c^2 + d^2)}{c^2 + d^2} + \\
 &+ \left[\frac{2\beta(ac + bd)^2}{(a^2 + b^2)^2(ad - bc)} - \frac{\beta(c^2 + d^2) + \gamma(ac + bd)}{(a^2 + b^2)(ad - bc)} \right] \times \\
 &\times \left[\operatorname{arctg} \frac{(a^2 + b^2)H + (ac + bd)}{ad - bc} - \operatorname{arctg} \frac{ac + bd}{ad - bc} \right] = F_1
 \end{aligned} \tag{20}$$

Oznaczając wynik całkowania przez F_1 (20), ugięcie wierzchołka słupa można wyrazić jako:

$$f_1 = \frac{64H^4}{\pi ED_p^4} \int_0^H K_2(x) dx = \frac{64H^4}{\pi ED_p^4} F_1 \tag{21}$$

Analogicznie, całkując $K_1(x)$ i $K_2(x)$ w granicach od k do H , otrzymamy wyrażenia podane we wzorach (22) i (23):

$$\int_k^H K_1(x) dx = \frac{\alpha_1}{a-b} \ln \frac{(a-b)H + (c-d)}{(a-b)k + (c-d)} + \frac{\alpha_2}{a+b} \ln \frac{(a+b)H + (c+d)}{(a+b)k + (c+d)} +$$

$$+ \frac{\beta}{2(a^2 + b^2)} \ln \frac{(a^2 + b^2)H^2 + 2(ac + bd)H + (c^2 + d^2)}{(a^2 + b^2)k^2 + 2(ac + bd)k + (c^2 + d^2)} + \quad (22)$$

$$+ \left(\gamma - \frac{\beta(ac + bd)}{a^2 + b^2} \right) \frac{1}{ad - bc} \left[\operatorname{arctg} \frac{(a^2 + b^2)H + (ac + bd)}{ad - bc} - \operatorname{arctg} \frac{(a^2 + b^2)k + (ac + bd)}{ad - bc} \right]$$

$$\int_k^H K_2(x) dx = \left(\frac{\alpha_1}{a-b} - \frac{\alpha_2}{a+b} \right) (H - k) - \frac{\alpha_1(c-d)}{(a-b)^2} \ln \frac{(a-b)H + (c-d)}{(a-b)k + (c-d)} +$$

$$- \frac{\alpha_2(c+d)}{(a+b)^2} \ln \frac{(a+b)H + (c+d)}{(a+b)k + (c+d)} + \frac{\beta(H-k)}{a^2 + b^2} +$$

$$+ \left[\frac{\gamma}{2(a^2 + b^2)} - \frac{\beta(ac + bd)}{(a^2 + b^2)^2} \right] \ln \frac{(a^2 + b^2)H^2 + 2(ac + bd)H + (c^2 + d^2)}{(a^2 + b^2)k^2 + 2(ac + bd)k + (c^2 + d^2)} + \quad (23)$$

$$+ \left(\frac{2\beta(ac + bd)^2}{(a^2 + b^2)^2(ad - bc)} - \frac{\beta(c^2 + d^2) + \gamma(ac + bd)}{(a^2 + b^2)(ad - bc)} \right) \times$$

$$\times \left[\operatorname{arctg} \frac{(a^2 + b^2)H + (ac + bd)}{ad - bc} - \operatorname{arctg} \frac{(a^2 + b^2)k + (ac + bd)}{ad - bc} \right]$$

Jeśli teraz do wzoru (15) wstawimy wyniki całkowania (22) i (23) oraz gdy stały parametr k zostanie zastąpiony przez zmienną x , to wyrażenie na ugięcie słupa na dowolnej wysokości może zostać zapisane w następującej postaci:

$$f(x) = \frac{64H^4}{\pi ED_p^4} F_2(x) \quad (24)$$

gdzie $F_2(x)$ oznacza wyrażenie:

$$F_2(x) = \left[\frac{\alpha_1}{a-b} - \frac{\alpha_2}{a+b} \right] (H - x) - \alpha_1 \left[\frac{c-d}{(a-b)^2} + \frac{x}{a-b} \right] \ln \frac{(a-b)H + (c-d)}{(a-b)x + (c-d)} +$$

$$- \alpha_2 \left[\frac{c+d}{(a+b)^2} + \frac{x}{a+b} \right] \ln \frac{(a+b)H + (c+d)}{(a+b)x + (c+d)} + \beta \frac{H-x}{a^2 + b^2} +$$

$$+ \left[\frac{\gamma - \beta x}{2(a^2 + b^2)} - \frac{\beta(ac + bd)}{(a^2 + b^2)^2} \right] \ln \frac{(a^2 + b^2)H^2 + 2(ac + bd)H + (c^2 + d^2)}{(a^2 + b^2)x^2 + 2(ac + bd)x + (c^2 + d^2)} +$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\frac{2\beta(ac+bd)^2}{(a^2+b^2)^2(ad-bc)} + \frac{(\beta x - \gamma)(ac+bd) - \beta(c^2+d^2)}{(a^2+b^2)(ad-bc)} - \frac{\gamma x}{ad-bc} \right] \times \\
& \times \left[\operatorname{arctg} \frac{(a^2+b^2)H + (ac+bd)}{ad-bc} - \operatorname{arctg} \frac{(a^2+b^2)x + (ac+bd)}{ad-bc} \right]
\end{aligned} \quad (25)$$

Druga forma wzoru (1) na okres drgań słupa w kształcie rury stożkowej przyjmuje więc postać:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{16\rho H^2}{ED_p^2 F_1}} \sqrt{\int_0^H F_2^2(x) \left[(a^2 - b^2)x^2 + 2(ac - bd)x + (c^2 - d^2) \right] dx} \quad (26)$$

Nie jest znane rozwiązanie ogólne całki występującej pod pierwiastkiem we wzorze (26). Wynikające stąd konsekwencje zostaną omówione dokładniej w dalszym rozdziale tej pracy.

ŚLUP W KSZTAŁCIE RURY STOŻKOWEJ O STAŁEJ GRUBOŚCI ŚCIANKI

Rozwiązanie jest analogiczne do przedstawionego w poprzednim rozdziale przypadku ogólnego – schemat budowy słupa i podstawowe oznaczenia zamieszczono na rysunku 2. Przez t oznaczono rzut poziomy grubości ścianki (g), a związek między tymi wielkościami jest następujący:

$$t = g \frac{\sqrt{4H^2 + (D_k - D_p)^2}}{2H} \quad (27)$$

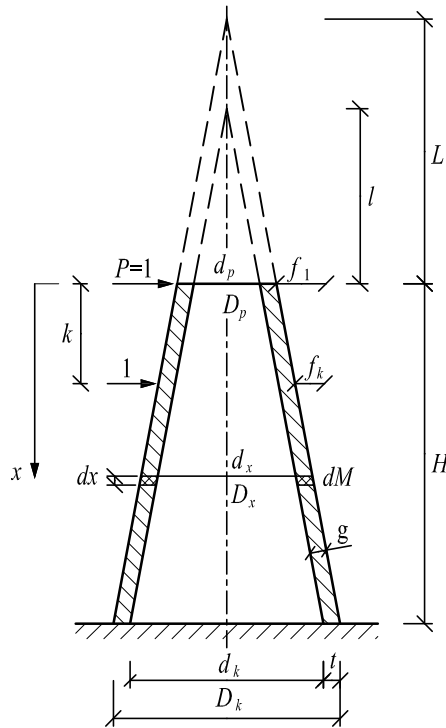
Po oznaczeniu stosunku średnic przez n , jak we wzorze (2), odległość L może być wyrażona jak we wzorze (5). Średnice – zewnętrzną i wewnętrzną, na wysokości określonej przez współrzędną x można wyrazić jako:

$$D_x = \frac{D_k - D_p}{H} x + D_p = \frac{D_p}{L} x + D_p \quad (28); \quad d_x = D_x - 2t \quad (29)$$

Masę elementarną na wysokości określonej przez współrzędną x określono równaniem:

$$dM = \rho \frac{\pi}{4} \left[D_x^2 - d_x^2 \right] dx = \rho \pi t \left[\frac{D_p}{L} x + (D_p - t) \right] dx \quad (30)$$

a wyrażenie na moment bezwładności może zostać przekształcone do różnych postaci, na przykład:



Rys. 2. Schemat do obliczeń okresu drgań własnych dla rury stożkowej o stałej grubości ścianki: x – oś współrzędnych, H – wysokość, L , l – odległości wierzchołka słupa od punktów przecięcia tworzących stożka zewnętrznego i wewnętrznego z osią słupa, D_p , D_x , D_k , d_p , d_x , d_k – zewnętrzne i wewnętrzne średnice przy wierzchołku, dla współrzędnej x i przy podstawie, P – siła poprzeczna, 1 – siła jednostkowa, k – odległość od wierzchołka do punktu przyłożenia siły jednostkowej, f_l – ugięcie wierzchołka słupa, f_k – ugięcia słupa na wysokości określonej przez odległość k , dx – elementarna długość, dM – elementarna masa, g – grubość ścianki, t – rzut poziomy grubości ścianki

Fig. 2. Scheme for calculations of natural period for tube shaped like a cone with constant wall thickness: x – coordinate axe, H – height, L , l – distances between the head of column and points of intersection of generating lines of external and internal cones with a cone axis, D_p , D_x , D_k , d_p , d_x , d_k – external and internal diameters at head, for coordinate x and at footing, P – transverse force, 1 – unit force, k – distance between the head of column and the point of application of the unit force, f_l – deflection at the head of column, f_k – deflection at the point defined by a distance k , dx – infinitesimal length, dM – infinitesimal mass, g – thickness of wall, t – horizontal projection of wall thickness

$$J(x) = \frac{\pi}{64} (D_x^4 - d_x^4) = \frac{\pi t}{8} \left[\frac{D_k - D_p}{H} x + (D_p - t) \right] \times \left[\left(\frac{D_k - D_p}{H} \right)^2 x^2 + 2 \frac{D_k - D_p}{H} (D_p - t) x + (D_p^2 - 2D_p t + 2t^2) \right] \quad (31)$$

Ugięcie swobodnego (górnego) końca słupa pod działaniem przyłożonej poziomo do wierzchołka siły $P = 1$ określono metodą Maxwella-Mohra:

$$f_1 = \int_0^H \frac{x^2 dx}{EJ_x} = \frac{8}{\pi Et} \int_0^H K_3(x) dx \quad (32)$$

a występująca we wzorze (32) funkcja $K_3(x)$ może być, jak pokazano niżej, przekształcona do wygodniejszej do całkowania postaci:

$$\begin{aligned} K_3(x) &= \frac{x^2}{\left[\frac{D_k - D_p}{H} x + (D_p - t) \right] \left[\left(\frac{D_k - D_p}{H} \right)^2 x^2 + 2 \frac{D_k - D_p}{H} (D_p - t)x + (D_p^2 - 2D_p t + 2t^2) \right]} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{D_k - D_p}{H} \right)^2 t^2} \left[\frac{(D_p - t)^2}{\frac{D_k - D_p}{H} x + (D_p - t)} - \frac{\frac{D_k - D_p}{H} D_p (D_p - 2t)x + (D_p - t)(D_p^2 - 2D_p t + 2t^2)}{\left(\frac{D_k - D_p}{H} \right)^2 x^2 + 2 \frac{D_k - D_p}{H} (D_p - t)x + (D_p^2 - 2D_p t + 2t^2)} \right] \end{aligned} \quad (33)$$

Wykonując całkowania analogicznie do przedstawionych w poprzednim rozdziale, wynik obliczenia możemy zapisać jako:

$$f_1 = \frac{8}{\pi Et} \int_0^H K_3(x) dx = \frac{8}{\pi Et} \frac{H^3}{(D_k - D_p)^3 t^2} F_3 \quad (34)$$

gdzie F_3 jest następującym wyrażeniem:

$$\begin{aligned} F_3 &= (D_p - t)^2 \ln \frac{D_k - t}{D_p - t} - \frac{D_p}{2} (D_p - 2t) \ln \frac{(D_k - t)^2 + t^2}{(D_p - t)^2 + t^2} + \\ &- 2t(D_p - t) \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{D_k}{t} - 1 \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{D_p}{t} - 1 \right) \right] \end{aligned} \quad (35)$$

Ugięcie od siły jednostkowej w odległości k od wierzchołka słupa można zapisać jako:

$$f_k = \int_k^H \frac{x(x-k)}{EJ_x} dx = \frac{8}{\pi Et} \int_k^H K_4(x) dx \quad (36)$$

gdzie $K_4(x)$ jest określone wzorem:

$$K_4(x) = \frac{x(x-k)}{\left[\frac{D_k - D_p}{H} x + (D_p - t) \right] \left[\left(\frac{D_k - D_p}{H} \right)^2 x^2 + 2 \frac{D_k - D_p}{H} (D_p - t)x + (D_p^2 - 2D_p t + 2t^2) \right]} \quad (37)$$

Analogicznie do przypadku opisanego w poprzednim rozdziale mamy do obliczenia dwie całki. Po wstawieniu w wyniku całkowania x w miejsce k otrzymamy wyrażenie na ugięcie słupa na wysokości określonej przez współrzędną x w postaci:

$$f(x) = \frac{8}{\pi E t} \frac{H^2}{(D_k - D_p)^2 t^2} F_4(x) \quad (38)$$

gdzie:

$$F_4(x) = \left[\frac{(D_p - t)^2}{D_k - D_p} H + (D_p - t)x \right] \ln \frac{D_k - t}{\frac{D_k - D_p}{H} x + (D_p - t)} + \\ - \left[\frac{HD_p(D_p - 2t)}{2(D_k - D_p)} + \frac{D_p - t}{2} x \right] \ln \frac{(D_k - t)^2 + t^2}{\frac{(D_k - D_p)^2}{H^2} x^2 + \frac{2(D_k - D_p)(D_p - t)}{H} x + D_p^2 - 2D_p t + 2t^2} + \\ - \frac{Ht}{D_k - D_p} \left[2(D_p - t) + \frac{D_k - D_p}{H} x \right] \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{D_k}{t} - 1 \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{(D_k - D_p) \frac{x}{H} + (D_p - t)}{t} \right) \right] \quad (39)$$

Wstawiając wyprowadzone zależności do wzoru na okres drgań, otrzymamy dla słupa o stałej grubości ścianki następujące wyrażenie:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\int_0^H f^2(x) M(x) dx}{f_1}} = 2\pi \sqrt{\frac{8\rho H}{E(D_k - D_p)t^2 F_3} \int_0^H F_4^2(x) \left[\frac{D_k - D_p}{H} x + (D_p - t) \right] dx} \quad (40)$$

Podobnie jak w przypadku całki ze wzoru (26), także dla całki występującej pod pierwiastkiem we wzorze (40) nie jest znane rozwiązanie ogólne.

OCENA PRAKTYCZNEJ PRZYDATNOŚCI WYPROWADZONYCH WZORÓW

We wzorach (26) i (40) na okres drgań występują wyrażenia F_1 i F_3 . Ich wartości wynikają z sumowania poszczególnych składników podanych we wzorach (20) i (35), jedno z nich mają znak dodatni, a inne ujemny. Obliczenia te trzeba wykonywać z dużą dokładnością, gdyż wynik sumowania jest liczbą około 10^5 razy mniejszą od wyrazów, które dodajemy. Zachowanie wymaganej dokładności obliczeń nie stanowi tu jednak istotnej trudności.

Rozkładając na elementarne składniki wyrażenia pod znakami całkowania we wzorach (26) i (40), otrzymamy szereg całek, między innymi z wyrażeń typu:

$$\begin{aligned} &x^p \ln^2(a_1x + b_1); \quad x^p \ln^2(a_1x^2 + b_1x + c_1); \quad x^p \operatorname{arctg}^2(a_1x + b_1); \\ &x^p \ln(a_1x + b_1) \ln(a_1x^2 + b_1x + c_1); \quad x^p \ln(a_1x + b_1) \operatorname{arctg}(a_1x + b_1); \\ &x^p \ln(a_1x^2 + b_1x + c_1) \operatorname{arctg}(a_1x + b_1) \end{aligned}$$

gdzie p jest liczbą całkowitą z przedziału od 0 do 3, a_1, b_1, c_1 zaś mogą być dowolnymi stałymi. Obliczenie całek z wyrażeń typu:

$$\begin{aligned} &x^3 \ln^2(a_1x + b_1); \quad x^3 \ln^2(a_1x^2 + b_1x + c_1); \quad x^3 \ln(a_1x + b_1) \ln(a_1x^2 + b_1x + c_1); \\ &x^3 \operatorname{arctg}^2(a_1x + b_1) \end{aligned}$$

i z wyrażeń, w których x przed logarytmem lub arkustangensem występuje w niższych potęgach, nie następuje trudności. Problem stanowi natomiast obliczenie całek z wyrażeń typu:

$$x^p \ln(a_1x + b_1) \operatorname{arctg}(a_1x + b_1) \quad \text{dla } p = 2, 3$$

oraz

$$x^p \ln(a_1x^2 + b_1x + c_1) \operatorname{arctg}(a_1x + b_1) \quad \text{dla } p = 0, 1, 2, 3$$

Nie są znane rozwiązania ogólne tych całek, wartości całek oznaczonych muszą być obliczone przy użyciu metod numerycznych.

Trzeba tu też zauważyć, że budowa określonych wzorami (25) i (39) wyrażeń $F_2(x)$ i $F_4(x)$ jest taka, że całki z ich poszczególnych składników są takimi liczbami, że wynik ich sumowania jest liczbą około 10^5 razy mniejszą od wyrazów, które dodajemy (podobnie jak to miało miejsce dla wyrażeń F_1 i F_3). Aby uzyskać wiarygodne wyniki, wymagana jest więc bardzo duża dokładność obliczeń (co najmniej sześć pierwszych cyfr znaczących pewnych). Zachowanie takiej dokładności stanowi istotną trudność, także przy użyciu nowoczesnych programów obliczeniowych.

Przykłady obliczeń wykonanych przez autora wskazują, że tylko w niektórych przypadkach uzyskano realne wartości okresu drgań, w innych dokładność obliczeń wykonanych w programie komputerowym okazała się za małą.

WNIOSKI

Przeprowadzone rozważania pozwalają na sformułowanie następujących wniosków:

1. Stosując przyjętą metodę postępowania, uzyskano wzory na obliczenie związanego z pierwszą częstością drgań własnych okresu drgań słupa w kształcie wydrążonego stożka, czyli rury stożkowej o zmiennej (a także o stałej) grubości ścianki.

2. Wyprowadzone wzory na okres drgań zawierają całki, dla których nie jest znane rozwiązanie ogólne. Nie ma więc możliwości uproszczenia tych wzorów do wygodnej dla praktycznych obliczeń inżynierskich postaci, jak to ma miejsce w przypadku słupów w kształcie ściętego stożka pełnego [Jaworski i in. 2009a].

3. Przy liczeniu okresu drgań wymagana jest bardzo duża dokładność obliczenia wartości całek z poszczególnych wyrażeń, gdyż dodawane są takie wielkości, że ich suma jest liczbą około 10^5 razy mniejszą od poszczególnych składników.

4. Ze względu na konieczną, trudną do uzyskania przy zastosowaniu komercyjnych programów dużą dokładność obliczenia wartości całek trzeba uznać, że stosowanie wyprowadzonych w pracy wzorów nie jest wygodną metodą dla inżynierskich obliczeń pierwszej częstości drgań słupów w kształcie wydrążonego ściętego stożka.

PIŚMIENNICTWO

- Awrejcewicz J., Krysko W., 2000. Drgania układów ciągłych. WNT, Warszawa.
- Bijak-Żochowski M., Jaworski A., Krzesiński G., Zagrajek T., 2006. Mechanika materiałów i konstrukcji. T. 1. Oficyna Wydawnicza PW, Warszawa.
- Dyląg Z., Jakubowicz A., Orłoś Z., 2000. Wytrzymałość materiałów. T. 2. WNT, Warszawa.
- Jaworski J., Boniecka M., Nycz M., 2009a. Obliczanie pierwszej częstości drgań własnych słupów stalowych o zmiennym przekroju poprzecznym. Część I. Wprowadzenie wzorów. Acta Scientiarum Polonorum, Architectura 8 (1–2), 3–20.
- Jaworski J., Boniecka M., Nycz M., 2009b. Obliczanie pierwszej częstości drgań własnych słupów stalowych o zmiennym przekroju poprzecznym. Część II. Wyniki. Acta Scientiarum Polonorum, Architectura 8 (3–4), 21–31.
- PN-77/B-02011 Obciążenia w obliczeniach statycznych. Obciążenia wiatrem.
- Spiegel M.R., Abellanas L., 1991. Formulas y tablas de matematica aplicada. McGraw-Hill / Intamericana, Madryt.

ON SOME METHOD FOR THE CALCULATION OF FIRST NATURAL FREQUENCY OF STEEL COLUMNS IN FORM OF TUBES SHAPED LIKE A CONE

Abstract. Formulas for calculations of the first natural frequency (of transverse vibrations) for tube columns shaped like a cone with variable wall thickness are derived. Some approximated method for calculations of the natural period for columns and towers is employed. The general solution for some integrals involved in the obtained formulas is unknown and thus numerical calculations are necessary. The case of a tube shaped like a cone with constant wall thickness was also resolved.

Keywords: steel column, post, natural period, first natural frequency

Zaakceptowano do druku – Accepted for print: 10.10.2010