

## **ANALIZA STATECZNOŚCI BELKI TIMOSHENKI SPOCZYWAJĄCEJ NA PODŁOŻU SPRĘŻYSTYM**

Agnieszka Dudzik, Paulina Obara

Politechnika Świętokrzyska w Kielcach

**Streszczenie.** W pracy poddano analizie belkę Timoshenki, spoczywającą na dwuparametrowym podłożu sprężystym. Wyprowadzone zostało różniczkowe równanie równowagi dynamicznej belki ściskanej zachowawczą siłą osiową oraz została przeprowadzona analiza rozwiązania tego równania, w zależności od wzajemnych relacji między jego współczynnikami. Wyprowadzona została formalnie ścisła macierz sztywności podstawowego elementu belkowego, a rozwijając otrzymaną macierz w szereg potęgowy, względem argumentów występujących w niej funkcji, wyznaczona została macierz sztywności elementu pracującego z udziałem sprężystego podłoża i stałej siły osiowej. Wykazano, że macierze MES, otrzymane przy wykorzystaniu tzw. fizycznych funkcji kształtu, stanowią liniowe przybliżenie macierzy formalnie ścisłej. Wyznaczony został również wzór na siłę krytyczną dla belki swobodnie podpartej, współpracującej z podłożem sprężystym.

**Słowa kluczowe:** stateczność, siła krytyczna, podłoże sprężyste, belka Timoshenki

### **WSTĘP**

Matematycznym modelem podłoża jest relacja między obciążeniem podłoża ( $q$ ) a przemieszczeniem ( $w$ ) jego powierzchni (relacja  $q-w$ ). Wszystkie modele podłoża możemy podzielić na modele analogowe (symulujące ugięcie obciążonej powierzchni podłoża) i masywu gruntowego (podłoże definiowane jest jako trójwymiarowe kontinuum, które opisuje zachowanie się zalegających pod fundamentem gruntów). Najprostszy z modeli analogowych to model Winklera, zdefiniowany założeniem, że osiadanie dowolnego punktu powierzchni podłoża jest wprost proporcjonalne do obciążenia w tym punkcie. Modelami analogowymi, które lepiej niż model Winklera opisują kształty ugięć obciążonej powierzchni podłoża, są modele dwuparametrowe, które wprowadzają nowe elementy strukturalne. Do powszechnie znanych zalicza się: model Filonienki-Borodicza, model Hetenyi'ego, model Pasternaka, model Świtki-Murawskiego. W przypadku modeli masywu gruntowego zależność  $q-w$  uzyskuje się w ramach analitycznego lub

---

Adres do korespondencji – Corresponding author: Paulina Obara, Politechnika Świętokrzyska w Kielcach, Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska, Zakład Mechaniki Budowli, al. 1000-lecia PP 7, 25-314 Kielce, e-mail: paula@tu.kielce.pl

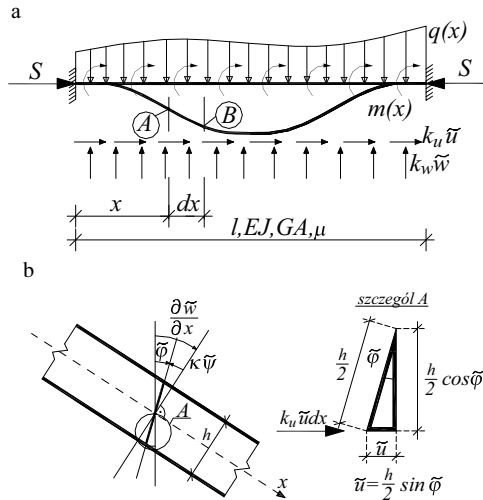
numerycznego rozwiązania zagadnienia równowagi modelu pod działaniem obciążenia w małym obszarze powierzchni. Klasyczną podgrupę modeli analogowych masywu gruntowego stanowią modele tzw. półprzestrzeni sprężystej, na przykład półprzestrzeń Boussinesqa czy Bookera-Davisa-Balaama. Istnieją również modele uproszczone, które powstają na skutek nałożenia na ciało sprężyste więzów kinematycznych lub kinetycznych. Wśród tego typu modeli podłoża do najpopularniejszych zalicza się model Własowa i model Kolara-Nemeca. Szczegółowa klasyfikacja modeli podłoża została przedstawiona przez Dembickiego i innych [1988] oraz Gryczmańskiego i Jurczyka [1995]. Sposoby modelowania przedstawili również Jemielita i Szcześniak [1992].

W pracy poddano analizie stateczności belki krępe, spoczywającej na podłożu sprężystym. Rozpatrywany jest zmodyfikowany analogowy model Własowa o dwóch parametrach podatności podłoża sprężystego: podatności pionowej ( $k_w$ ) oraz poziomej ( $k_u$ ) – rysunek 1a. W warunkach równowagi różniczkowego elementu uwzględniony jest wpływ pionowej reakcji podłoża, proporcjonalnej do pionowego przemieszczenia  $k_w \tilde{w}(x, t)$ , oraz reakcji poziomej, proporcjonalnej do poziomego przemieszczenia dolnego włókna belki i skierowanej przeciwie  $k_u \tilde{\varphi}(x, t)$ , przy czym  $k_u = k_w h/2$ . Model matematyczny dwuparametrowego podłoża Własowa dla spoczywającej na nim belki krępej możemy więc zapisać w postaci:

$$\tilde{q}(x, t) = k_w \tilde{w}(x, t) - k_u \frac{h^2}{4} \tilde{\varphi}(x, t) \quad (1)$$

gdzie:  $h$  – wysokość przekroju belki,

$\tilde{\varphi}$  – całkowy uśredniony kąt obrotu przekroju belki.



Rys. 1. Belka na podłożu sprężystym – a, uśredniony kąt odkształcenia postaciowego  $\kappa\tilde{\psi}(x, t)$  – b

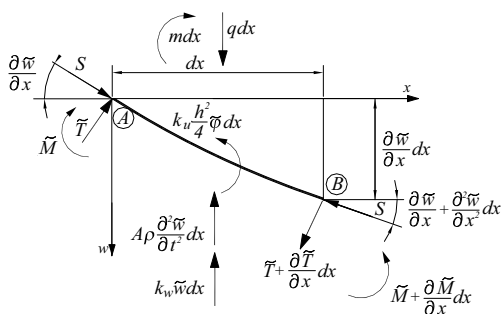
Fig. 1. Beam on elastic foundation – a, average angle of non-dilatational strain  $\kappa\tilde{\psi}(x, t)$  – b

W rozważaniach uwzględniono również wpływ odkształceń postaciowych. Założenie to prowadzi do wprowadzenia uśrednionego kąta odkształcenia postaciowego  $\kappa\tilde{\varphi}(x, t)$ , czyli kąta, o jaki obróci się płaski przekrój belki względem prostej prostopadłej do osi odkształconej (rys. 1b):

$$\kappa\tilde{\varphi}(x, t) = \frac{\partial\tilde{w}(x, t)}{\partial x} - \tilde{\varphi}(x, t) \quad (2)$$

Przyjęto następujące charakterystyki belki:  $E$  – moduł Younga,  $G$  – moduł Kirchhoffa,  $A$  – pole przekroju,  $J$  – moment bezwładności,  $l$  – długość belki,  $S$  – siła ściskająca,  $\omega$  – częstość drgań własnych,  $\kappa$  – współczynnik zależny od kształtu przekroju,  $\rho$  – gęstość materiału, oraz  $\zeta$  – parametr, uwzględniający wpływ odkształcalności postaciowej.

### RÓZNICZKOWE RÓWNANIE RÓWNOWAGI DYNAMICZNEJ (rys. 2)



Rys. 2. Różniczkowy wycinek odkształconej osi belki  
Fig. 2. Differential sector of deformed beam axis

Przyjmując założenie podłużnej nieodkształcalności oraz niewielkich krzywizn osi w konfiguracji aktualnej ( $\cos \tilde{\varphi} \cong 1$ ,  $\sin \tilde{\varphi} \cong \tilde{\varphi}$ ), równania równowagi dynamicznej nieskończonego wycinka belki spoczywającej na podłożu sprężystym, z udziałem dużych sił osiowych  $S$  (rys. 2), zapisane w przemieszczeniach, możemy przedstawić w postaci:

$$\begin{cases} -EJ \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial x^2} - \frac{GA}{\kappa} \left( \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} - \tilde{\varphi} \right) + k_u \frac{h^2}{4} \tilde{\varphi} - m = 0 \\ \frac{GA}{\kappa} \left( \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} - \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x} \right) - S \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} - A\rho \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial t^2} - k_w \tilde{w} + q = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Będziemy poszukiwać rozwiązań układu (3). Po wprowadzeniu zmiennej bezwymiarowej  $\xi = x/l$ ,  $\xi \in \langle 0, 1 \rangle$ , nieznanne uogólnione przemieszczenia  $\tilde{w}(\xi, t)$ ,  $\tilde{\varphi}(\xi, t)$  przyjęto w postaci:

$$\tilde{w}(\xi, t) = w(\xi) e^{i\omega t} \quad (4)$$

$$\tilde{\varphi}(\xi, t) = \varphi(\xi) e^{i\omega t}$$

Z równań równowagi (3) otrzymano różniczkowe równanie amplitud ruchu harmonicznego:

$$w^{IV}(\xi) + (\lambda^4 \zeta \chi^2 + \sigma^2 \chi^2 - \lambda_w^4 \zeta \chi^2 - \lambda_\varphi^4) w''(\xi) + \chi^2 (\lambda_w^4 - \lambda^4) (1 + \lambda_\varphi^4 \zeta) w(\xi) = 0 \quad (5)$$

oraz równanie amplitud całkowitego uśrednionego kąta obrotu przekroju belki:

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{l(1 + \lambda_\varphi^4 \zeta)} \left[ \zeta (1 - \sigma^2 \zeta) w'''(\xi) + (1 + \lambda^4 \zeta^2 - \lambda_w^4 \zeta^2) w'(\xi) \right] \quad (6)$$

przy czym:

$$\lambda_w^4 = \frac{k_w l^4}{EJ}; \lambda_\varphi^4 = \frac{k_\varphi h^2 l^2}{4 EJ}; \lambda^4 = \frac{A \rho \omega^2 l^4}{EJ}; \chi^2 = \frac{1}{1 - \sigma^2 \zeta}; \sigma^2 = \frac{SI^2}{EJ}; \zeta = \frac{\kappa EJ}{GA l^2} \quad (7)$$

W przypadku analizy stateczności zakładamy, że elementy są nieważkie ( $\rho = 0$ ), wobec czego równanie (5) przyjmie postać:

$$w^{IV}(\xi) + 2A w''(\xi) + B w(\xi) = 0 \quad (8)$$

gdzie:

$$2A = \sigma^2 \chi^2 - \lambda_w^4 \zeta \chi^2 - \lambda_\varphi^4; B = \lambda_w^4 \chi^2 (1 + \lambda_\varphi^4 \zeta), B > 0 \quad (9)$$

Rozwiązaniem równania różniczkowego jednorodnego (8) jest funkcja:

$$w(\xi) = C_1 e^{k_1 \xi} + C_2 e^{k_2 \xi} + C_3 e^{k_3 \xi} + C_4 e^{k_4 \xi} \quad (10)$$

w której współczynniki  $k_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , są pierwiastkami równania charakterystycznego i wynoszą:

$$k_{1,2} = \pm \sqrt{k_1^2}; \quad k_{3,4} = \pm \sqrt{k_2^2} \quad (11)$$

gdzie:

$$k_1^2 = -A + \sqrt{A^2 - B}; \quad k_2^2 = -A - \sqrt{A^2 - B}, \text{ a } C_i, i = 1, 2, 3, 4 \text{ są dowolnymi stałymi.}$$

(12)

W zależności od wzajemnych relacji między współczynnikami  $A$  i  $B$ , opisanymi zależnościami (9), pierwiastki (11) mogą być liczbami rzeczywistymi, urojonymi lub zespolonymi.

**Analiza otrzymanego rozwiązania**

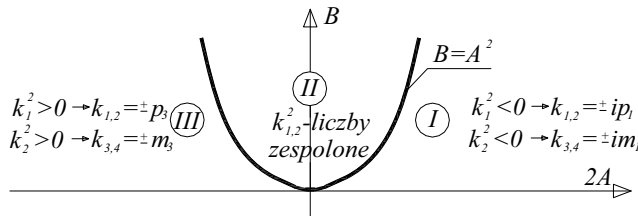
W układzie współrzędnych prostokątnych  $2A$  i  $B$  (rys. 3) parabola  $B = A^2$  oraz oś  $2A$  dzielą płaszczyznę  $2AB$  na trzy obszary (parametr  $B$  – wzór (9), jest dodatnio określony), w których zachodzą następujące zależności między współczynnikami:

- obszar I:  $2A > 0$ ;  $0 < B < A^2$ ,
- obszar II:  $B > A^2$ ,
- obszar III:  $2A < 0$ ;  $0 < B < A^2$ .

Ponadto możemy wyodrębnić granice poszczególnych obszarów, na których zachodzą następujące zależności:

- granica obszarów I–II:  $2A > 0$ ;  $B = A^2$ ,
- granica obszarów II–III:  $2A < 0$ ;  $B = A^2$ .

Tak interpretowany rysunek 3 jest obszarem geometrycznym wszystkich możliwych przypadków wartości i wzajemnych stosunków współczynników równania (8).



Rys. 3. Podział płaszczyzny  $2AB$  na obszary  
 Fig. 3. Division of  $2AB$  plane in free areas

Na podstawie zależności (9), biorąc pod uwagę, że współczynniki podatności podłoża ( $k_w$  i  $k_w$ ) oraz parametr  $\zeta$ , określający odkształcalność postaciową, są wielkościami nieujemnymi, można stwierdzić, że:

- jeżeli współczynniki  $A$  i  $B$  spełniają warunki dla obszaru I, wówczas mamy do czynienia z analizą stateczności belki Timoshenki współpracującej z podłożem sprężystym,
- w przypadku elementów poddanych działaniu sił rozciągających współczynniki  $A$  i  $B$  spełniają nierówności charakteryzujące obszar III,
- spełnienie warunków charakteryzujących obszar II wystąpi wówczas, gdy belki krępe spoczywające na podłożu sprężystym będą poddane analizie statycznej.

**Rozwiązanie równania (8) w obszarach I i III**

W przypadku gdy współczynniki  $2A$  i  $B$  przyjmują wartości z obszaru I, współczynniki  $k_1^2$  i  $k_2^2$  są liczbami rzeczywistymi ujemnymi, a więc pierwiastki  $k_{1,2}$  i  $k_{3,4}$  mają wartości urojone, natomiast w obszarze III  $k_1^2$  i  $k_2^2$  są liczbami rzeczywistymi dodatnimi, stąd  $k_{1,2}$  i  $k_{3,4}$  mają wartości rzeczywiste. Dla obu przypadków całkę ogólną (10) doprowadzić można do postaci, w której argumenty są liczbami rzeczywistymi:

- obszar I

$$w(\xi) = C_1 \cos p_1 \xi + C_2 \sin p_1 \xi + C_3 \cos m_1 \xi + C_4 \sin m_1 \xi \tag{13}$$

gdzie:

$$p_1 = \sqrt{-\sqrt{A^2 - B} + A}; \quad m_1 = \sqrt{\sqrt{A^2 - B} + A} \quad (14)$$

– obszar III

$$w(\xi) = C_1 \cosh p_3 \xi + C_2 \sinh p_3 \xi + C_3 \cosh m_3 \xi + C_4 \sinh m_3 \xi \quad (15)$$

gdzie:

$$p_3 = \sqrt{\sqrt{A^2 - B} - A}; \quad m_3 = \sqrt{-\sqrt{A^2 - B} - A} \quad (16)$$

Jeżeli uwzględnimy związki między parametrami  $p_i$  i  $m_i$  oraz odpowiednie zależności trygonometryczne, to całkę ogólną (10) w obszarach I i III możemy zapisać ostatecznie w jednej postaci:

$$w(\xi) = C_1 \cosh p\xi + C_2 \sinh p\xi + C_3 \cos m\xi + C_4 \sin m\xi \quad (17)$$

Podstawiając odpowiednie pochodne funkcji (17) do wzoru (6), dostajemy wzór na całkowity uśredniony kąt obrotu przekroju belki:

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{l} [C_1 D \sinh p\xi + C_2 D \cosh p\xi + C_3 H \sin m\xi - C_4 H \cos m\xi] \quad (18)$$

gdzie:

$$p = \sqrt{\sqrt{A^2 - B} - A}; \quad m = \sqrt{\sqrt{A^2 - B} + A}; \quad D = ep^3 + dp; \quad H = em^3 - dm; \quad (19)$$

$$e = \frac{(1 - \sigma^2 \zeta) \zeta}{1 + \lambda_\phi^4 \zeta}; \quad d = \frac{1 - \lambda_w^4 \zeta^2}{1 + \lambda_\phi^4 \zeta}$$

### Rozwiązanie równania (8) w obszarze II

W przypadku gdy współczynniki  $2A$  i  $B$  przyjmują wartości z obszaru II, współczynnik  $k_1^2$  i  $k_2^2$  są liczbami zespolonymi, więc pierwiastki  $k_{1,2}$  i  $k_{3,4}$  są również liczbami zespolonymi postaci:

$$k_{1,2} = \pm \sqrt[4]{B} \left( \cos \frac{1}{2} \nu + i \sin \frac{1}{2} \nu \right); \quad k_{3,4} = \pm \sqrt[4]{B} \left( \cos \frac{1}{2} \nu - i \sin \frac{1}{2} \nu \right) \quad (20)$$

gdzie  $\nu$  – argument liczby zespolonej, przy czym:

$$\cos \nu = -\frac{A}{\sqrt{B}} \quad (21)$$

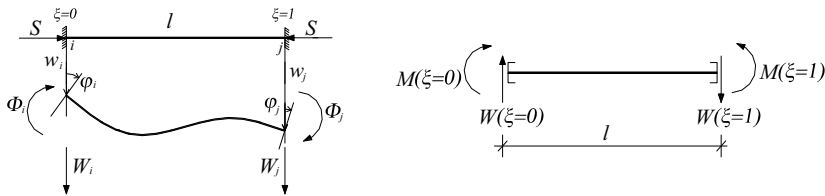
tak więc całka ogólna (10) będzie miała postać:

$$w(\xi) = C_1 \cosh p_2 \xi \cos m_2 \xi + C_2 \cosh p_2 \xi \sin m_2 \xi + C_3 \sinh p_2 \xi \cos m_2 \xi + C_4 \sinh p_2 \xi \sin m_2 \xi \quad (22)$$

gdzie:

$$p_2 = \sqrt[4]{B} \cos \frac{1}{2} \nu = \sqrt{\frac{\sqrt{B} - A}{2}}; \quad m_2 = \sqrt[4]{B} \sin \frac{1}{2} \nu = \sqrt{\frac{\sqrt{B} + A}{2}} \quad (23)$$

**ŚCISŁA MACIERZ SZTYWNOŚCI BELKI KRĘPEJ UWZGLĘDNIAJĄCA WSPÓLPRACĘ Z PODŁOŻEM SPRĘŻYSTYM (rys. 4)**



Rys. 4. Podstawowy element belkowy  
Fig. 4. The basic beam element

Rozwiązując odpowiednie zagadnienie brzegowe przy wymuszonych przemieszczeniach węzłowych, otrzymamy formalnie ścisłą macierz sztywności II rzędu dla podstawowego elementu (rys. 4), uwzględniającą współpracę belki ze sprężystym podłożem. W tym celu korzystamy z funkcji ugięcia (17) i wzoru na uśredniony kąt obrotu przekroju (18). Występujące w tych wzorach stałe  $C_i$  są wyznaczane z warunków brzegowych:

$$w(\xi = 0) = w_i; \quad \varphi(\xi = 0) = \varphi_i; \quad w(\xi = 1) = w_j; \quad \varphi(\xi = 1) = \varphi_j \quad (24)$$

które prowadzą do układu czterech równań:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & D & 0 & H \\ \cosh p & \sinh p & \cos m & \sin m \\ D \sinh p & D \cosh p & -H \sin m & H \cos m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_i \\ l\varphi_i \\ w_j \\ l\varphi_j \end{bmatrix} \quad (25)$$

Znając rozkład sił przekrojowych w elemencie:

$$M(\xi) = -\frac{EJ}{l} \varphi^I(\xi) \quad (26)$$

$$T(\xi) = \frac{GA}{\kappa l} [w^I(\xi) - \varphi(\xi)l]$$

możemy określić siły przywęzłowe (rys. 4):

$$W_i = -W(\xi = 0); \quad \Phi_i = M(\xi = 0); \quad W_j = W(\xi = 1); \quad \Phi_j = -M(\xi = 1) \quad (27)$$

Ponieważ belka jest ściskana siłą osiową ( $S$ ), więc zgodnie ze schematem z rysunku 2 oraz założeniem małych przemieszczeń siłę o kierunku prostopadłym do nieodkształconej osi belki zapiszemy w postaci:

$$W(\xi) = \frac{EJ}{l^3} \frac{1}{\zeta} \left[ \frac{1}{\chi^2} w^I(\xi) - \varphi(\xi)l \right] \quad (28)$$

Definicje (27) pozwalają na zapisanie związków między wielkościami geometrycznymi a wielkościami statycznymi w następującej postaci macierzowej:

$$\mathbf{R} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{r} \quad (29)$$

gdzie:  $\mathbf{r}$  – wektor przemieszczeń przekrojów skrajnych,  $\mathbf{r} = \{w_i, \varphi_i, w_j, \varphi_j\}$ ,

$\mathbf{R}$  – wektor sił przywęzłowych,  $\mathbf{R} = \{W_i, \Phi_i, W_j, \Phi_j\}$ ,

$$\mathbf{K} = \frac{EJ}{Ll^2} \begin{bmatrix} \frac{F_5}{l} & F_3 & -\frac{F_6}{l} & F_4 \\ F_3 & F_1 l & -F_4 & F_2 l \\ -\frac{F_6}{l} & -F_4 & \frac{F_5}{l} & -F_3 \\ F_4 & F_2 l & -F_3 & F_1 l \end{bmatrix} \quad (30)$$

– ściśta macierz sztywności belki Timoszenki poddanej działaniu siły ściskającej i współpracującej z podłożem sprężystym, przy czym:

$$L = 2DH(1 - \cosh p \cos m) + (D^2 - H^2) \sinh p \sin m,$$

$$F_1 = (Dp + Hm)(D \cosh p \sin m - H \sinh p \cos m),$$

$$F_2 = (Dp + Hm)(H \sinh p - D \sin m),$$

$$F_3 = DH \left[ (Dp - Hm)(\cosh p \cos m - 1) + (Dm + Hp) \sinh p \sin m \right], \quad (31)$$

$$F_4 = DH(Dp + Hm)(\cosh p - \cos m),$$

$$F_5 = DH(Dp + Hm)(H \sinh p \cos m + D \cosh p \sin m),$$

$$F_6 = DH(Dp + Hm)(D \sinh p + H \sin m)$$

gdzie wielkości  $D, H, p$  i  $m$  określają wzory (19).

Macierz sztywności (30) może służyć do ścisłej analizy belki Timoszenki spoczywającej na sprężystym podłożu. Sformułowanie to jest kłopotliwe rachunkowo z uwagi na uwikłanie funkcje parametrów zadania. Dokonując rozwinięcia ścisłej (w ramach przyjętych założeń) macierzy sztywności (30) w szeregi potęgowe względem parametrów opi-



sujących właściwości podłoża ( $\lambda_w$  i  $\lambda_\phi$ ) oraz względem parametru opisującego intensywność obciążenia ściskającego ( $\sigma$ ), otrzymamy odpowiednio: macierz sztywności liniowej ( $\mathbf{K}$ ), macierz sztywności geometrycznej ( $\mathbf{K}_G$ ) oraz macierze sprężystego podłoża związane odpowiednio: z translacją elementu (wpływ podatności pionowej podłoża sprężystego)  $\mathbf{K}^w$  i z obrotem elementu (wpływ podatności poziomej podłoża sprężystego)  $\mathbf{K}^\phi$ :

$$\mathbf{K} = \mathbf{K} - S\mathbf{K}_G + \mathbf{K}^w + \mathbf{K}^\phi \quad (32)$$

gdzie:

$$\mathbf{K} = \left( \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{cccc} \frac{12}{l} & 6 & -\frac{12}{l} & 6 \\ 6 & 4l & -6 & 2l \\ -\frac{12}{l} & -6 & \frac{12}{l} & -6 \\ 6 & 2l & -6 & 4l \end{array} \right] - \frac{36\zeta}{1+12\zeta} \left[ \begin{array}{cccc} \frac{4}{l} & 2 & -\frac{4}{l} & 2 \\ 2 & l & -2 & l \\ -\frac{4}{l} & -2 & \frac{4}{l} & -2 \\ 2 & l & -2 & l \end{array} \right] \\ \frac{EJ}{l^2} \end{array} \right)$$

$$\mathbf{K}_G = \left( \begin{array}{c} \frac{1}{30} \left[ \begin{array}{cccc} \frac{36}{l} & 3 & -\frac{36}{l} & 3 \\ 3 & 4l & -3 & l \\ -\frac{36}{l} & -3 & \frac{36}{l} & -3 \\ 3 & l & -3 & 4l \end{array} \right] - \frac{6\zeta(1+6\zeta)}{5(1+12\zeta)^2} \left[ \begin{array}{cccc} \frac{4}{l} & 2 & -\frac{4}{l} & 2 \\ 2 & l & -2 & l \\ -\frac{4}{l} & -2 & \frac{4}{l} & -2 \\ 2 & l & -2 & l \end{array} \right] \end{array} \right)$$

$$\mathbf{K}^w = \frac{1}{35(1+12\zeta)^2} \left[ \begin{array}{cccc} \frac{13+294\zeta+1680\zeta^2}{l} & \frac{11+231\zeta+1260\zeta^2}{6} & \frac{3(3+84\zeta+560\zeta^2)^2}{2l} & \frac{13+378\zeta+2520\zeta^2}{12} \\ \frac{11+231\zeta+1260\zeta^2}{6} & \frac{1+21\zeta+126\zeta^2}{3}l & \frac{13+378\zeta+2520\zeta^2}{12} & \frac{-1+28\zeta+168\zeta^2}{4}l \\ \frac{3(3+84\zeta+560\zeta^2)^2}{2l} & \frac{13+378\zeta+2520\zeta^2}{12} & \frac{13+294\zeta+1680\zeta^2}{l} & \frac{-11+231\zeta+1260\zeta^2}{6} \\ \frac{-13+378\zeta+2520\zeta^2}{12} & \frac{-1+28\zeta+168\zeta^2}{4}l & \frac{-11+231\zeta+1260\zeta^2}{6} & \frac{1+21\zeta+126\zeta^2}{3}l \end{array} \right] \lambda_w^4 \frac{EJ}{l^2}$$

$$\mathbf{K}^\phi = \frac{1}{35(1+12\zeta)^2} \left[ \begin{array}{cccc} \frac{42}{l} & \frac{21-1260\zeta}{6} & -\frac{42}{l} & \frac{42-2520\zeta}{12} \\ \frac{21-1260\zeta}{6} & \frac{14+210\zeta+5040\zeta^2}{3}l & \frac{-42-2520\zeta}{12} & \frac{-14+840\zeta-10080\zeta^2}{12}l \\ -\frac{42}{l} & \frac{-42-2520\zeta}{12} & \frac{42}{l} & \frac{-21-1260\zeta}{6} \\ \frac{42-2520\zeta}{12} & \frac{-14+840\zeta-10080\zeta^2}{12}l & \frac{-21-1260\zeta}{6} & \frac{14+210\zeta+5040\zeta^2}{3}l \end{array} \right] \lambda_\phi^4 \frac{EJ}{l^2}$$

Pozostałe wyrazy rozwinięcia przedstawiają samorzównoważone układy reakcji węzłowych o silnie malejących wartościach i mogą być pominięte. Wymienione macierze można uzyskać, aproksymując pola przemieszczeń fizycznymi funkcjami kształtu (tzn. funkcjami, które opisują stan przemieszczenia elementu skończonego spowodowany jednostkowymi przemieszczeniami węzłów oraz które zależą od parametrów fizycznych

i geometrycznych elementu – są to kombinacje odpowiednich wielomianów Hermite’a). Macierze te zawierają człony korekcyjne, wyrażające wpływ odkształcalności postaciowej na wartości sił węzłowych spowodowanych jednostkowymi przemieszczeniami węzłowymi. Tym samym wyjaśniony został związek między przybliżonym podejściem skończenie elementowym a ścisłą liniową analizą stateczności. Dysponując wyznaczonymi macierzami, można przeprowadzać analizę stateczności układów na podłożu sprężystym według algorytmu klasycznej metody przemieszczeń lub w ujęciu MES.

## SIŁA KRYTYCZNA BELKI SWOBODNIE PODPARTEJ

Stateczność (lub jej brak) określonego położenia równowagi związana jest w istotny sposób z intensywnością danego rodzaju obciążenia zewnętrznego. Przejście ze stanu równowagi statecznej do niestatecznej uwarunkowane jest obciążeniem pewną wartością obciążenia  $S_{kr}$ , nazywaną siłą krytyczną. Jest to najmniejsza wartość, która utrzymuje element w odkształconej postaci równowagi. W przypadku wyboczenia funkcja ugięcia belki wyrażona jest wzorem (13), a warunkiem na to, aby opisywała ona równanie wygiętej osi, jest spełnienie odpowiednich warunków brzegowych. Dla belki swobodnie podpartej warunki brzegowe, dotyczące ugięcia i momentów zginających na końcach elementu:

$$w(\xi = 0) = 0; \quad M(\xi = 0) = 0; \quad w(\xi = 1) = 0; \quad M(\xi = 1) = 0 \quad (33)$$

prowadzą do układu jednorodnych równań na stałe całkowania:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ Dk & 0 & -Hm & 0 \\ \cosh k & \sinh k & \cos m & \sin m \\ Dk \cosh k & Dk \sinh k & -Hm \cos m & -Hm \sin m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (34)$$

Warunkiem istnienia niezerowych rozwiązań jest zerowanie się wyznacznika podstawowego układu (34), co prowadzi do równania:

$$-\sin m \sinh k (Hm + Dk)^2 = 0 \quad (35)$$

kórego spełnienie jest warunkiem bifurkacji stanu równowagi rozważanego elementu. Równanie ma rozwiązania dla:

$$m = n\pi, \text{ gdzie } n = 1, 2, 3... \quad (36)$$

skąd, po wykorzystaniu zależności (19) oraz dokonaniu odpowiednich przekształceń, otrzymamy wzór na siłę krytyczną ściskanej belki krępej, spoczywającej na podłożu sprężystym:

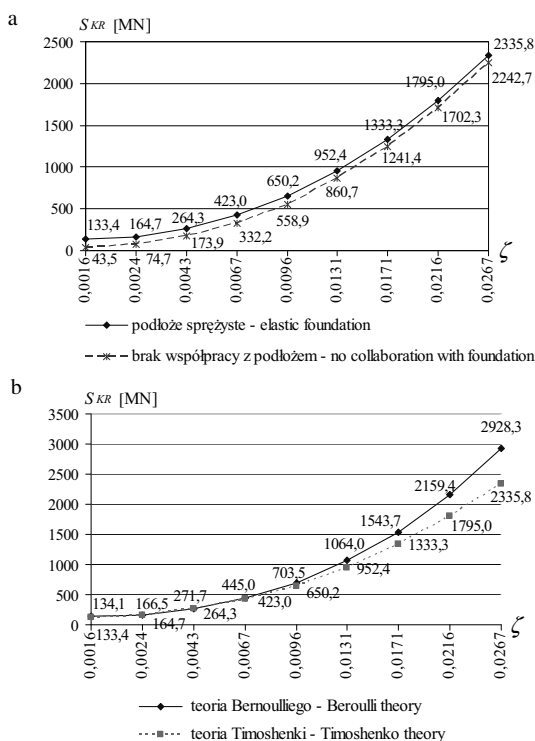
$$S_{kr} = \left[ \frac{c}{n^2 \pi^2} + \frac{d + n^2 \pi^2}{1 + \zeta (d + n^2 \pi^2)} \right] \frac{EJ}{l^2} \quad (37)$$

Na podstawie wzoru (37) dla dowolnych charakterystyk belki oraz podłoża sprężystego wyznaczyć można wartości siły krytycznej.

**PRZYKŁADY**

W celu ilustracji rozważanego problemu przyjęte zostały następujące dane:  $E = 31 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0,2$ ,  $\kappa = 1,2$ ,  $l = 6 \text{ m}$ ,  $b = 0,5 \text{ m}$ ,  $k_w = 49,05 \text{ MN}\cdot\text{m}^{-3}$ ,  $k_u = 11,77 \text{ MN}\cdot\text{m}^{-3}$ ,  $h = 0,6\text{--}2,2 \text{ m}$ .

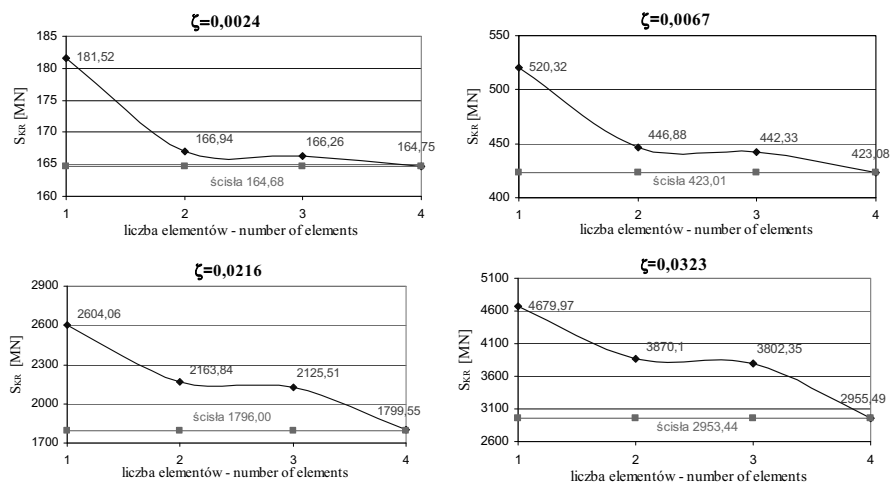
Na rysunku 5a pokazany został wpływ zadanego podłoża sprężystego na wartości krytyczne belki, wyznaczone na podstawie wzoru (37), w zależności od  $\zeta$  (parametr zależny od smukłości, współczynnika Poissona oraz rodzaju przekroju, im większy, tym mniejsza smukłość). W przypadku belki, dla której moglibyśmy zastosować teorię Bernoulliego ( $\zeta = 0,0016$ ), wpływ sprężystego podłoża jest znaczny, bowiem różnica wynosi 67%, natomiast dla  $\zeta = 0,0267$  różnica wynosi 4%. Tak więc możemy wnioskować, że wpływ podłoża sprężystego jest duży w przypadku belek o większej smukłości, a maleje wraz ze zmniejszaniem się smukłości belek, czyli wzrastaniem parametru  $\zeta$ .



Rys. 5. Ścisłe wartości krytyczne obciążeń dla belki swobodnie podpartej  
 Fig. 5. The critical values of loads for the simply-supported beam

W celu uzasadnienia zastosowania do analizy elementów krępych teorii uwzględniającej odkształcalność postaciową przekrojów na rysunku 5b przedstawiono krytyczne wartości obciążenia dla belki współpracującej z podłożem sprężystym przy zastosowaniu teorii Bernoulliego (bez uwzględnienia odkształcalności postaciowej przekrojów) oraz teorii Timoshenki. Błąd obliczeń wzrasta wraz ze wzrostem parametru  $\zeta$  (0,5–25%).

Na rysunku 6 przedstawione zostały wartości pierwszej siły krytycznej dla belki swobodnie podpartej w zależności od  $\zeta$ . Podany został wynik ścisły obliczony na podstawie wzoru (37) oraz wyniki przybliżone otrzymane przy wykorzystaniu macierzy elementu skończonego (32). Obliczenia wykonano w programie Mathematica. Przy czym, przy wykorzystaniu formalizmu MES, określamy odpowiedź belki Timoshenki spoczywającej na sprężystym podłożu w sposób przybliżony. Zadanie jest zlinearyzowane w odniesieniu do formalnie ścisłej macierzy (30) i wymaga zagęszczania siatki podziału w celu otrzymania dokładniejszych wyników.



Rys. 6. Wartości krytyczne obciążeń: ścisłe i przybliżone  
Fig. 6. The critical values of loads: exact and approximate

## WNIOSKI

1. Wpływ podłoża sprężystego na krytyczne wartości obciążeń maleje wraz ze zmniejszaniem się smukłości belek, czyli wzrostem parametru  $\zeta$ .
2. W analizie stateczności belki krępej współpracującej z podłożem sprężystym należy stosować teorię uwzględniającą odkształcalność postaciową.
3. Wykorzystując macierze elementu skończonego – wzór (32), do wyznaczania krytycznych wartości obciążenia, można zauważyć, że zbieżność do wyniku ścisłego, obliczonego na podstawie wzoru (37), jest tym lepsza, im mniejszy parametr  $\zeta$ .

## PIŚMIENNICTWO

- El-Mously M., 1999. Fundamental frequencies of Timoshenko beams mounted on Pasternak foundation. *Journal of Sound and Vibration* 228 (2), 452–157.
- Fan S.C., Zheng D.Y., 2002. Stability of a cracked Timoshenko beam column by modified Fourier series. *Journal of Sound and Vibration* 264, 475–484.
- Gilewski W., Obara P., 2007. Ścisłe i uściślone macierze sztywności belki Timoshenki spoczywającej na sprężystym podłożu. *Proceedings Conference, Bratysława*, 69–72.
- Gryczmański M., Jurczyk P., 1995. Modele podłoża gruntowego i ich ocena. *Inżynieria i Budownictwo* 2, 98–104.
- Jemielita G., Szcześniak W., 1992. Sposoby modelowania podłoża. *Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej* 120, Warszawa.
- Song Xi, Soi-Rong Li, 2006. Thermal buckling and post-buckling of pinned-fixed Euriel-Bernoulli beams on an elastic foundation. *Mechanics Research Communications* 34, 164–171.
- Vlasov V.Z., Loentiev U.N., 1966. Beams, plates and shells on elastic foundation. *Israel Program for Scientific Translation, Jerusalem*.
- Yokoyama T., 1995. Vibration analysis of Timoshenko beam-columns on two – parameter elastic foundations. *Computers and Structures* 61, 6, 995–1007.

## THE STABILITY ANALYSIS OF TIMOSHENKO BEAM ON ELASTIC FOUNDATION

**Abstract.** The paper presents the analysis of Timoshenko beam on two-parameter elastic foundation. The differential equation for dynamic equilibrium of beam compressed by conservative axial force has been derived and its solution has been analyzed depending on mutual relationships between its coefficients. The exact stiffness matrix of the basic beam element has been derived formally, and by the power series expansion of this matrix in relation to the arguments of the functions occurring in it the stiffness matrix of working element with elastic foundation and constant axial force has been determined. It has been demonstrated that the FEM matrices obtained with the use of so-called physical shape functions are the linear approximation of the formally exact matrix. In addition, a formula for critical force is found for the case of free supported beam on elastic foundation.

**Key words:** stability, critical force, elastic foundation, Timoshenko beam

Zaakceptowano do druku – Accepted for print: 2.03.2010