

## CZĘSTOŚĆ DRGAŃ WŁASNYCH SŁUPA O ZMIENNYM PRZEKROJU POPRZECZNYM\*

Vazgen Bagdasaryan✉

Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska, Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie, Warszawa

### STRESZCZENIE

W pracy wyznaczone zostały częstotliwości drgań własnych wspornikowego słupa o zmiennym przekroju poprzecznym, wykonanego z jednorodnego materiału sprężystego. Rozwiązania otrzymano metodą macierzy sztywności, przybliżając w sposób inżynierski ciągłą zmianę przekroju poprzecznego na zmiany skokowe. Otrzymane częstotliwości drgań własnych porównano z wynikami otrzymanymi metodą Rayleigh'a. Wykazano, iż stosunkowo proste obliczenia inżynierskie już przy niewielkiej liczbie elementów podziału dają wyniki satysfakcjonujące pod względem zastosowań inżynierskich.

**Słowa kluczowe:** częstotliwość drgań własnych, zmienny przekrój poprzeczny, macierz sztywności

### WSTĘP

Częstotliwość drgań własnych odgrywa kluczową rolę podczas projektowania konstrukcji inżynierskich szczególnie w przypadku słupów, masztów, kominów itp. Ze względów inżynierskich wpływ drgań na konstrukcje powinien być uwzględniany przy sprawdzaniu stanu granicznego użyteczności. W literaturze jest wiele metod pozwalających wyznaczyć częstotliwości drgań własnych konstrukcji. Bardzo ciekawe są zawsze wyniki ścisłe, do których można odnosić otrzymane rozwiązania przybliżone, a wśród nich np. metody oparte na metodzie funkcji Greena (Szewczyk, Kukła i Zamojska, 2007) czy też ścisłe rozwiązania równania Eulera–Bernoulliego (Naguleswaran, 1994). Istnieją również liczne metody przybliżone, a wśród nich metody numeryczne, którymi zajmował się m.in. Caruntu (2009), wyznaczając częstotliwości drgań własnych

belek o zmiennym przekroju poprzecznym. Metodą Rayleigh'a wyznaczania częstotliwości drgań własnych słupów o zmiennym przekroju poprzecznym zajmowali się np. Bagdasaryan, Chalecki, Gierasimiuk, Jaworski i Szlachetka (2018). Celem niniejszej pracy jest wykazanie, iż rozwiązania otrzymane inżynierską metodą zamiany obliczeń słupa o ciągłej zmianie przekroju poprzecznego na obliczenia słupa o skokowo zmiennym przekroju dają wyniki satysfakcjonujące pod względem zastosowań inżynierskich już przy niewielkiej liczbie elementów podziału.

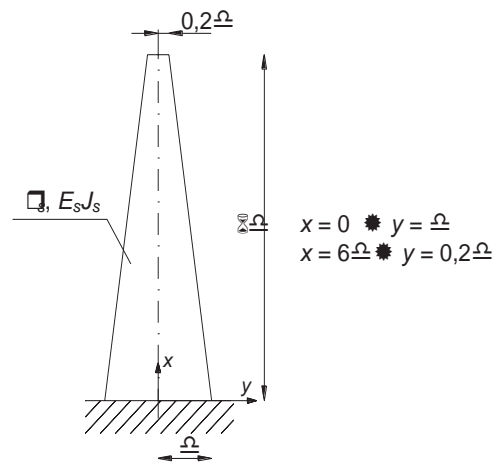
### MATERIAŁ I METODY

W pracy rozważono jednostronnie utwierdzony słup o zmiennym przekroju poprzecznym w kształcie ściętego stożka (rys. 1). Założono dla niego gęstość masy ( $\rho_s$ ) oraz moduł odkształcenia podłużnego ( $E_s$ ).

\* Due to complexity of the article text was formatted in one-column page style.

Vazgen Bagdasaryan <https://orcid.org/0000-0002-9589-1453>

✉vazgen\_bagdasaryan@sggw.pl



**Rys. 1.** Schemat rozpatrywanego słupa o zmiennym przekroju poprzecznym

**Fig. 1.** Diagram of the considered pole with variable cross-section

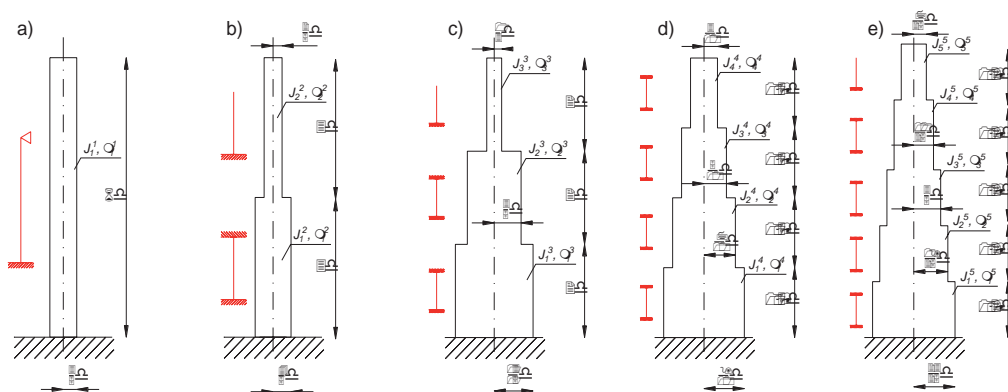
W dalszej części rozpatrzono pięć przypadków podziału rozpatrywanego słupa na jedną, dwie, trzy, cztery oraz pięć części o równych długościach i o stałym, kołowym przekroju poprzecznym (rys. 2), przyjmując promienie wyznaczonych części jako wartość średnią z długości podziału. Masy prętów zostały uwzględniane, dlatego też stosuje się tzw. metodę „przez sztywność” nazwaną w pracy metodą macierzy sztywności. Macierze sztywności dla wybranych słupów otrzymano, stosując metodę przemieszczeń.

#### Wariant 1 – słup o stałym przekroju poprzecznym

Dla słupa z rysunku 2a wyznaczono niezbędne do obliczeń wielkości:

$$J_1^1 = \frac{\pi(\delta_1^1)^4}{4} = \frac{\pi}{4} \left(\frac{3}{5}\delta\right)^4 = 0,0324\pi\delta^4;$$

$$\mu_1^1 = \rho_s \cdot A_1^1 = \rho_s \cdot \pi \cdot (\delta_1^1)^2 = \rho_s \cdot \pi \cdot \left(\frac{3}{5}\delta\right)^2 = 0,36\pi\rho_s\delta^2.$$



**Rys. 2.** Schemat wariantów uproszczonych o stałym przekroju poprzecznym: a – podział na jedną część; b – podział na dwie części; c – podział na trzy części; d – podział na cztery części; e – podział na pięć części

**Fig. 2.** Diagram of simplified variants with constant cross-section: a – division into one part; b – division into two parts; c – division into three parts; d – division into four parts; e – division into five parts

Założono dalej  $E_s J_1^1 = EJ$ ,  $\mu_1^1 = \mu$ .

Dla całego słupa wyznaczono parametr  $\nu_1^1 = 6\nu$ , gdzie  $\nu = \delta^4 \sqrt{\frac{\mu\omega^2}{EJ}}$ .

Ze względu na konieczność wprowadzenia niewiadomej metody przemieszczeń rozpatrywany słup przedstawiono jako schemat utwierdzenie–podparcie (niewiadomy przesuw swobodnego końca słupa).

Macierz sztywności ma w tym wypadku prostą postać

$$\mathbf{M} = [0,0046\chi'(6\nu)], \text{ gdzie } \chi'(\nu) = \nu^3 \frac{1 + \cosh \nu \cos \nu}{\cosh \nu \sin \nu - \sinh \nu \cos \nu}.$$

Warunkiem wyznaczenia częstości drgań własnych jest zerowanie się wyznacznika macierzy sztywności, co prowadzi tutaj do wyznaczenia równania  $0,0046\chi'(6\nu) = 0$ .

### Wariant 2 – podział słupa na dwie części

Dla słupa z rysunku 2b wyznaczono niezbędne do obliczeń wielkości:

$$J_1^2 = \frac{\pi(\delta_1^2)^4}{4} = \frac{\pi}{4} \left(\frac{4}{5}\delta\right)^4 = 0,1024\pi\delta^4;$$

$$J_2^2 = \frac{\pi(\delta_2^2)^4}{4} = \frac{\pi}{4} \left(\frac{2}{5}\delta\right)^4 = 0,0064\pi\delta^4;$$

Przy założeniu  $E_s J_1^2 = EJ$  mamy  $E_s J_2^2 = 0,063EJ$ .

$$\mu_1^2 = \rho_s \cdot A_1^2 = \rho_s \cdot \pi \cdot (\delta_1^2)^2 = \rho_s \cdot \pi \cdot \left(\frac{4}{5}\delta\right)^2 = 0,64\pi\rho_s\delta^2;$$

$$\mu_2^2 = \rho_s \cdot A_2^2 = \rho_s \cdot \pi \cdot (\delta_2^2)^2 = \rho_s \cdot \pi \cdot \left(\frac{2}{5}\delta\right)^2 = 0,16\pi\rho_s\delta^2;$$

Analogicznie przy założeniu  $\mu_1^2 = \mu$  mamy  $\mu_2^2 = 0,25\mu$ .

Dla poszczególnych części słupa wyznaczono parametry  $\nu_1^2 = 3\nu$  oraz  $\nu_2^2 = 4,2\nu$ .

W przypadku podziału słupa na dwie części o stałych przekrojach macierz sztywności ma postać

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0,333\alpha(3\nu) + 0,021\alpha''(4,2\nu) & -0,111\vartheta(3\nu) + 0,007\vartheta''(4,2\nu) \\ -0,111\vartheta(3\nu) + 0,007\vartheta''(4,2\nu) & 0,037\gamma(3\nu) + 0,002\gamma''(4,2\nu) \end{bmatrix},$$

gdzie:

$$\alpha(\nu) = \nu \frac{\cosh \nu \sin \nu - \sinh \nu \cos \nu}{1 - \cosh \nu \cos \nu};$$

$$\vartheta''(\nu) = \nu^2 \frac{-\sinh \nu \sin \nu}{1 + \cosh \nu \cos \nu};$$

$$\alpha''(\nu) = \nu \frac{\sinh \nu \cos \nu - \cosh \nu \sin \nu}{1 + \cosh \nu \cos \nu};$$

$$\gamma(\nu) = \nu^3 \frac{\cosh \nu \sin \nu + \sinh \nu \cos \nu}{1 - \cosh \nu \cos \nu};$$

$$\vartheta(\nu) = \nu^2 \frac{\sinh \nu \sin \nu}{1 - \cosh \nu \cos \nu};$$

$$\gamma''(\nu) = -\nu^3 \frac{\sinh \nu \cos \nu + \cosh \nu \sin \nu}{1 + \cosh \nu \cos \nu};$$

### Wariant 3 – podział słupa na trzy części

Dla słupa z rysunku 2c wyznaczono niezbędne do obliczeń wielkości

$$J_1^3 = \frac{\pi(\delta_1^3)^4}{4} = \frac{\pi\left(\frac{13}{15}\delta\right)^4}{4} = 0,1410\pi\delta^4;$$

$$J_2^3 = \frac{\pi(\delta_2^3)^4}{4} = \frac{\pi\left(\frac{3}{5}\delta\right)^4}{4} = 0,0324\pi\delta^4;$$

$$J_3^3 = \frac{\pi(\delta_3^3)^4}{4} = \frac{\pi\left(\frac{1}{3}\delta\right)^4}{4} = 0,0031\pi\delta^4.$$

Przy założeniu  $E_s J_1^3 = EJ$  mamy  $E_s J_2^3 = 0,230EJ$  oraz  $E_s J_3^3 = 0,021EJ$ .

$$\mu_1^3 = \rho_s \cdot A_1^3 = \rho_s \cdot \pi \cdot (\delta_1^3)^2 = \rho_s \cdot \pi \cdot \left(\frac{13}{15}\delta\right)^2 = 0,751\pi\rho_s\delta^2;$$

$$\mu_2^3 = \rho_s \cdot A_2^3 = \rho_s \cdot \pi \cdot (\delta_2^3)^2 = \rho_s \cdot \pi \cdot \left(\frac{3}{5}\delta\right)^2 = 0,360\pi\rho_s\delta^2;$$

$$\mu_3^3 = \rho_s \cdot A_3^3 = \rho_s \cdot \pi \cdot (\delta_3^3)^2 = \rho_s \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{3}\delta\right)^2 = 0,111\pi\rho_s\delta^2.$$

Analogicznie przy założeniu  $\mu_1^3 = \mu$  otrzymujemy  $\mu_2^3 = 0,48\mu$  oraz  $\mu_3^3 = 0,15\mu$ .

Dla poszczególnych części słupa wyznaczono parametry:  $v_1^3 = 2v$ ,  $v_2^3 = 2,4v$  oraz  $v_3^3 = 3,3v$ .

W przypadku podziału słupa na trzy części o stałych przekrojach macierz sztywności ma postać

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0,5\alpha(2v) + 0,115\alpha(2,4v) & 0,115\beta(2,4v) & -0,058\delta(2,4v) & -0,25\vartheta(2v) + 0,058\vartheta(2,4v) \\ 0,115\beta(2,4v) & 0,115\alpha(2,4v) + 0,012\alpha''(3,3v) & 0,005\vartheta''(3,3v) - 0,058\vartheta(2,4v) & 0,058\delta(2,4v) \\ -0,058\delta(2,4v) & 0,005\vartheta''(3,3v) - 0,058\vartheta(2,4v) & 0,029\gamma(2,4v) + 0,003\gamma''(3,3v) & -0,029\varepsilon(2,4v) \\ -0,25\vartheta(2v) + 0,058\vartheta(2,4v) & 0,058\delta(2,4v) & -0,029\varepsilon(2,4v) & 0,125\gamma(2v) + 0,029\gamma(2,4v) \end{bmatrix},$$

gdzie:

$$\beta(v) = v \frac{\sinh v - \sin v}{1 - \cosh v \cos v};$$

$$\delta(v) = v^2 \frac{\cosh v - \cos v}{1 - \cosh v \cos v};$$

$$\varepsilon(v) = v^3 \frac{\sin v + \sinh v}{1 - \cosh v \cos v}.$$

#### Wariant 4 – podział słupa na cztery części

Dla słupa z rysunku 2d wyznaczono niezbędne do obliczeń wielkości:

$$J_1^4 = \frac{\pi(\delta_1^4)^4}{4} = \frac{\pi}{4} \left( \frac{9}{10} \delta \right)^4 = 0,1640\pi\delta^4;$$

$$J_2^4 = \frac{\pi(\delta_2^4)^4}{4} = \frac{\pi}{4} \left( \frac{7}{10} \delta \right)^4 = 0,0600\pi\delta^4;$$

$$J_3^4 = \frac{\pi(\delta_3^4)^4}{4} = \frac{\pi}{4} \left( \frac{5}{10} \delta \right)^4 = 0,0156\pi\delta^4;$$

$$J_4^4 = \frac{\pi(\delta_4^4)^4}{4} = \frac{\pi}{4} \left( \frac{3}{10} \delta \right)^4 = 0,0020\pi\delta^4.$$

Przy założeniu  $E_s J_1^4 = EJ$  mamy:  $E_s J_2^4 = 0,366EJ$ ,  $E_s J_3^4 = 0,095EJ$  oraz  $E_s J_4^4 = 0,012EJ$ .

$$\mu_1^4 = \rho_s \cdot A_1^4 = \rho_s \cdot \pi \cdot (\delta_1^4)^2 = \rho_s \cdot \pi \cdot \left( \frac{9}{10} \delta \right)^2 = 0,81\pi\rho_s \delta^2;$$

$$\mu_2^4 = \rho_s \cdot A_2^4 = \rho_s \cdot \pi \cdot (\delta_2^4)^2 = \rho_s \cdot \pi \cdot \left( \frac{7}{10} \delta \right)^2 = 0,49\pi\rho_s \delta^2;$$

$$\mu_3^4 = \rho_s \cdot A_3^4 = \rho_s \cdot \pi \cdot (\delta_3^4)^2 = \rho_s \cdot \pi \cdot \left( \frac{5}{10} \delta \right)^2 = 0,25\pi\rho_s \delta^2;$$

$$\mu_4^4 = \rho_s \cdot A_4^4 = \rho_s \cdot \pi \cdot (\delta_4^4)^2 = \rho_s \cdot \pi \cdot \left( \frac{3}{10} \delta \right)^2 = 0,09\pi\rho_s \delta^2.$$

Analogicznie przy założeniu  $\mu_1^4 = \mu$  otrzymujemy:  $\mu_2^4 = 0,605\mu$ ,  $\mu_3^4 = 0,309\mu$  oraz  $\mu_4^4 = 0,111\mu$ .

Dla poszczególnych części słupa wyznaczono parametry:  $\nu_1^4 = 1,5\nu$ ,  $\nu_2^4 = 1,7\nu$ ,  $\nu_3^4 = 2,0\nu$  oraz  $\nu_4^4 = 2,6\nu$ .

W przypadku podziału słupa na cztery części o stałych przekrojach macierz sztywności ma postać

$$\mathbf{M} = [m_{ij}], \text{ dla } i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6,$$

gdzie:

$$m_{11} = 0,667\alpha(1,5\nu) + 0,244\alpha(1,7\nu); m_{12} = 0,244\beta(1,7\nu); m_{13} = 0;$$

$$m_{14} = -0,444\vartheta(1,5\nu) + 0,163\vartheta(1,7\nu); m_{15} = -0,163\delta(1,7\nu); m_{16} = 0;$$

$$m_{22} = 0,244\alpha(1,7\nu) + 0,063\alpha(2\nu); m_{23} = 0,063\beta(2\nu); m_{24} = 0,163\delta(1,7\nu);$$

$$m_{25} = -0,163\vartheta(1,7\nu) + 0,042\vartheta(2\nu); m_{26} = -0,042\delta(2\nu);$$

$$m_{33} = 0,063\alpha(2\nu) + 0,008\alpha''(2,6\nu); m_{34} = 0; m_{35} = 0,042\delta(2\nu);$$

$$m_{36} = -0,042\vartheta(2\nu) + 0,005\vartheta''(2,6\nu); m_{44} = 0,296\gamma(1,5\nu) + 0,108\gamma(1,7\nu);$$

$$m_{45} = -0,108\varepsilon(1,7\nu); m_{46} = 0; m_{55} = 0,108\gamma(1,7\nu) + 0,028\gamma(2\nu); m_{56} = -0,028\varepsilon(2\nu);$$

$$m_{66} = 0,028\gamma(2\nu) + 0,004\gamma''(2,6\nu) \text{ oraz } m_{ij} = m_{ji}, \text{ dla } i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

### Wariant 5 – podział słupa na pięć części

Dla słupa z rysunku 2e wyznaczono niezbędne do obliczeń wielkości:

$$J_1^5 = \frac{\pi(\delta_1^5)^4}{4} = \frac{\pi}{4}(0,92\delta)^4 = 0,1797\pi\delta^4;$$

$$J_2^5 = \frac{\pi(\delta_2^5)^4}{4} = \frac{\pi}{4}(0,76\delta)^4 = 0,0834\pi\delta^4;$$

$$J_3^5 = \frac{\pi(\delta_3^5)^4}{4} = \frac{\pi}{4}(0,6\delta)^4 = 0,0324\pi\delta^4;$$

$$J_4^5 = \frac{\pi(\delta_4^5)^4}{4} = \frac{\pi}{4}(0,44\delta)^4 = 0,0094\pi\delta^4;$$

$$J_5^5 = \frac{\pi(\delta_5^5)^4}{4} = \frac{\pi}{4}(0,28\delta)^4 = 0,0015\pi\delta^4.$$

Przy założeniu  $E_s J_1^5 = EJ$  mamy:  $E_s J_2^5 = 0,466EJ$ ,  $E_s J_3^5 = 0,181EJ$ ,  $E_s J_4^5 = 0,052EJ$  oraz  $E_s J_5^5 = 0,008EJ$ .

$$\mu_1^5 = \rho_s \cdot A_1^5 = \rho_s \cdot \pi \cdot (\delta_1^5)^2 = \rho_s \cdot \pi \cdot (0,92\delta)^2 = 0,8464\pi\rho_s\delta^2;$$

$$\mu_2^5 = \rho_s \cdot A_2^5 = \rho_s \cdot \pi \cdot (\delta_2^5)^2 = \rho_s \cdot \pi \cdot (0,76\delta)^2 = 0,5776\pi\rho_s\delta^2;$$

$$\mu_3^5 = \rho_s \cdot A_3^5 = \rho_s \cdot \pi \cdot (\delta_3^5)^2 = \rho_s \cdot \pi \cdot (0,6\delta)^2 = 0,36\pi\rho_s\delta^2;$$

$$\mu_4^5 = \rho_s \cdot A_4^5 = \rho_s \cdot \pi \cdot (\delta_4^5)^2 = \rho_s \cdot \pi \cdot (0,44\delta)^2 = 0,1936\pi\rho_s\delta^2;$$

$$\mu_5^5 = \rho_s \cdot A_5^5 = \rho_s \cdot \pi \cdot (\delta_5^5)^2 = \rho_s \cdot \pi \cdot (0,28\delta)^2 = 0,0784\pi\rho_s\delta^2.$$

Analogicznie przy założeniu  $\mu_1^5 = \mu$  otrzymujemy:  $\mu_2^5 = 0,682\mu$ ,  $\mu_3^5 = 0,425\mu$ ,  $\mu_4^5 = 0,229\mu$  oraz  $\mu_5^5 = 0,093\mu$ .

Dla poszczególnych części słupa wyznaczono parametry:  $v_1^5 = 1,2v$ ,  $v_2^5 = 1,3v$ ,  $v_3^5 = 1,5v$ ,  $v_4^5 = 1,7v$  oraz  $v_5^5 = 2,2v$ .

W przypadku podziału słupa na pięć części o stałych przekrojach macierz sztywności przyjmie postać

$$\mathbf{M} = [m_{ij}], \text{ dla } i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,$$

gdzie:

$$m_{11} = 0,833\alpha(1,2v) + 0,388\alpha(1,3v); m_{12} = 0,388\beta(1,3v); m_{13} = 0; m_{14} = 0;$$

$$m_{15} = -0,694\vartheta(1,2v) + 0,324\vartheta(1,3v); m_{15} = -0,324\delta(1,3v); m_{17} = 0; m_{18} = 0;$$

$$m_{22} = 0,388\alpha(1,3v) + 0,151\alpha(1,5v); m_{23} = 0,151\beta(1,5v); m_{24} = 0; m_{25} = 0,324\delta(1,3v);$$

$$m_{26} = -0,324\vartheta(1,3v) + 0,126\vartheta(1,5v); m_{27} = -0,126\delta(1,5v); m_{28} = 0;$$

$$m_{33} = 0,151\alpha(1,5v) + 0,043\alpha(1,7v); m_{34} = 0,043\beta(1,7v); m_{35} = 0; m_{36} = 0,126\delta(1,5v);$$

$$m_{37} = -0,126\vartheta(1,5v) + 0,036\vartheta(1,7v); m_{38} = -0,036\delta(1,7v);$$

$$m_{44} = 0,043\alpha(1,7v) + 0,007\alpha''(2,2v); m_{45} = 0; m_{46} = 0; m_{47} = 0,036\delta(1,7v);$$

$$m_{48} = -0,036\vartheta(1,7v) + 0,006\vartheta''(2,2v); m_{55} = 0,579\gamma(1,2v) + 0,270\gamma(1,3v);$$

$$m_{56} = -0,270\varepsilon(1,3v); m_{57} = 0; m_{58} = 0; m_{66} = 0,270\gamma(1,3v) + 0,105\gamma(1,5v);$$

$$m_{67} = -0,105\varepsilon(1,5\nu); m_{68} = 0; m_{77} = 0,105\gamma(1,5\nu) + 0,030\gamma(1,7\nu); m_{78} = -0,030\varepsilon(1,7\nu);$$
$$m_{88} = 0,030\gamma(1,7\nu) + 0,005\gamma''(2,2\nu) \text{ oraz } m_{ij} = m_{ji}, \text{ dla } i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.$$

## WYNIKI

W wyniku obliczeń numerycznych otrzymano trzy pierwsze częstości drgań własnych dla każdego z rozpatrywanych wariantów. Wyniki otrzymano za pomocą programu Mathematica.

### Wariant 1

Trzy pierwsze miejsca zerowe wyznacznika przyjmują wartości:

$$v_{01}^1 = 0,313;$$

$$v_{02}^1 = 0,782;$$

$$v_{03}^1 = 1,309.$$

Zatem trzy pierwsze częstości drgań własnych to:

$$\omega_{01}^1 = (v_{01}^1)^2 \sqrt{\frac{EJ}{\mu\delta^4}} = 0,313^2 \sqrt{\frac{E_s \cdot 0,0324\pi\delta^4}{0,36\pi\rho_s\delta^2 \cdot \delta^4}} = 0,029 \sqrt{\frac{E_s}{\rho_s\delta^2}};$$

$$\omega_{02}^1 = (v_{02}^1)^2 \sqrt{\frac{EJ}{\mu\delta^4}} = 0,183 \sqrt{\frac{E_s}{\rho_s\delta^2}};$$

$$\omega_{03}^1 = (v_{03}^1)^2 \sqrt{\frac{EJ}{\mu\delta^4}} = 0,514 \sqrt{\frac{E_s}{\rho_s\delta^2}}.$$

### Wariant 2

Trzy pierwsze miejsca zerowe wyznacznika macierzy sztywności przyjmują wartości:

$$v_{01}^2 = 0,380;$$

$$v_{02}^2 = 0,646;$$

$$v_{03}^2 = 1,531.$$

Zatem trzy pierwsze częstości drgań własnych to:

$$\omega_{01}^2 = (v_{01}^2)^2 \sqrt{\frac{EJ}{\mu\delta^4}} = 0,380^2 \sqrt{\frac{E_s \cdot 0,1024\pi\delta^4}{0,64\pi\rho_s\delta^2 \cdot \delta^4}} = 0,058 \sqrt{\frac{E_s}{\rho_s\delta^2}};$$

$$\omega_{02}^2 = (v_{02}^2)^2 \sqrt{\frac{EJ}{\mu\delta^4}} = 0,167 \sqrt{\frac{E_s}{\rho_s\delta^2}};$$

$$\omega_{03}^2 = (v_{03}^2)^2 \sqrt{\frac{EJ}{\mu\delta^4}} = 0,938 \sqrt{\frac{E_s}{\rho_s\delta^2}}.$$

### Wariant 3

Trzy pierwsze miejsca zerowe wyznacznika macierzy sztywności przyjmują wartości:

$$v_{01}^3 = 0,390;$$

$$v_{02}^3 = 0,652;$$

$$v_{03}^3 = 1,512.$$

Zatem trzy pierwsze częstości drgań własnych to:

$$\begin{aligned}\omega_{01}^3 &= (v_{01}^3)^2 \sqrt{\frac{EJ}{\mu\delta^4}} = 0,390^2 \sqrt{\frac{E_s \cdot 0,1410\pi\delta^4}{0,751\pi\rho_s\delta^2 \cdot \delta^4}} = 0,066 \sqrt{\frac{E_s}{\rho_s\delta^2}}; \\ \omega_{02}^3 &= (v_{02}^3)^2 \sqrt{\frac{EJ}{\mu\delta^4}} = 0,184 \sqrt{\frac{E_s}{\rho_s\delta^2}}; \\ \omega_{03}^3 &= (v_{01}^3)^2 \sqrt{\frac{EJ}{\mu\delta^4}} = 0,991 \sqrt{\frac{E_s}{\rho_s\delta^2}}.\end{aligned}$$

#### Wariant 4

Trzy pierwsze miejsca zerowe wyznacznika macierzy sztywności przyjmują wartości:

$$v_{01}^4 = 0,407;$$

$$v_{02}^4 = 0,681;$$

$$v_{03}^4 = 1,002.$$

Zatem trzy pierwsze częstości drgań własnych to:

$$\begin{aligned}\omega_{01}^4 &= (v_{01}^4)^2 \sqrt{\frac{EJ}{\mu\delta^4}} = 0,407^2 \sqrt{\frac{E_s \cdot 0,1640\pi\delta^4}{0,81\pi\rho_s\delta^2 \cdot \delta^4}} = 0,075 \sqrt{\frac{E_s}{\rho_s\delta^2}}; \\ \omega_{02}^4 &= (v_{02}^4)^2 \sqrt{\frac{EJ}{\mu\delta^4}} = 0,209 \sqrt{\frac{E_s}{\rho_s\delta^2}}; \\ \omega_{03}^4 &= (v_{01}^4)^2 \sqrt{\frac{EJ}{\mu\delta^4}} = 0,452 \sqrt{\frac{E_s}{\rho_s\delta^2}}.\end{aligned}$$

#### Wariant 5

Trzy pierwsze miejsca zerowe wyznacznika macierzy sztywności przyjmują wartości:

$$v_{01}^5 = 0,422;$$

$$v_{02}^5 = 0,695;$$

$$v_{03}^5 = 1,025.$$

Zatem trzy pierwsze częstości drgań własnych to:

$$\begin{aligned}\omega_{01}^5 &= (v_{01}^5)^2 \sqrt{\frac{EJ}{\mu\delta^4}} = 0,422^2 \sqrt{\frac{E_s \cdot 0,1791\pi\delta^4}{0,8464\pi\rho_s\delta^2 \cdot \delta^4}} = 0,082 \sqrt{\frac{E_s}{\rho_s\delta^2}}; \\ \omega_{02}^5 &= (v_{02}^5)^2 \sqrt{\frac{EJ}{\mu\delta^4}} = 0,222 \sqrt{\frac{E_s}{\rho_s\delta^2}}; \\ \omega_{03}^5 &= (v_{01}^5)^2 \sqrt{\frac{EJ}{\mu\delta^4}} = 0,483 \sqrt{\frac{E_s}{\rho_s\delta^2}}.\end{aligned}$$



## PODSUMOWANIE

Choć istnieje wiele metod wyznaczania częstości drgań własnych słupów o zmiennym przekroju poprzecznym, w tym również metody ścisłe, to w celach inżynierskich uzasadnione wydaje się stosowanie metod przybliżonych. Otrzymane wartości pierwszych częstości drgań własnych porównano z wartościami otrzymanymi inną metodą przybliżoną, tj. metodą Rayleigh’a (Bagdasaryan, Chalecki, Gierasimiuk, Jaworski i Szlachetka, 2018), wyznaczając błąd względny ze wzoru

$$\Delta = \left| \frac{\omega_1^R - \omega_1^{MMS}}{\omega_1^R} \right| \cdot 100$$

W tabeli podano zestawienie pierwszych częstości drgań własnych wyznaczonych metodą macierzy sztywności, pierwszą częstość drgań własnych rozpatrywanego słupa otrzymaną metodą Rayleigh’a oraz obliczone błędy względne.

**Tabela.** Otrzymane wyniki pierwszej częstości drgań własnych

**Table.** Obtained results of the first natural frequency

Parametr Parameter	Podział słupa na $n$ części Division of pole per $n$ pieces				
	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
$\omega_1^{MMS} \cdot \sqrt{\frac{\rho_s \delta^2}{E_s}}$	0,029	0,058	0,066	0,075	0,082
$\omega_1^R \cdot \sqrt{\frac{\rho_s \delta^2}{E_s}}$			0,086		
$\Delta$ [%]	66,3	32,6	23,3	12,8	4,7

## NATURAL FREQUENCY OF A POLE WITH A VARIABLE CROSS-SECTION

### ABSTRACT

In the paper natural frequencies of a pole with a variable cross-section were obtained. The pole was made of a homogeneous, elastic material. Solutions were obtained by approximation of the continuous change of the cross-section by changing by steps. The results are compared with the results obtained with Rayleigh’s method.

**Key words:** natural frequency, variable cross-section, stiffness matrix

Z wyników przedstawionych w tabeli wynika, iż rozwiązanie przydatne do celów inżynierskich (błąd poniżej 5%) otrzymuje się przy podziale słupa na przynajmniej pięć przedziałów.

## PIŚMIENNICTWO

- Bagdasaryan, V., Chalecki, M., Gierasimiuk, M., Jaworski, J. i Szlachetka, O. (2018). First natural transverse frequency of truncated cone and wedge beams. *Acta Sci. Pol. Architectura*, 17 (1), 3–12.
- Caruntu, D. I. (2009). Dynamic modal characteristics of transverse vibrations of cantilevers of parabolic thickness. *Mechanics Research Communications*, 36 (3), 391–404.
- Naguleswaran, S. (1994). A direct solution for the transverse vibration of Euler-Bernoulli wedge and cone beams. *Journal of Sound and Vibration*, 172 (3), 289–304.
- Szewczyk, M., Kukła, S. i Zamojska, I. (2007). Drgania własne układy płyt kołowych swobodnie podpartych połączonych elementami sprężystymi. *Modelowanie Inżynierskie*, 33, 153–158.