

ZASTOSOWANIE MODELU WINKLERA PRZY OBLICZANIU HYBRYDOWEJ KONSTRUKCJI OPOROWEJ

Włodzimierz Brząkała✉, Aneta Herbut

Wydział Budownictwa Lądowego i Wodnego, Politechnika Wrocławska, Wrocław

STRESZCZENIE

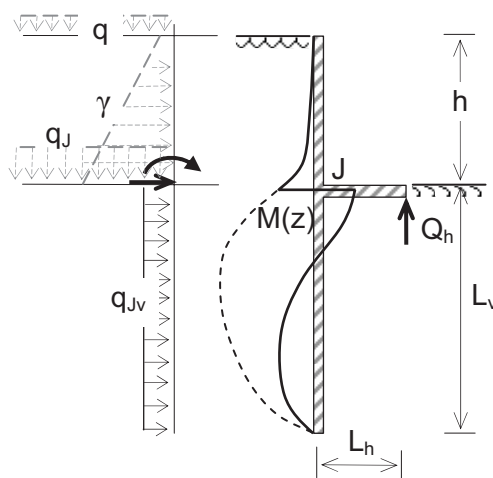
W artykule przedstawiono metodę oceny przemieszczeń i sił wewnętrznych w ścianie szczelinowej, szczelnej, palisadzie lub w pojedynczym pału według rozwiązania belki Eulera-Bernoulliego na standardowym podłożu Winklera. Termin „hybrydowa konstrukcja oporowa” określa pionową belkę wzmocnioną poziomą płytą stabilizującą, dodatkowo posadowioną na podłożu sprężystym. Warunek sztywnego utwierdzenia płyty w ścianie pozwala określić podział momentu zginającego na pionową i poziomą belkę. Zagadnienie rozwiązano analitycznie dla różnych modeli zmienności współczynnika podłoża. W przykładach wykazano bardzo korzystny wpływ płyty stabilizującej na redukcję przemieszczeń ściany oraz zmniejszenie sił wewnętrznych.

Słowa kluczowe: lekka konstrukcja oporowa, podłoże sprężyste, element belkowy, współczynnik podłoża

WSTĘP

Hybrydowe konstrukcje oporowe zagłębione w gruncie cechują się usztywnieniem w postaci płyty wspornikowej w poziomie terenu lub w poziomie dna

wykopu. Pierwsze tego typu wzmocnienia pali wielkośrednicowych pojawiły się już w pierwszej połowie XX wieku, trochę później zastosowano zagłębione w podłożu ściany oporowe wmacniane poziomą płytą (rys. 1).



Rys. 1. Koncepcja hybrydowej konstrukcji oporowej (opis w tekście)

Fig. 1. Idea of a hybrid retaining construction (description in the text)

✉wlodzimierz.brzakala@pwr.edu.pl

W ostatnich latach daje się zauważyć rosnące zainteresowanie geoinżynierów tego typu konstrukcjami – głównie w zastosowaniu do wykopów liniowych (metro, autostrady, płytkie tunele w metodzie odkrywkowej i in.), słupów energetycznych czy rozwiązań wzmacniających posadowienie małych turbin wiatrowych (Powrie i Chandler, 1998; Trojnar, 2013; Versteijlen, Metrikine i van Dalen, 2016). Dalszą poprawę warunków statycznej pracy ściany hybrydowej (lub pala hybrydowego) może stanowić oparcie swobodnego końca jej poziomej płyty wspornikowej o pale, baretę lub inną ściankę – pojawia się wtedy pionowa siła skupiona – Q_h (rys. 1). Z dwóch podstawowych rodzajów konstrukcji zagłębionych w gruncie, tj. pali oraz ścian, niniejsza praca dotyczy głównie tych drugich, choć model jest generalnie taki sam, różni się jedynie interpretacją współczynników podłoża oraz pochodzeniem i wartościami obciążeń q_J , M_J , H_J w węzle J. Monolitycznie zespolony poziomy element konstrukcyjny odgrywa znaczącą rolę stabilizującą, ponieważ redukuje momenty zginające $M(z)$ w dolnej części ściany (rys. 1: linia przerywana – przypadek bez płyty, linia ciągła – przypadek z płytą); może on być – w pewnym stopniu – wspomaganie lub alternatywą dla zakotwień ściany oporowej, zapewnia też zmniejszenie wymaganego zagłębienia pala lub jego średnicy oraz zmniejszenie grubości ściany. Jeszcze skuteczniejsze jest rozpięcie dwóch przeciwległych ścian wykopu (liniowego) poziomą płytą denną, gdy konstrukcja ma kształt litery H – po dodaniu odbicia lustrzanego konstrukcji na rysunku 1 względem siły Q_h ; w tym przypadku większy jest jednak wpływ sztywności na ściskanie EA . Wykonanie poziomej płyty stabilizującej (rys. 1) następuje po wykonaniu pionowej ściany lub pala-słupa; w tym pierwszym przypadku konieczne może okazać się usunięcie obciążenia q na naziomie, częściowe usunięcie gruntu z lewej strony ściany, etapowanie wykopu z lokalnym pozostawianiem (naprzemiennie) przypór gruntowych, tymczasowe podpieranie ściany o wcześniej wykonane podpory palowe, tymczasowe rozpięcie itp.

Celem przedstawionej analizy jest liczbowa ocena pracy konstrukcji pokazanej na rysunku 1 za pomocą standardowego modelu winklerowskiego –

w 150. rocznicę jego wprowadzenia¹. Pomimo ograniczeń do liniowego modelu podłoża, choć z pewnymi elementami delinearizacji, rozwiązania mogą okazać się przydatne do jakościowej oceny zachowania się ściany oporowej, wstępnych studiów parametrycznych, analizy wrażliwości i optymalizacji konstrukcji.

HIPOTEZA WSPÓŁCZYNNIKA WINKLERA

Rozpatrując przypadek belki wieloprzęsłowej na podporach sprężystych, zakłada się, że osiadanie y [m] fundamentu lub jego części jest proporcjonalne do jego obciążenia q [MPa], czyli że istnieje pewna stała $C' = q/y = \text{const}$ [$\text{MN}\cdot\text{m}^{-3}$]. Nie budzi to większych zastrzeżeń w przypadku np. toru kolejowego jako belki na odrębnych podporach sprężystych, ale odbiega od rzeczywistości, jeśli sąsiednie „podpory” są bardzo blisko siebie. Krytyka hipotezy Winklera jest powszechnie znana już od wczesnych prac Terzaghiego. Wnioski płynące z szerokiej dyskusji trafnie podsumowali np. Jamiolkowski i Garassino (1977), Balay (1984), Dutta i Roy (2002), Dodds i Martin (2007), Siemińska-Lewandowska (2011): parametr winklerowski nie jest parametrem fizycznym podłoża, lecz parametrem matematycznym modelu – o niewątpliwiej przydatności praktycznej, poprzez prostotę metody obliczeniowej.

Model Winklera nie uwzględnia przemieszczeń podłoża poza obciążonym miejscem, co jest jego istotną wadą w przypadku grubej warstwy gruntów ściśliwych pod fundamentem. Wynika stąd kolejna wada modelu – „zaburzenie” kształtowania się pionowych naprężeń kontaktowych pod fundamentem, które są podstawą do jego wymiarowania. Znanym środkiem zaradczym jest zastosowanie modelu dwuparametrowego, np. Pasternaka (Henry, 1986), w którym sąsiadujące ze sobą sprężyny nie są niezależne (Basu, Salgado i Prezzi, 2008). Jakość modelu Winklera czy Pasternaka znacznie poprawia jego delinearizacja w postaci tzw. krzywych p - y , wprowadzonych przez McClellanda i Fochta, a potem szeroko stosowanych przez Reeseego i jego współpracowników. Model Winklera zastosowano ostatnio do analizy odpowiedzialnych

¹ Ten sam model matematyczny stosował już dużo wcześniej Euler, a za jego prototyp można uznać nawet prawo Archimedes.

konstrukcji inżynierskich, przykładowo w pracach Basu, Salgado i Prezzi (2008), jak również Versteijlena, Metrikine’a i van Dalena (2016), w których wykazano, że wyniki otrzymywane dla pali-słupów turbin wiatrowych (ang. *off-shore monopiles*) i grup palowych są porównywalne z przestrzenną analizą MES, pod warunkiem zastosowania wyrafinowanej techniki identyfikacji „współczynnika podłoża” C .

W kontekście dosyć powszechnego stosowania modelu Winklera przy projektowaniu typowych konstrukcji geoinżynierskich (komercyjne programy wspomagające projektowanie) warto odnieść się do niektórych cech tego modelu.

- 1) Wprawdzie nieliniowość eksperymentalnej krzywej obciążenie–osiadanie bywa znacząca, ale tylko dla „dużych” obciążeń przedgranicznych; współczynniki bezpieczeństwa w obliczeniach normowych sprawiają, że zazwyczaj obciążenia konstrukcji geoinżynierskich nie przekraczają 40–50% obciążeń granicznych ULS i w tych „przeciętnych warunkach” model liniowy podłoża z odpowiednio dobranym (siecznym) współczynnikiem C może okazać się wystarczająco dokładny.
- 2) Jeżeli obciążenia stopniowo przyrastają aż do osiągnięcia wartości stałej, to efekty odprężeniowe (po innej krzywej), pętla histerezy i nieodwracalne osiadania podłoża są mniej istotne.
- 3) Konsekwencją założenia Winklera, tj. powiązania reakcji podłoża i osiadań tylko w tym samym punkcie, są m.in. stałe naprężenia kontaktowe pod sztywnym stępem obciążonym centralnie (bez mimośrod). W teorii sprężystości występuje duża koncentracja reakcji podłoża pod końcami sztywnego stępła posadowionego na jednorodnej półprzestrzeni sprężystej, ale w miarę rozwoju w podłożu stref uplastycznionych jest odwrotnie: dla obciążeń na poziomie 40–50% nośności ULS reakcja podłoża pod sztywnym stępem jest pośrednia i nie różni się bardzo od odporu równomiernego. Co więcej Gibson (1967) rozwiązał zagadnienie niejednorodnej i nieściśliwej objętościowo półprzestrzeni sprężystej o module odkształcenia postaciowego liniowo rosnącym z głębokością $G(z) = G_0 \cdot m_1 \cdot z$, wykazując, że równomierne pionowe obciążenie dowolnego obszaru na powierzchni powoduje równomierne osiadania tego

obciążonego obszaru i tylko tego obszaru, czyli tak jak w modelu Winklera.

- 4) Standardowa hipoteza Winklera oznacza *de facto* więzi dwustronne, czyli na styku belki lub płyty z podłożem wystąpiłoby nierealne przenoszenie rozciągań, a powinno wystąpić wtedy odrywanie (więzi jednostronne). Prawdłowo zaprojektowany fundament powinien jednak przylegać do podłoża – dla obciążeń stałych, a często i zmiennych – a w zakresie ściskania oba typy więzi zachowują się identycznie.
- 5) Dobór wartości parametru C mocno zależy od doświadczenia projektanta, popartego np. wynikami monitoringu wykonanych ścian (inklinometry). Wiadomo jednak, że niedokładności wyznaczenia tego parametru nie powodują dużych zmian w ocenie sił wewnętrznych w belce (w przypadku przemieszczeń już tak być nie musi).
- 6) Prostota rozwiązań matematycznych w pewnym stopniu rekompensuje niedostatki fizyczne modelu i zapewne dlatego większość typowych płyt i ław fundamentowych zaprojektowano według modelu Winklera.

SCHEMATY OBLICZENIOWE

Rozpatruje się gładką pionową ścianę i jedną warstwę gruntu niespoistego o parametrach γ [$\text{kN}\cdot\text{m}^{-3}$], K_a oraz K_0 . Wspornikowy charakter ściany na górnym odcinku powyżej węzła J (rys. 1) oznacza relatywnie dużą swobodę przemieszczeń, a zatem powyżej węzła J uzasadnione jest przyjęcie następujących obciążeń od parcia gruntu $e_a(z) = K_a \cdot \sigma_z$ [kPa] na odcinku $0 \leq z \leq h$: $H_J = 1/2 \cdot K_a \cdot \gamma \cdot h^2 \cdot B + K_a \cdot q \cdot h \cdot B$ [kN] oraz $M_J = 1/6 \cdot K_a \cdot \gamma \cdot h^3 \cdot B + 1/2 \cdot K_a \cdot q \cdot h^2 \cdot B$ [$\text{kN}\cdot\text{m}$], zakładając wystąpienie parcia czynnego na całym górnym odcinku ściany powyżej węzła J.

Przedstawione w dalszej części przykłady obliczeniowe potwierdziły słuszność założenia o występowaniu parcia granicznego na części wspornikowej – przemieszczenia poziome są około 2–3 razy większe od przemieszczeń granicznych wskazywanych w Eurokodzie 7 oraz w polskiej normie PN-B-03010:1983. Szerokość rozpatrywanego pasma przyjmuje się generalnie jako B , a dla dłuższej ściany $B = 1$ m. Maksymalne ugięcie smukłego wspornika o stałej sztywności EI ,

[MN·m²], utwardzonego i obciążonego trapezowym poziomym parciem gruntu wynosi: $y_{ow} = K_a \cdot \gamma \cdot B \cdot h^5 / (30 \cdot EI_v) + K_a \cdot q \cdot B \cdot h^4 / (8 \cdot EI_v)$ [m].

Indeks v dotyczy wszystkich parametrów belki pionowej (współrzędna z), natomiast indeks h – belki poziomej (współrzędna x). Dla uproszczenia zapisu pominięto wpływ współczynnika Poissona na różnice między sztywnością belkową (EI) a sztywnością płytową (D); przemieszczenie w stronę wykopu przyjmuje się za ujemne, a zatem w powyższym wyrażeniu na y_{ow} należy przyjąć liczbę przeciwną.

Pionowe obciążenie równomierne $q_J = \gamma \cdot h + q$ [kPa] w poziomie węzła J (rys. 1) skutkuje poziomym obciążeniem q_{Jv} pionowej belki poniżej węzła J. W zależności od sztywności ściany i jej przemieszczeń można szacować, że jest to pewna wartość nie większa od $K_0 \cdot q_J$ (ściana sztywna nieprzesuwna), ale większa od $K_a \cdot q_J$ (ściana sztywna przesuwna). Jako bezpieczne oszacowanie (z nadmiarem) przyjęto obciążenie $q_{Jv} = K_0 \cdot (\gamma \cdot h + q)$ [kPa] na całym dolnym odcinku pionowej ściany; uziornienie współczynnika rozporu $K(z)$ od wartości K_a na poziomie dna wykopu do wartości K_0 w dolnej części ściany nie stanowiłoby istotnego utrudnienia w rozwiązywaniu zagadnienia.

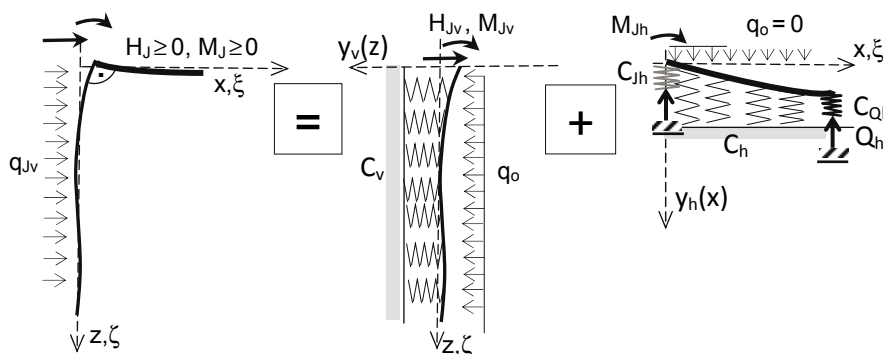
W dalszej części rozpatruje się wyłącznie konstrukcję złożoną z dwóch elementów, które są sprzężone w sztywnym węźle J, tj. złożoną z (rys. 2):

- pionowej ściany zagłębionej na odcinku L_v w ośrodku Winklera poniżej narożnika J,
- poziomej płyty wspornikowej na odcinku L_h , spoczywającej na ośrodku Winklera na prawo od narożnika J, sprężysto podpartej na obu końcach.

Rozpatrywana ściana hybridowa może być „rozłożona” na belkę pionową (poniżej węzła J) oraz belkę poziomą (w poziomie wykopu), które współdziałają w narożniku J w przenoszeniu momentów redukujących zginanie ściany.

Założenie sztywności tego węzła oznacza równy kąt obrotu obu belek $\varphi_{Jh} = \varphi_{Jv} = \varphi_J$, co stanowi sprzężenie belki pionowej i poziomej. Następuje podział zewnętrznego momentu zginającego M_J , wynikającego z parcia gruntu, na belkę pionową M_{Jv} oraz belkę poziomą M_{Jh} .

W warunkach równowagi statycznej zachodzi: $M_J = M_{Jv} + M_{Jh}$, $H_J = H_{Jv} + H_{Jh}$; można jednak przyjąć, że $H_{Jh} \approx 0$, ponieważ pozioma płyta wspornikowa nie bierze istotnego udziału w przenoszeniu sił poziomych. To ostatnie założenie wymaga komentarza. Przeniesienie sił poziomych przez poziomą płytę mogłoby potencjalnie nastąpić na zewnętrznym pionowym licu tej płyty oraz pod płytą (tarcie płyty o grunt). Z reguły jednak sytuacje obliczeniowe nie uwzględniają odporu gruntu przed konstrukcją oporową na tak małej głębokości poniżej poziomu terenu (wykopu), ponieważ w sytuacji wyjątkowej może nastąpić np. odkopanie płyty, czyli częściowy współczynnik bezpieczeństwa należałoby przyjąć $\gamma_A = 0$; ponadto, to nie byłyby duże siły, bo grubość płyty nie jest duża. Do mobilizacji sił tarcia pod płytą potrzebne są natomiast poziome przemieszczenia płyty, ale przemieszczenia względne – w stosunku do niżej zalegającego gruntu. Tymczasem tutaj przemieszcza się i pozioma płyta, i grunt pod nią, który jest „pchany” poziomo przez ścianę. Dla „dużych” poziomych przemieszczeń konstrukcji



Rys. 2. Obliczeniowa dekompozycja ściany hybridowej
Fig. 2. Hybrid wall decomposition for a calculation purpose

obserwuje się wręcz powstawanie sztywnego klina w narożniku między płytą a ścianą, co dobrze udokumentował m.in. Trojnar (2013). Można zatem odstąpić od umieszczenia poziomych sprężyn (lub stałych sił) na prawym końcu płyty stabilizującej i pod płytą, chociaż uwzględnienie tych sił poziomych nie stanowiłoby istotnej komplikacji modelu.

Pionowe przemieszczenie węzła J jest do pominięcia i dlatego dla poziomej belki na rysunku 2 przyjmuje się na jej lewym końcu sztywność podpory $C_{Jh} \sim +\infty$. W przypadku nie tylko sprężystego podparcia, ale też utwierdzenia pali podpierających w poziomej płycie stabilizującej, pionowej sile Q_h na prawym końcu płyty towarzyszyłaby siła pozioma oraz moment sił – co nie jest obecnie analizowane. Możliwy jest też schemat działania tylko siły Q_h bez istotnego kontaktu płyty z podłożem ($C_h \sim 0$) – chodzi tutaj o możliwość ewentualnej rektyfikacji ściany poprzez lewarowanie i podbijanie płyty stabilizującej.

PODSTAWOWE RÓWNANIE DLA BELKI WINKLEROWSKIEJ

Dla belki Eulera-Bernoulliego stosuje się standardowe równanie różniczkowe dla osi odkształconej $y(z)$:

$$EI \cdot \frac{d^4 y(z)}{dz^4} + B \cdot C \cdot y(z) = q_o \quad (1)$$

gdzie: EI – sztywność belki na zginanie [$MN \cdot m^2$],
 B – szerokość [m],
 C – parametr sztywności podłoża [$MN \cdot m^{-3}$],
 q_o – przekrojowe obciążenie zewnętrzne wzdłuż belki [$MN \cdot m^{-1}$] zwrócone tak jak przemieszczenie y (rys. 2); dla pionowej ściany jest to $q_o = -q_{Jv} \cdot B$, a znak „-” wynika z konwencji znakowania na rysunku 2, ponieważ fizycznie są to parcia działające w prawo.

Parametr winklerowski C nie musi być stały, może zależeć od położenia z lub x , a także od przemieszczenia $y(z)$ lub odpowiednio $y(x)$ – jednak w przypadku zależności od y skutkuje to delinearizacją równania. Dla stałego obciążenia $q_o = \text{const}$ przypadek $C = \text{const}$ prowadzi do trywialnego rozwiązania równania (1), tj. $y = \text{const} = q_o / (C \cdot B)$, jednak dla $C \neq \text{const}$ już tak nie jest – co więcej, jak łatwo zauważyć nawet dla liniowej funkcji C i dla $q_o = \text{const}$, rozwiązanie y nie jest funkcją liniową, występuje zatem zginanie belki, a nie tylko jej obrót; dotyczy to zarówno belki pionowej dla $C = C_v(z)$, jak i ewentualnie belki poziomej dla $C = C_h(x)$.

BELKA JEDNOSTRONNIE NIESKOŃCZNA (PIONOWA)

Niech $EI = EI_v = \text{const} < +\infty$, $0 \leq z \leq L_v = +\infty$, $C = C_v = \text{const}^2$.

Rozwiązaniem równania (1) dla bezwymiarowej zmiennej $\zeta = z/L_{Wv}$ jest:

$$y(\zeta) = -2 \cdot H_{Jv} / [B \cdot C_v \cdot L_{Wv}] \cdot e^{-\zeta} \cdot \cos \zeta - 2 \cdot M_{Jv} / [B \cdot C_v \cdot (L_{Wv})^2] \cdot e^{-\zeta} \cdot [\cos \zeta - \sin \zeta] + q_o / (B \cdot C_v)$$

gdzie $L_{Wv} = [4 \cdot EI_v / (B \cdot C_v)]^{1/4}$ oraz $q_o = -q_{Jv} \cdot B = \text{const}$ (rys. 2).

Kąt obrotu, momenty zginające i siły poprzeczne więc wynoszą:

$$\varphi_v(\zeta) = dy_v / d\zeta \cdot d\zeta / dz = 2 \cdot H_{Jv} / [B_v \cdot C_v \cdot (L_{Wv})^2] \cdot e^{-\zeta} \cdot [\cos \zeta + \sin \zeta] + 4 \cdot M_{Jv} / [B_v \cdot C_v \cdot (L_{Wv})^3] \cdot e^{-\zeta} \cdot \cos \zeta$$

$$M_v(\zeta) = -EI_v \cdot d^2 y_v(\zeta) / d\zeta^2 \cdot d^2 \zeta / dz^2 = H_{Jv} \cdot L_{Wv} \cdot e^{-\zeta} \cdot \sin \zeta + M_{Jv} \cdot e^{-\zeta} \cdot [\cos \zeta + \sin \zeta]$$

$$Q_v(\zeta) = -EI_v \cdot d^3 y_v(\zeta) / d\zeta^3 \cdot d^3 \zeta / dz^3 = H_{Jv} \cdot e^{-\zeta} \cdot [\cos \zeta - \sin \zeta] - 2 \cdot M_{Jv} / L_{Wv} \cdot e^{-\zeta} \cdot \sin \zeta$$

² Współczynnik podłoża C dla pionowej belki jest indeksowany literą v , jak wszystkie parametry związane z pionową belką, stąd symbol C_v , który dotyczy poziomego przemieszczenia $y_v(z)$ wzdłuż osi X ; analogicznie dla poziomej belki, w przypadku której używa się współczynnika C_h , a przemieszczenie $y_h(x)$ następuje w kierunku osi Z ; w niektórych źródłach, w tym w Eurokodzie 7, można znaleźć inną konwencję indeksowania.

Ekstremalna wartość momentu zginającego poniżej dna wykopu występuje tam, gdzie $Q(\zeta_e) = 0$, czyli na pewnej głębokości $z_e = \zeta_e \cdot L_{WV} = \{\arctg [a_e / (1 + a_e)] + k \cdot \pi\} \cdot L_{WV}$ dla parametru $a_e = \frac{1}{2} \cdot L_{WV} \cdot H_{Jv} / M_{Jv}$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Z pominięciem wpływu obciążenia równomiernego $q_{Jv} = \text{const}$ przemieszczenia są zerowe na pewnej rzędnej $z_o = \zeta_o \cdot L_{WV} = \{\arctg (1 + a_o) + k \cdot \pi\} \cdot L_{WV}$ dla parametru $a_o = L_{WV} \cdot H_{Jv} / M_{Jv}$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Dla $C_v = \text{const}$ odległości tych miejsc zerowych są zatem dosyć duże i wynoszą $\pi \cdot L_{WV}$ (ok. 7,5 m w przykładzie 1); oznacza to, że w analizowanej sytuacji przemieszczenie belki jest bliskie przypadkowi belki sztywnej, gdyż oprócz przesunięcia poziomego ma ona punkt obrotu kilka metrów poniżej dna wykopu. Ze względu na szybko zanikającą eksponentę ($e^{-3} < 5\%$) można uznać, że rzeczywista belka jest jednostronnie nieskończona, jeśli jej długość $L_v > 3 \cdot L_{WV}$. Ten przypadek jest często spełniony dla wspornikowej ściany pionowej.

BELKA SZTYWNA O SKOŃCZONEJ DŁUGOŚCI (POZIOMA LUB PIONOWA)

Ze względu na niepożądane lokalne oderwanie się od podłoża poziomy element wspornikowy konstrukcji hybrydowej powinien cechować się raczej dużą sztywnością niż dużą długością i wówczas przydatne może okazać się wyprowadzone rozwiązanie dla belki nieskończenie sztywnej (rys. 3).

Szerokość obliczeniowa wynosi $B = 1$ m dla ściany, ale w przypadku stabilizacji pionowego pala może być to zmienna szerokość płyty $B(x)$ (Dembi-

cki i Tejchman, 1974; Trojnar, 2013) – z zachowaniem symetrii w celu ograniczenia skręcania.

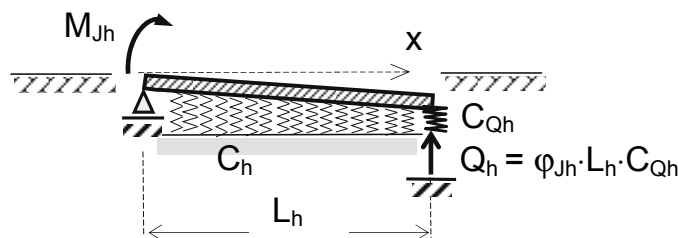
Niech $EI_h = +\infty$, $0 \leq x \leq L_h < +\infty$, $C_h = \text{const}$ [$\text{MN} \cdot \text{m}^{-3}$], a sztywność (sieczna) pojedynczego pala podporowego wynosi $c_{1p} = \text{const}$ [$\text{MN} \cdot \text{m}^{-1}$]. Sztywność podpory na prawym końcu $x = L_h$ zależy zatem od liczby pali n_p na 1 mb ($n_p = 1/l_p$) w kierunku prostopadłym i wynosi ona $C_{Qh} = c_{1p} \cdot n_p \cdot B$ ($x = L_h$), jeśli założyć, że pale nie oddziałują na siebie.

Belka obraca się o pewien kąt φ_{Jh} [$\text{rad} = \text{mm} \cdot \text{m}^{-1}$] pod działaniem momentu $M_{Jh} > 0$ na nieosiadającym końcu. Na tej podporze wystąpi pewna reakcja pionowa, którą przekaże się poprzez węzeł J na ścianę zagłębioną w podłożu, ale może ona być pominięta (dotyczy to również rys. 2). Jeśli Q_h [MN] jest siłą skupioną na podporze sprężystej oraz $r_h(x) = \varphi_{Jh} \cdot x \cdot C_h \cdot B(x)$ [$\text{MN} \cdot \text{m}^{-1}$] jest reakcją podłoża w przekroju x , to kąt obrotu sztywnej belki φ_{Jh} [rad] wymaga następującego momentu M_{Jh} [$\text{MN} \cdot \text{m}$] na podporze nieosiadającej:

$$\begin{aligned} M_{Jh} &= Q_h \cdot L_h + \int_0^{L_h} x \cdot r_h(x) dx = \\ &= \varphi_{Jh} \cdot L_h^2 \cdot C_{Qh} + \varphi_{Jh} \cdot C_h \cdot \int_0^{L_h} x^2 \cdot B(x) dx \end{aligned} \quad (2)$$

Dla sztywnego wspornika trapezowego o szerokości $B \cdot (1 + \beta \cdot x)$, gdzie $\beta \geq 0$ [m^{-1}], otrzymuje się

$$\varphi_{Jh} = \frac{M_{Jh}}{L_h^2 \cdot [C_{Qh} + C_h \cdot B \cdot L_h \cdot (1/3 + \beta \cdot L_h / 4)]} \quad (3)$$



Rys. 3. Przesunięcie poziomej sztywnej belki (występuje tylko obrót)
Fig. 3. Displacement of the horizontal rigid beam (only a rotation happens)

BELKA ODKSZTAŁCALNA O SKOŃCZONEJ DŁUGOŚCI (POZIOMA LUB PIONOWA)

Niech $EI = \text{const} < +\infty$, $0 \leq z \leq L < +\infty^3$. Rozwiązanie $y(z)$ równania podstawowego (1) jest kombinacją liniową czterech funkcji $e^{\pm\zeta} \cdot \sin \zeta$, $e^{\pm\zeta} \cdot \cos \zeta$, ale dotyczy to tylko przypadku $C \cdot B = \text{const}$ oraz $q_o = 0$. Znacznie bardziej uniwersalna jest metoda rozwinięcia wielomianowych, ponieważ rozwiązanie $y(z)$ jest funkcją ciągłą i jako taka może być z dowolnie dużą dokładnością przybliżone rozwinięciem wielomianowym na skończonym odcinku $[0; L]$; jest to rozwiązanie ścisłe, które wyraża się za pomocą szeregu $y(z) = \sum a_i \cdot z^i$ dla $i = 0, 1, 2, \dots$. W tym przypadku EI , B , $q_o = -q_{jh} \cdot B$ oraz parametr $C > 0$ mogą być wielomianami zmiennej z ; obecnie zakładamy, że zmienna jest tylko sztywność podłoża $C = C(z) = \sum c_j \cdot z^j$, gdzie $j = 1, 2, \dots, n < +\infty$. Współczynniki c_j są znane i służą do wyznaczenia poszukiwanych nieznanymi współczynników a_i . Po zróżniczkowaniu i podstawieniu do wyjściowego równania różniczkowego (1) otrzymuje się wyrażenia rekurencyjne dla $k \geq 1$:

$$a_4 = -\frac{B}{EI} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot [c_o \cdot a_0 + q_{jh}]$$
$$a_{k+4} = -\frac{B}{EI} \cdot \frac{k!}{(k+4)!} \cdot \sum_{l=0}^k c_l \cdot a_{k-l} \quad (4)$$

z porównania współczynników przy wszystkich kolejnych jednomianach z^k .

Cztery „brakujące” stałe a_0, a_1, a_2, a_3 wyznacza się z czterech warunków brzegowych – po dwóch na każdym końcu belki; w szczególności, dla podparcia sprężystego na prawym końcu poziomej belki, jest to warunek na siłę poprzeczną $Q(L_h) = C_{Qh} \cdot y(L_h)$ lub po prostu $Q(L_h) = Q_h$, jeśli siła $Q_h = \text{const}$ jest znana.

Dla realnych danych obliczenia w programie Mathematica® dają dobrą zbieżność dla mniej niż 8–12 wyrazów rozwinięcia, a algorytm jest bardzo prosty.

PARAMETRY MODELU

Wartości parametru C_h

Powszechnie uważa się (Dembicki i Tejchman, 1974; Henry, 1986), że współczynnik pionowej reakcji podłoża C_h [$\text{MN} \cdot \text{m}^{-3}$], oznaczany też często jako współczynnik podłoża k_z , najlepiej wyznaczać za pomocą obciążeń próbnych sztywną płytą, biorąc $C_h = q/y$, gdzie q [MPa] jest średnim naprężeniem pod płytą, y [m] jest jej średnim osiadaniami. Podawane są też wzory zaproponowane jeszcze przez Terzagiego, jak przeliczyć jego wartość otrzymaną dla małej płyty kołowej o średnicy 30 cm na przypadek znacznie większych fundamentów $B \cdot L$, dla których sztywność podłoża C_h jest mniejsza. W bardziej lub mniej jawny sposób te metody wykorzystują rozwiązania dla jednorodnej półprzestrzeni sprężystej, co może budzić pewne zastrzeżenia.

Alternatywną metodą określania wartości parametru C_h jest analiza odwrotna, czyli wyznaczanie wartości C_h w celu zapewnienia najlepszej zgodności pewnych rozwiązań analitycznych z wartościami pomierzonymi lub rozwiązaniami powszechnie znanymi i akceptowalnymi. Jeśli za te ostatnie uznać obliczanie osiadania fundamentu bezpośrednio „sposobem normowym” w zakresie głębokości $0 \leq z \leq z_{\text{max}}$ poniżej fundamentu, to dla stałego modułu edometrycznego $M_0 = \text{const}$ [MPa] w rozważanym przedziale głębokości oraz dla modułu $M(z) = M_1 \cdot (1 + m_1 \cdot z)$ [MPa], gdzie $m_1 = 1/10$, otrzymuje się wyniki jak w tabeli 1.

Przyjęto ciężar objętościowy gruntu $\gamma = 20 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-3}$ oraz głębokości posadowienia $z_0 = 2,0 \text{ m p.p.t.}$

Podane przykładowe wartości równomiernego obciążenia pod fundamentem q_k mają jedynie pośredni wpływ na obliczenia – poprzez głębokość krytyczną z_{max} poniżej poziomu posadowienia⁴. Obliczenia stają się szczególnie proste, a wynik stosunkowo dokładny dla fundamentu płytowego bardzo rozległego i dla małej wartości jednostkowego obciążenia q_k ; w tym

³ Analogicznie dla kierunku poziomego ze zmienną x w miejsce z itd.

⁴ Ten prosty sposób normowy [$\sigma_{zd}(z_{\text{max}}) = 0,2 \cdot \sigma_{zy}(z_{\text{max}})$] generuje „przy okazji” ciekawą nieliniowość modelu: jeśli obciążenie q_k ulegnie podwojeniu, to osiadanie tego samego fundamentu wzrośnie więcej niż dwukrotnie, ponieważ dodatkowo zwiększy się jeszcze grubość z_{max} strefy aktywnej; ponadto, zwiększanie głębokości posadowienia z_0 skutkuje zmniejszeniem osiadania.

Tabela 1. Współczynniki reakcji podłoża

Table 1. Subsoil reaction coefficients

Wariant Variant	B × L [m]	q_k [kPa]	z_{\max} [m]	Średnie osiadanie (s) Mean settlement [m]	C_h [MN·m ⁻³]	
					$M_0 = \text{const}$	$M_1 \cdot (1 + z/10)$
Stopa	2,0 × 2,0	500	6,4 (~ 3B)	~ 1,0 MN·m ⁻¹ /M ₀	~ 3M ₀ /z _{max}	~ 4,5M ₁ /z _{max}
Ława	1,0 × 15,0	250	6,2 (~ 6B)	~ 0,5 MN·m ⁻¹ /M ₀	~ 3M ₀ /z _{max}	~ 4,5M ₁ /z _{max}
Płyta	20,0 × 50,0	200	21,0 (~ 1B)	~ 3,4 MN·m ⁻¹ /M ₀	~ 1M ₀ /z _{max}	~ 2,5M ₁ /z _{max}
Płyta	20,0 × 20,0	50	9,0 (~ B/2)	~ 0,4 MN·m ⁻¹ /M ₀	~ 1M ₀ /z _{max}	~ 1,7M ₁ /z _{max}

przypadku osiadanie edometryczne wynosi $q_k \cdot z_{\max}/M_0 = q_k/C_h$, czyli $C_h = M_0/z_{\max}$ lub $C_h = M_0/h$, jeśli miąższość h ściślej warstwy gruntowej jest mniejsza od z_{\max} .

Łatwo sprawdzić, że różnice pomiędzy dwoma ostatnimi kolumnami w tabeli 1 są *de facto* niewielkie, a zatem dla fundamentów bezpośrednich można rekomendować metodę prostszą, czyli w wersji $M_0 = \text{const}$. Jeśli bowiem porównywać obie metody estymacji parametru C_h , to funkcję $M(z)$ należałoby zastąpić pewną wartością uśrednioną, np. $M(z_{\max}/2) = M_1 \cdot (1 + z_{\max}/20) \approx M_0$, czyli $M_1 \approx M_0/(1 + z_{\max}/20)$. Dokonując takiego podstawienia w ostatniej kolumnie w tablicy 1, otrzymuje się wyniki podobne jak w przedostatniej kolumnie, przykładowo $\sim 4,5 \cdot M_0/(1 + 6,4/20)/z_{\max} \sim 3 \cdot M_0/z_{\max}$.

Zasadny jest więc wniosek, że wzrost sztywności podłoża z głębokością ma mniejsze znaczenie dla poziomych fundamentów bezpośrednich niż dla konstrukcji zagłębionych w gruncie. Bardziej wyrafinowane techniki wyznaczania współczynnika podłoża omawiają Sadrekarimi i Akbarzad (2009). Przykładowe wyniki z tabeli 1 dotyczą czterech wybranych sytuacji obliczeniowych, ale metoda może być zastosowana również dla innych zestawów danych.

Wartości parametru C_{Qh}

Szywność pojedynczej podpory sprężystej w prawym końcu belki c_{1p} [MN·m⁻¹] określa się na podstawie próbnych obciążeń pali (baret, ścianek); C_{Qh} mocno zależy od długości pala, jego średnicy i technologii wykonania, ale głównie od budowy podłoża (Gwizdała, 2010) oraz liczby pali w rzędzie, $C_{Qh} = c_{1p} \cdot n_p \cdot B$.

Wartości parametru C_v

Dla pionowej ściany współczynnik poziomej reakcji podłoża C_v [MN·m⁻³] oznacza się w literaturze zazwyczaj symbolem k_h i nosi on nazwę współczynnika bocznej podatności podłoża. Począwszy od prac Bromsa z 1964 roku (por. Dodds i Martin, 2007; Basu, Salgado i Prezzi, 2008) dla gruntów spoistych przyjmuje się zazwyczaj wartość sztywności niezależną lub niemal niezależną od głębokości, a dla gruntów niespoistych za lepszy model uważa się funkcję liniowo rosnącą z głębokością, ewentualnie (dla pali) stałą poniżej głębokości 5 m (Kosecki, 2006). Omawiana przez Dembickiego oraz Tejchmana (1974) funkcyjna zależność dla poziomej sztywności podłoża $C_v = k_h = k_s \cdot z/L_v$ osiąga maksymalną wartość k_s na dolnym końcu ścianki $z = L_v$, co budzi wątpliwości. Jeśli bowiem ścianę „przegłębiono” o kilka metrów, np. tylko po to, aby doprowadzić ją do warstwy nieprzepuszczalnej, to warunki pracy ściany się nie pogorszą; jednak wzrost L_v w części nieistotnej dla pracy ściany spowoduje zmniejszenie sztywności podłoża również w zakresie kilku pierwszych metrów p.p.t., czyli zwiększenie przemieszczeń poziomych; praktyka pokazuje, że jest raczej odwrotnie. Dembicki i Tejchman (1974) zalecają parametr k_s o wartościach od około 60 MN·m⁻³ dla gruntów gruboziarnistych, do około 30 MN·m⁻³ dla gruntów drobnoziarnistych.

Przegląd kilku metod dokonany przez Siemińską-Lewandowską (2011) wskazuje na przydatność nomogramu Chadeissona, który jednak uzależnia wartości k_h tylko od parametrów wytrzymałościowych ϕ oraz c . W gruncie jednorodnym oznacza to brak wzrostu sztywności podłoża z głębokością – chyba, że zakładać wzrost wartości parametrów ϕ oraz c z głębokością. Do

obliczeń sprawdzających reakcję ścian szczelinowych na linii warszawskiego metra użyto wartości k_h rzędu 30–90 MN·m⁻³ – ale w warunkach dobrego podparcia ściany (liczne kotwy/rozpory); są to wartości, które odpowiadają propozycji Chadeissona i są bliskie wartościom k_h według Dembickiego i Tejchmana (1974) dla $z = L_v$. Za wiarygodne uznaje się też (Siemińska-Lewandowska, 2011) empiryczne wzory Ménarda, Marche’a czy Schmitta – operujące modułem presjometrycznym E_M , jak również związki między współczynnikiem k_h a modułami Younga E i oporem q_c sondy statycznej (Pun i Pang, 1992). Obszerne studia na ten temat zawierają niemal wszystkie prace zestawione w spisie literatury, podkreślające również różnice pomiędzy modelowaniem ścian zagłębionych w gruncie i pali, a tym bardziej grup palowych.

WZROST SZTYWNOŚCI PODŁOŻA Z GŁĘBOKOŚCIĄ

Obciążenia próbne wykonywane tą samą płytą na dnie wykopu wykazują w gruntach uznanych za jednorodnie mniejsze osiadania dla głębszych wykopów – przy identycznym obciążeniu jednostkowym q . Uwzględnianie wzrostu sztywności podłoża wraz z głębokością z jest stosowane od kilkadziesiąt lat, a od kilkunastu lat jest wręcz standardem w związku z upowszechnieniem się modelu *hardening soil*. Badania laboratoryjne wskazują na wyraźny wzrost sztywności gruntu w miarę zwiększania (średnich) naprężeń, co przekłada się na potęgową zależność od głębokości z ; według Janbu jest to zmienność potęgowa, generalnie typu $(z)^m$, gdzie dla piasków $m = 1/2$; nowsze badania laboratoryjne oraz polowe wskazują na większy wykładnik m , 0,5–0,7, czyli zależność ma krzywiznę, ale niedużą. Jeśli dodatkowo uwzględnić malejącą z głębokością porowatość początkową ośrodka, to w jednej warstwie geotechnicznej wzrost liniowy ($m = 1$) jest najprostszy i stosunkowo dokładny. Dyskusję tego zagadnienia w kontekście zastosowań praktycznych przedstawili m.in. Obrzud i Truty (2014), stosując w przykładach testowych zarówno wykładnik potęgowy $m \sim 0,5$, jak i $m = 1$; na podstawie danych przytoczonych w wymienionej pracy, można przykładowo aproksymować moduł Younga dla iltu londyńskiego jako $E(z) = 25 \cdot (1 + z/10)$ [MPa].

Tego typu funkcja liniowa – z niezerową wartością w poziomie terenu $z = 0$ – daje się wywnioskować z ekstrapolacji wyników na „średnich” głębokościach, ale bezpośrednie wyznaczenie sztywności podłoża dla $z \approx 0$ jest trudne; na pewno znaczący jest tu wpływ prekonsolidacji, szczególnie w gruntach spoistych. Są jednak argumenty obliczeniowe, aby do określania poziomej sztywności podłoża C_v przyjmować uproszczoną zależność liniową „typu Gibsona”, czyli $G(z) = G_o \cdot m_1 \cdot z$. Małe sztywności dla $z \approx 0$ bardzo zmniejszają reakcje podłoża płytko poniżej poziomu terenu, co jest bliskie rzeczywistości (szczególnie w gruntach niespoistych). Takie obliczeniowe zanizanie C_v może być namiastką delinearizacji modelu, jeśli zamodelować osłabiane gruntu dla „dużych” przemieszczeń poprzez zmniejszenie jego sztywności (podobnie jak w modelu krzywych p - y). Na ogół wymaga to obliczeń przyrostowych lub iteracyjnych, ponieważ lokalna sztywność podłoża zależy od przemieszczeń ściany (Balay, 1984), o ile są one „dostatecznie duże”. Obecność poziomej płyty stabilizującej i równocześnie pionowej ściany także zmienia ten obraz i wartości $C_h(z \approx 0)$, $C_v(z \approx 0)$ nie muszą być bliskie zeru. Na większych głębokościach, czyli w dolnej części ściany lub pala, zmienność sztywności jest mniej istotna, a Kosecki (2006) proponuje przyjmowanie stałej wartości; podobnie jak w przypadku jednostkowej nośności pala przez pobocznice jest to głębokość krytyczna 5 m (dla gruntów niespoistych).

Przyjęcie poziomu $z = 0$ dla konstrukcji zagłębionej w gruncie nie zawsze jest oczywiste: dla pierwotnego płaskiego terenu i gruntów nośnych jest to poziom terenu przy konstrukcji zagłębionej w gruncie, obniżony poziom zastępczy dla gruntów nienośnych, a w przypadku nasypów za przyczółkiem na palach proponuje się na przykład obniżenie poziomu obliczeniowego do głębokości, na której równoważą się parcia $e_p(z) = e_a(z)$ (Kosecki, 2006). W przypadku uskoku terenu (wykopu) oraz ściany z płytą stabilizującą takie zabiegi nie wydają się konieczne i bezpieczne jest przyjmowanie $z = 0$ w poziomie dna wykopu lub nawet podwyższenie tego poziomu – głównie dla mocnych gruntów spoistych.

Niezależnie od tego, PN-EN 1997-1:2008. Eurokod 7 wymaga w sytuacjach obliczeniowych uwzględnienia dodatkowego obliczeniowego „przegłębienia” wykopu o Δa .

PODŁOŻE UWARSTWIONE

Standardowo zakłada się, że sztywność C_h jest stała w każdej wydzielonej warstwie o grubości H_i , czyli określa się ciąg wartości $C_{hi} = \text{const}$, $i = 1, 2, \dots, k$. Wydzielenia warstw mogą być następstwem budowy geologicznej podłoża, ale mogą też wynikać z przyczyn obliczeniowych (w warstwie makrojednorodnej) – np. w celu zamodelowania wzrostu sztywności podłoża z głębokością lub lokalnego osłabienia przemieszczeniowego (dla lokalnie „dużych” przemieszczeń ściany). Belkę rozwiązuje się na każdym z n wydzielonych odcinków (łącznie $4n$ stałych do wyznaczenia), po czym dokonuje się „sklejania” rozwiązań z odpowiednich $4n$ czterech warunków ciągłości na $n-1$ stykach odcinków; uzupełnieniem są po dwa warunki brzegowe na każdym z dwóch końców całej belki. Alternatywną metodę postępowania zaproponowano w pracy Versteijlena, Metrikine’a i van Dalena (2016) – jest to uogólnienie popularnej w Polsce metody Zawrijewa: dowolną zmienność parametru C_v przybliża się wielomianem $C_v(z) = \sum c_i \cdot z^i$, stosując np. metodę najmniejszych kwadratów lub interpolację. Jeśli podłoże ma regularną budowę (sztywność rosnąca z głębokością), to wystarczające jest użycie liniowej lub parabolicznej zależności $C_v(z)$; występowanie na większych głębokościach warstw znacznie bardziej ściśle wymaga paraboli sześcienniej (lokalne minimum) albo nawet wielomianów wyższych stopni. W przypadku pionowej niejednorodności podłoża ta metoda rozwiązywania nie wymaga kłopotliwego „sklejania” segmentów obliczeniowych i jest zastosowana w niniejszej pracy.

Przykład 1: Analiza obliczeniowa ściany wspornikowej

Rozpatruje się sekcję o szerokości $B = 1,0$ m ($\beta = 0$) pionowej ściany bez płyty stabilizującej.

Ściana składa się z części wspornikowej o wysokości $h = 4$ m ponad dnem wykopu oraz części zagłębionej w gruncie poniżej dna wykopu na odcinku $L_v = 8$ m. Grubość ściany wynosi $b = 0,4$ m; sztywność $EI_v = 31\,000 \cdot 1 \cdot 0,4^3/12 = 165 \text{ MN} \cdot \text{m}^2$. Pozioma sztywność podłoża winklerowskiego jest stała, przyjęto $C_v = 20 \text{ MN} \cdot \text{m}^{-3}$. Stąd cecha sztywności pionowej belki $L_{Wv} = [4 \cdot EI_v / (B \cdot C_v)]^{1/4} = [4 \cdot 165 / (1 \cdot 20)]^{1/4} = 2,4$ m i można uznać, że jest to belka nieskończenie długa ($L_v/L_{Wv} > 3,3 > 3$).

Przy omówionych wcześniej założeniach, dla $q = 0$ [kPa] oraz dla ciężaru objętościowego gruntu $\gamma = 20 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-3}$, obciążenia w węźle J wynoszą:

- $H_J = 1/2 \cdot K_a \cdot \gamma \cdot h^2 \cdot B = 1/2 \cdot 0,33 \cdot 20 \cdot 4^2 \cdot 1 = 53 \text{ kN}$,
- $M_J = 1/6 \cdot K_a \cdot \gamma \cdot h^3 \cdot B = 1/6 \cdot 0,33 \cdot 20 \cdot 4^3 \cdot 1 = 70 \text{ kN} \cdot \text{m}$,
- $q_J = \gamma \cdot h = 20 \cdot 4$ [kPa], stąd $q_{Jv} = K_o \cdot q_J = 0,5 \cdot 80 = 40 \text{ kPa}$

i odpowiednio więcej dla występującego obciążenia terenu $q > 0$. Dla „nieskończonej” wartości L_v , zagłębienia ściany w podłożu wartości q mogą też symulować (z lekkim niedomiarem) efekt zwiększonej głębokości wykopu – również tej niezamierzonej.

Ugięcie własne zginanej części wspornikowej od obciążenia e_a powyżej dna wykopu wynosi $y_{ow} = -K_a \cdot \gamma \cdot h^5 \cdot B / (30 \cdot EI_v) = -0,33 \cdot 20 \cdot 4^5 \cdot 1 / (30 \cdot 165) = -1,4$ mm, a przemieszczenie górnej krawędzi ściany od samego tylko obrotu o kąt φ_J w węźle J ma wartość $y_{o\varphi} = -\varphi_J \cdot h$ [mm].

Zasadniczym etapem obliczeń jest wyznaczenie podziału momentu M_J na momenty M_{Jv} oraz M_{Jh} , po którym rozwiązywana jest już tylko belka pionowa obciążona momentem M_{Jv} oraz siłą H_J – w niniejszym przykładzie ten etap jednak nie występuje, ponieważ nie ma poziomej płyty stabilizującej ($M_{Jh} = 0$); rozwiązanie jest bezpośrednim zastosowaniem podanych wcześniej wzorów dla pionowej belki nieskończenie długiej.

W tabeli 2 przedstawiono wybrane wyniki obliczeń, z których najistotniejsze jest sumaryczne poziome przemieszczenie (y_o) górnej krawędzi ściany, tj. w poziomie pierwotnego terenu.

Obliczając maksymalne przemieszczenie (y_o), sumuje się pięć odrębnych wpływów:

- przemieszczenie $y_{vH}(0)$ węzła J (poziom dna wykopu) spowodowane tylko poziomą siłą H_J ,
- przemieszczenie $y_{vM}(0)$ węzła J spowodowane tylko momentem M_{Jv} ,
- przemieszczenie y_{Jvq} węzła J spowodowane tylko obciążeniem ciągłym q_{Jv} ,
- przemieszczenie $y_{o\varphi}$ górnej krawędzi ściany spowodowane obrotem wspornika,
- przemieszczenie y_{ow} górnej krawędzi ściany spowodowane własnym ugięciem wspornika.

Symbol z_e oznacza głębokość poniżej dna wykopu, na której występuje ekstremalny moment zginający ścianę o wartości $M_{v,max}$; symbol z_o oznacza głębokość

Tabela 2. Wyniki dla pionowej ściany wspornikowej (bez poziomej płyty stabilizującej); przeanalizowano zmienne obciążenia terenu – q [kPa]

Table 2. Results obtained for a vertical cantilever wall (no stabilizing platform); various ground level loadings – q [kPa] are taken into account

Parametr – Parameter	$q = 0$	$q = 16$	$q = 32$
q_{Jv} [kPa]	40	48	56
H_J [kN]	53	74	95
M_J [kNm]	70	113	156
M_{Jv} [kNm]	70	113	156
M_{Jh} [kNm]	0	0	0
φ_J [mm/m]	1,93	2,92	3,91
$y_{vH}(0)$ [mm]	-2,2	-3,1	-4,0
$y_{vM}(0)$ [mm]	-1,2	-2,0	-2,7
y_{Jvq} [mm]	-2,0	-2,4	-2,8
$y_{o\varphi}$ [mm]	-7,7	-11,7	-15,6
y_{ow} [mm]	-1,4	-2,4	-3,4
$y_o = \Sigma y$ [mm]	-14,5	-21,6	-28,5
z_e [m]	1,1	1,0	1,0
$M_{v,max}$ [kNm]	95	146	197
z_o [m]	3,0	2,9	2,8

poniżej dna wykopu, na której zeruje się przemieszczenie $y = y_{vH} + y_{vM}$, wynikające ze zginania belki zagłębionej w podłożu (z pominięciem wpływu obciążenia q_{Jv}).

Wnioski z przykładu 1

- 1) W sytuacji obliczeniowej zbliżonej do warunków rzeczywistych daje się zauważyć dominujący wpływ kąta obrotu (φ_J) na przemieszczenia ściany wspornikowej (y_o) w poziomie pierwotnego terenu ($y_{o\varphi} \sim 50\% y_o$). Wskazuje to na potencjalną skuteczność poziomej płyty stabilizującej, która zadziała w węźle J przeciw-momentem (M_{Jh}).
- 2) Należy oczekiwać, że stała wartość współczynnika poziomej podatności gruntu zaniża wartości przemieszczenia ściany oraz momenty zginające. Dotyczy to głównie małych głębokości poniżej dna wykopu.

Przykład 2: Analiza obliczeniowa ściany z płytą stabilizującą – płyta sztywna

Dane dotyczące ściany są takie jak w poprzednim przykładzie. Ścianę stabilizuje pozioma sztywna płyta ($EI_h \sim +\infty$) o długości $L_h = 2,0$ m, podparta na prawym końcu układem palowym o sztywności $0 \leq C_{Qh} \leq +\infty$ [$MN \cdot m^{-1}$] i sztywno zamocowana w ścianie. Sztywności podłoża winklerowskiego jest stała: $C_h = 30 MN \cdot m^{-3}$ (ta wartość jest bez znaczenia, jeśli dla sztywnej płyty przyjmuje się $C_{Qh} = +\infty$). Wyniki obliczeń dla $q = 16$ kPa przedstawiono w tabeli 3, wyróżniając też podział wypadkowego

Tabela 3. Rozwiązania dla pionowej ściany hybrydowej (sztywna pozioma płyta stabilizująca); przeanalizowano zmienne sztywności podparcia – C_{Qh} [$MN \cdot m^{-1}$]

Table 3. Results obtained for a vertical hybrid wall (stabilized by a rigid horizontal platform); various stiffnesses of the elastic support are taken into account – C_{Qh} [$MN \cdot m^{-1}$]

Parametr Parameter	$C_{Qh} = 0$	$C_{Qh} = 10$	$C_{Qh} = 50$	$C_{Qh} = +\infty$
q_{Jv} [kPa]	48	48	48	48
H_J [kN]	74	74	74	74
M_J [kNm]	113	113	113	113
M_{Jv} [kNm]	5	-15	-49	-87
M_{Jh} [kNm]	108	128	162	200
φ_J [mm/m]	1,35	1,07	0,58	0*
$y_{vH}(0)$ [mm]	-3,1	-3,1	-3,1	-3,1
$y_{vM}(0)$ [mm]	-0,1	+0,3	+0,9	+1,5
y_{Jvq} [mm]	-2,4	-2,4	-2,4	-2,4
$y_{o\varphi}$ [mm]	-5,4	-4,3	-2,3	0
y_{ow} [mm]	-2,4	-2,4	-2,4	-2,4
$y_o = \Sigma y$ [mm]	-13,4	-11,9	-9,5	-6,4
z_e [m]	1,8	2,1	2,8	3,7
$M_{v,max}$ [kNm]	27	15	1	-3
z_o [m]	3,7	4,0	4,6	5,6

* Sztywna płyta stabilizująca posadowiona na sztywnym podparciu sprawia, że kąt obrotu ściany na poziomie dna wykopu (w węźle J) jest zerowy, co jest obwidnią realnie występujących sytuacji obliczeniowych.

momentu $M_J = 113 \text{ kN}\cdot\text{m}^{-1}$ na obciążenie ściany M_{Jv} oraz obciążenie płyty M_{Jh} .

Wnioski z przykładu 2

- 1) W wyniku dodania płyty stabilizującej nastąpiła niemal 2–4-krotna redukcja maksymalnych przemieszczeń ściany (6,4–13,4 mm < 21,6 mm). Płyta stabilizująca wyraźnie zmniejsza momenty zginające ścianę M_{Jv} , a nawet szybko powoduje zmianę znaku momentu. Należy podkreślić, że wyznaczone momenty $M_{v,\max}$ są wartościami ekstremalnymi i występują poniżej dna wykopu ($z < 0$). Często większe wartości M_v występują na końcu przedziału dla $z = \pm 0$ (skok wartości momentu jak na rysunku 1).
- 2) Mając na uwadze możliwości techniczne i ekonomiczne, wymaganą sztywność podparcia pałowego należałoby w przyjętej sytuacji obliczeniowej szacować na poziomie 10–50 $\text{MN}\cdot\text{m}^{-1}$, co nie jest wartością dużą.

Przykład 3: Analiza obliczeniowa ściany z płytą stabilizującą – podłoże niejednorodne

Dla ściany z płytą stabilizującą badany jest wpływ modelu sztywności podłoża dla trzech przypadków:

- a) $C_v = 20 \text{ MN}\cdot\text{m}^{-3} = \text{const}$ (jak poprzednio),
- b) $C_v(z) = 5 + z \cdot 15/4 \text{ [MN}\cdot\text{m}^{-3}]$ wartość średnia w analizowanym zakresie głębokości $0 \leq z \leq 8 \text{ m}$ jest taka sama jak w przypadku a, czyli $(5 + 35)/2 = 20 \text{ [MN}\cdot\text{m}^{-3}]$;
- c) $C_v(z) = 5 + z \cdot 15/4 - z^2 \cdot 10/4 + z^3 \cdot 10/16 - z^4 \cdot 10/256 \text{ [MN}\cdot\text{m}^{-3}]$ zamodelowano w ten sposób obecność słabszego przewarstwienia o dosyć „rozmytych” granicach w okolicach głębokości $z = 4 \text{ m}$, na której wartość C_v zmniejsza się maksymalnie z 20 do 10 $\text{MN}\cdot\text{m}^{-3}$.

Parametry ściany – analogiczne jak w przykładzie 1, $L_v = 8 \text{ m}$, $q = 16 \text{ kPa}$; parametry płyty stabilizującej i podparcia: $EI_h = 31\,000 \cdot 1 \cdot 0,6^3/12 = 558 \text{ MN}\cdot\text{m}^2$, długość $L_h = 2,0 \text{ m}$, $C_h = 30 \text{ MN}\cdot\text{m}^{-3}$, $C_{Qh} = 10 \text{ MN}\cdot\text{m}^{-1}$.

Wyniki dla odkształcalnych obu belek są otrzymane na podstawie wzorów (4); przedstawiono je w tabeli 4 i na rysunku 4, wyróżniając podział wypadkowego momentu $M_J = 113 \text{ kN}\cdot\text{m}$ na obciążenie ściany (M_{Jv}) oraz obciążenie płyty (M_{Jh}).

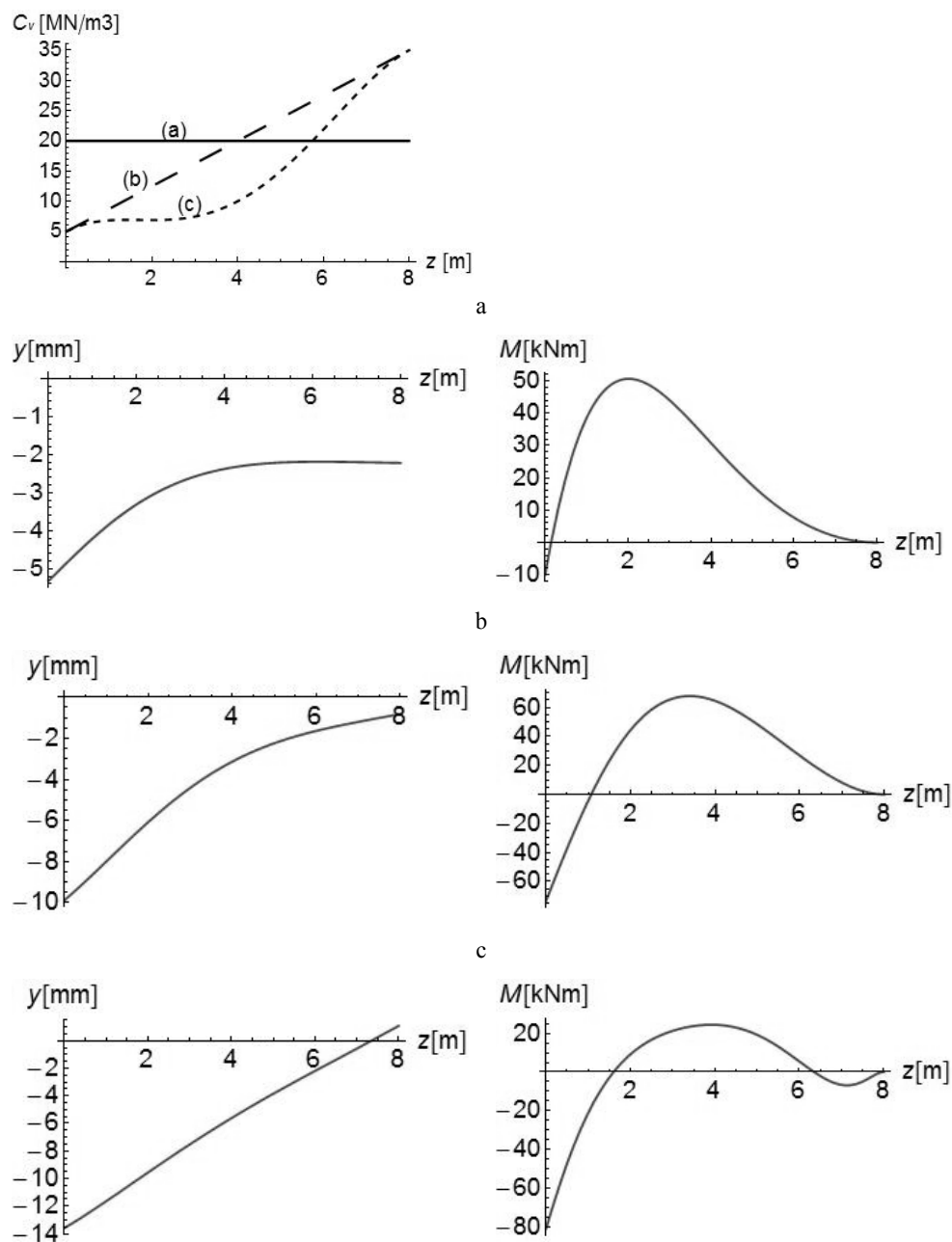
Wnioski z przykładu 3

- 1) Jeśli chodzi o przemieszczenia ściany, to różnice między modelami b i a są większe niż między modelami b i c, a dla momentów zginających jest przeciwnie; przyjmowanie stałej wartości współczynnika podłoża w strefie przypowierzchniowej w kierunku poziomym może prowadzić do znacznego niedoszacowania przemieszczeń.
- 2) Duże osłabienie podłoża w modelu c spowodowało skutki mniejsze niż oczekiwano.
- 3) Należy odnotować stosunkowo małe momenty zginające w zagłębionej części ściany.

Tabela 4. Rozwiązania dla pionowej ściany hybrydowej (odkształcalna pozioma płyta stabilizująca); przeanalizowano trzy różne modele zmienności – $C_v = C_v(z)$

Table 4. Results obtained for a vertical hybrid wall (stabilized by a deformable horizontal platform); three various stiffness's models – $C_v = C_v(z)$ are used

Parametr Parameter	a	b	c
q_{Jv} [kPa]	48	48	48
H_J [kN]	74	74	74
M_J [kNm]	113	113	113
M_{Jv} [kNm]	-10	-73	-81
M_{Jh} [kNm]	123	186	194
φ_J [$\text{mm}\cdot\text{m}^{-1}$]	1,14	1,73	1,81
$y_{vH}(0)$ [mm]	-3,1	-5,9	-7,4
$y_{vM}(0)$ [mm]	0,2	2,0	1,9
y_{Jvq} [mm]	-2,4	-6,0	-8,2
$y_{o\varphi}$ [mm]	-4,6	-6,9	-7,2
y_{ow} [mm]	-2,4	-2,4	-2,4
$y_o = \Sigma y$ [mm]	-12,3	-19,2	-23,3
z_e [m]	2,0	3,4	3,9
$M_{v,\max}$ [kNm]	51	68	25
z_o [m]	3,9	5,4	5,2



Rys. 4. Rozpatrywane współczynniki winklerowskie – C_v [MN·m⁻³] jako funkcje głębokości z (obrócone osie) oraz przykładowe rozwiązania dla $0 \leq z \leq 8$ – kolejno a, b i c

Fig. 4. Analyzed Winkler subsoil coefficients – C_v [MN·m⁻³] versus the depth z (rotated axes) and selected solutions for $0 \leq z \leq 8$ – respectively a, b and c

PODSUMOWANIE I WNIOSKI

1. Model Winklera jest od prawie 100 lat powszechnie krytykowany, a mimo to jest powszechnie stosowany. Użytkownicy wielu komercyjnych programów komputerowych nie zawsze mają świadomości, że projektują według modelu Winklera. Nie ma doniesień, żeby prowadziło to do niebezpiecznych sytuacji czy awarii budowlanych.
2. W pracy zaprezentowano proste rozwiązania analityczne dla hybrydowych konstrukcji zagłębionych w podłożu, które mogą posłużyć do wstępnych obliczeń studialnych na etapie kształtowania i optymalizacji konstrukcji.
3. Maksymalne przemieszczenia ścian wspornikowych zależą nie tyle od przemieszczeń w poziomie dna wykopu, co od obrotu w tym miejscu, podobnie jest dla wysokich rusztów palowych. Wiąże się z tym konieczność ostrożnego modelowania sztywności warstw przypowierzchniowych, która powinna być mała. W zakresie stanów granicznych użyteczności duży wpływ kąta obrotu nie znalazł należytego odzwierciedlenia w nieobowiązującej już normie palowej PN-B-02482:1983.
4. Stabilizująca pozioma płyta powinna być sztywniejsza od ściany oraz niezbyt długa i wtedy dodatkowe podparcie palami znacznie poprawia jej skuteczność.
5. Właściwy dobór wartości parametrów sztywności podłoża winklerowskiego stanowi niewątpliwie problem, ale to samo można powiedzieć o wielu modelach podłoża, szczególnie złożonych modelach konstytutywnych. Zebrane doświadczenia, wytyczne i literatura na ten temat są już obszerne i mogą być pomocne w rozwiązywaniu praktycznych przypadków.
6. Otrzymane w przykładach wartości sił wewnętrznych są stosunkowo małe, ponieważ przyjęte parametry odpowiadają dobremu gruntem (piaskom drobnym/średnim), nie ma piętrenia wody gruntowej, a wykop nie jest bardzo głęboki. Ogólne wnioski dotyczące wrażliwości modelu na poszczególne parametry są jednak generalnie słuszne również w mniej korzystnych sytuacjach obliczeniowych.

7. Zaprezentowana metoda daje się uogólnić na przypadek ścian kotwionych lub rozpieranych – poprzez wprowadzenie poziomych podpór sprężystych i modyfikację rozwiązania belki powyżej dna wykopu. Jeśli natomiast siły w kotwach/rozporach przyjąć jako znane (stałe), to wystarczy dokonać prostej redukcji obciążeń H_J oraz M_J , a współczynnik K_a zastąpić współczynnikiem K_0 lub pośrednim.

PIŚMIENNICTWO

- Balay, J. (1984). *Recommandations pour le choix des paramètres de calcul des écrans de soutènement par la méthode aux modules de réaction*. Note d'information technique du LCPC 1984-7. Paris.
- Basu, D., Salgado, R. i Prezzi, M. (2008). *Analysis of laterally loaded piles in multilayered soil deposits*. Joint Transportation Research Program Report FHWA/IN/JTRP-2007/23. West Lafayette (Indiana), USA: Purdue University.
- Dembicki, E. i Tejchman, A. (1974). *Wybrane zagadnienia fundamentowania budowli hydrotechnicznych*. Warszawa–Poznań: PWN.
- Dodds, A. M. i Martin, G. R. (2007). *Modeling pile behavior in large pile groups under lateral loading*. Technical Report MCEER-07-0004, Task Number 094-C-2.3, FHWA Contract Number DTFH61-98-C-00094. New York: SUNY at Buffalo.
- Dutta, S. C. i Roy R. (2002). A critical review on idealization and modeling for interaction among soil–foundation–structure system. *Computers and Structures*, 80(20–21), 1579–1594.
- Gibson, R. E. (1967). Some results concerning the displacements and stresses in a non-homogeneous elastic half-space. *Géotechnique*, 17(1), 58–67.
- Gwizdała, K. (2010). *Fundamenty palowe. Technologie i obliczenia*. Tom 1. Warszawa: PWN.
- Jamiolkowski, M. i Garassino, A. (1977). Soil modulus for laterally loaded piles. *Proceedings of IX ICSMFE, Specialty Session 10* (strony 43–58). Tokyo.
- Henry, F. D. C. (Ed.) (1986). *The design and construction of engineering foundations*. New York: Chapman and Hall.
- Kosecki, M. (2006). *Statyka urządzeń palowych*. Szczecin: PZiTB.
- Obrzud, R. i Truty, A. (2014). *The hardening soil model – A practical guidebook*. Z_Soil.PC 100701 report (rev. 30.09.2014).

- PN-B-02482:1983. Fundamenty budowlane. Nośność pali i fundamentów palowych.
- PN-B-03010:1983. Ściany oporowe. Obliczenia statyczne i projektowanie.
- PN-EN 1997-1:2008. Eurokod 7. Projektowanie geotechniczne. Część 1: Zasady ogólne.
- Powrie, W. i Chandler, R. J. (1998). The influence of a stabilizing platform on the performance of an embedded retaining wall; a finite element study. *Geotechnique*, 48(3), 403–409.
- Pun, W. K. i Pang, P. L. R. (1992). *Horizontal subgrade reaction for cantilevered retaining wall analysis*. Geotechnical Engineering Office, Civil Engineering Department, The Government of the Hong Kong Special Administrative Region, Geo Special Project Report No SPR 10/92. Hong Kong.
- Sadrekarimi, J. i Akbarzad, M. (2009). Comparative study of methods of determination of coefficient of subgrade reaction. *Electronic Journal of Geotechnical Engineering*, 14 (E).
- Siemińska-Lewandowska, A. (2011). *Głębokie wykopy. Projektowanie i wykonawstwo*. Warszawa: WKŁ.
- Trojnar, K. (2013). Lateral stiffness of hybrid foundations – field investigations and 3D FEM analysis. *Geotechnique*, 63(5), 341–353.
- Versteijlen, W. G., Metrikine, A. V. i van Dalen, K. N. (2016). A method for identification of an effective Winkler foundation for large diameter offshore wind turbine support structures based on in-situ measured small-strain soil response and 3D modelling. *Engineering Structures*, 124, 221–236.

APPLICATION OF THE WINKLER MODEL TO THE CALCULATION OF A HYBRID RETAINING CONSTRUCTION

ABSTRACT

The paper deals with an estimation of displacements and internal forces in slurry walls, as well as sheet-pile walls, piling systems or single piles, by solving two Euler–Bernoulli beams resting on the standard Winkler subsoil. The term “hybrid construction” refers to a vertical beam which is strengthened by a horizontal cantilever platform, resting also on the Winkler subsoil. A rigid joint between the two beams is assumed to calculate a split of the bending moment to both bearing members. Analytical solutions are presented – for various subsoil coefficients. Substantial reduction of both the wall deflection and internal forces yields from numerical examples.

Key words: slender retaining wall, elastic subsoil, beam element, subsoil coefficient