SCIENTIARUM POLONORUM ACTA
acta_architectura.sggw.pl

Acta Sci. Pol. Architectura 16 (2) 2017, 3–12

ISSN 1644-0633 DOI: 10.22630/ASPA.2017.16.2.01

ARTYKUŁ NAUKOWY

Otrzymano: 31.01.2017
Zaakceptowano: 12.04.2017

LINIOWY MODEL OPTYMALIZACJI CZASOWO-KOSZTOWEJ PLANOWANIA REALIZACJI INWESTYCJI WIELOOBIEKTOWYCH

Elżbieta Radziszewska-Zielina✉, Bartłomiej Sroka

Wydział Inżynierii Lądowej, Politechnika Krakowska, Kraków

STRESZCZENIE

Celem pracy było stworzenie modelu optymalizacji czasowo-kosztowej, przydatnego w planowaniu realizacji inwestycji wieloobiektowych. W modelu uwzględniono koszty bezpośrednie wykonania prac, koszty pośrednie, koszty przestojów brygad roboczych, kary za niedotrzymanie terminów dyrektywnych poszczególnych obiektów. W celu minimalizacji kosztów zastosowano programowanie liniowe. Weryfikacja działania opracowanego modelu została przeprowadzona z wykorzystaniem stworzonego oprogramowania na przykładzie obliczeniowym dla inwestycji wieloobiektowej. Model w przyszłości można rozszerzyć o optymalizację kolejności wykonywanych obiektów.

Słowa kluczowe: model liniowy, optymalizacja czasowo-kosztowa, inwestycje wieloobiektowe

WSTĘP

Poprzez inwestycję wieloobiektową należy rozumieć taką inwestycję, podczas trwania której będą realizowane prace jednorodne o różnych przedmiarach na co najmniej dwóch obiektach (działkach roboczych). Ze względu na rozmiar inwestycji wieloobiektowych wiąże się ona bardzo często z wysokimi kosztami (Radziszewska-Zielina i Sroka, 2016).

Najpopularniejszą i najprostszą metodą, w której modeluje się koszty bezpośrednie i pośrednie, jest metoda CPM-COST (Ignasiak, 2001). Modele te mają postać funkcji liniowych. Powstało wiele modyfikacji tej metody, uwzględniających np. niedeterministyczny charakter danych (Feng, Liu i Burns, 2000; Haque i Hasin, 2012) lub heurystyczne metody poszukiwania rozwiązania optymalnego, w przypadku gdy funkcje kosztów są określone w sposób dyskretny (Parveen i Saha, 2012).

Istnieje wiele metod planowania realizacji inwestycji wieloobiektowych, np. Line of Balance (LOB), Horizontal and Vertical Logic Scheduling for Multistory Projects (HVLS), Repetitive Scheduling Method (RSM). Opracowano też liczne publikacje na temat metod planowania realizacji inwestycji wieloobiektowych w ujęciu czasowo-kosztowym. I tak w publikacji Marcinkowskiego (2002) uwzględniono koszty niedotrzymania terminów dyrektywnych poszczególnych obiektów oraz koszty nieciągłości w pracy brygad roboczych przy realizacji inwestycji wieloobiektowej. W opracowaniu Jaśkowskiego (2015) został przedstawiony model programowania mieszanego (liniowego oraz całkowitoliczbowego), uwzględniający analizę kosztów inwestycji wieloobiektowej. W modelu tym dopuszcza się możliwość wyboru różnych wariantów realizacji poszczególnych prac różniących się czasem i kosztem przy założeniu ciągłości pracy brygad. W pracy Rogalskiej, Bożejko i Hejduckiego (2008) została przedstawiona metoda analizy czasowo-kosztowej z wykorzystaniem Hybrid Evolutionary

✉eradzisz@izwbit.pk.edu.pl

Algorithm (HEA) w planowaniu inwestycji wieloobiektowej. Z kolei Podolski (2016) wykorzystał algorytm symulowanego wyżarzania przy wyborze podwykonawców realizacji inwestycji wieloobiektowej, biorąc pod uwagę kryteria czasowo-kosztowe.

W dostępnych publikacjach brak jest jednak modelu uwzględniającego jednocześnie koszty bezpośrednie wykonania prac, koszty pośrednie, koszty niedotrzymania terminów dyrektywnych obiektów oraz koszty dodatkowe związane z przestojem brygad roboczych przy planowaniu realizacji inwestycji wieloobiektowych.

Zazwyczaj inwestor nakłada na generalnego wykonawcę ograniczenia czasowe oraz ustala budżet w postaci ceny zryczałtowanej za zrealizowanie inwestycji. Generalny wykonawca stara się dotrzymać narzuconych terminów oraz ograniczać koszty, tak aby jego zyski były jak największe. Proponowane podejście optymalizacyjne (czasowo-kosztowe) do planowania realizacji inwestycji wieloobiektowych jest więc uzasadnione z punktu widzenia maksymalizacji zysków, jakie może osiągnąć generalny wykonawca. Celem niniejszego artykułu jest przedstawienie propozycji modelu optymalizacji czasowo-kosztowej, przydatnego w planowaniu inwestycji wieloobiektowych. W opisie zagadnienia pominięto metodykę wyznaczania kosztów bezpośrednich i pośrednich budowy oraz optymalizowanie kolejności wykonania obiektów przedsięwzięcia wieloobiektowego. Wysokość kosztów bezpośrednich, pośrednich oraz kolejność wykonania obiektów jest przyjmowana *a priori*.

OPTYMALIZACYJNY MODEL CZASOWO-KOSZTOWY

Przez Z_j, gdzie $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, oznaczono zbiór zadań do wykonania na każdym obiekcie. Każde zadanie jest wykonywane przez brygadę B_j. Przez O_i, gdzie $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, oznaczono zbiór obiektów do zrealizowania. Niech $P_{i,j}$ oznacza pracę j-tej brygady nad j-tym zadaniem na i-tym obiekcie. Dodatkowo obowiązują następujące ograniczenia:

- kolejność prac na obiekcie wykonywana jest w porządku technologicznym określonym przez zbiór Z,
- zadanie o numerze j-tym może być wykonywana tylko przez j-tą brygadę,
- brygada wykonuje w jednym momencie tylko jedną pracę,
- praca $P_{i,j}$ ma charakter ciągły.

Problem znalezienia minimum kosztów można przedstawić w postaci modelu programowania liniowego:

- dane: $tn_{i,j}$, $tgr_{i,j}$, $kn_{i,j}$, $kgr_{i,j}$, k_{pos}, kp_i, Td_i, kc_j,

$$K \to \min: K = K_{bez} + K_{pos} + K_p + K_c \tag{1}$$

$$K_{bez} = \sum_i \sum_j k_{bez(i,j)}(t_{i,j}) \tag{2}$$

$$K_{pos} = Tf_{n,m} k_{pos} \tag{3}$$

$$K_p = \sum_i p_i kp_i \tag{4}$$

$$K_c = \sum_j (Tf_{n,j} - Tf_{1,j} - \sum_{i=2}^{n} t_{i,j}) kc_j \tag{5}$$

- zmienne decyzyjne: $t_{i,j}$, $Tf_{i,j}$,
- zmienne pomocnicze: p_i,
- ograniczenia:

$$tgr_{i,j} \le t_{i,j} \le tn_{i,j} \tag{6}$$

$$Tf_{1,1} \geq t_{1,1} \tag{7}$$

$$Tf_{i,j} \geq Tf_{i-1,j} + t_{i,j} \tag{8}$$

$$Tf_{i,j} \geq Tf_{i,j-1} + t_{i,j} \tag{9}$$

$$Tf_{i,m} - p_i \leq Td_i \tag{10}$$

$$Tf_{i,j} \geq 0 \tag{11}$$

$$t_{i,j} \geq 0 \tag{12}$$

$$p_i \geq 0 \tag{13}$$

Aby przedstawiony model mógł zostać zastosowany, należy dysponować następującymi danymi: czas normalny ($tn_{i,j}$) wykonania prac (maksymalny) oraz odpowiadające mu koszty normalne ($kn_{i,j}$), czas graniczny ($tgr_{i,j}$) wykonania prac (minimalny) oraz odpowiadające mu koszty graniczne ($kgr_{i,j}$), jednostkowe koszty pośrednie (k_{pos}), terminy dyrektywne realizacji obiektów (Td_i) oraz odpowiadające im jednostkowe koszty niedotrzymania terminów dyrektywnych poszczególnych obiektów (kp_i), jednostkowe koszty przestojów dla wszystkich brygad roboczych (kc_j).

Funkcja celu (wzór 1) jest sumą kosztów bezpośrednich (K_{bez}), kosztów pośrednich (K_{pos}), kosztów związanych z niedotrzymaniem terminów dyrektywnych poszczególnych obiektów (K_p) oraz kosztów przestojów pracy brygad roboczych (K_c). Koszt ten należy zminimalizować. Koszty bezpośrednie (wzór 2) są sumą kosztów wszystkich prac wykonywanych przez wszystkie brygady na wszystkich działkach w zależności od czasu trwania danej pracy. Funkcja kosztów prac w zależności od czasu trwania tej czynności ($K_{bez(i,j)}(t_{i,j})$) jest malejącą funkcją liniową. W rzeczywistości zależność kosztów bezpośrednich od czasu jest zależnością dyskretną ustaloną na podstawie negocjacji podwykonawcy z generalnym wykonawcą. Zależność liniowa pomiędzy czasem wykonania pracy oraz jej kosztem jest dość dobrym przybliżeniem i upraszcza zdecydowanie obliczenia. Wzór funkcji liniowej kosztu bezpośredniego wykonania danej pracy do czasu jej trwania można wyznaczyć ze wzoru (14), natomiast wartość współczynnika kierunkowego i wyrazu wolnego – ze wzorów (15) oraz (16):

$$k_{bez(i,j)}(t_{i,j}) = a_{i,j} t_{i,j} + b_{i,j} \tag{14}$$

$$a_{i,j} = \frac{kgr_{i,j} - kn_{i,j}}{tgr_{i,j} - tn_{i,j}} \tag{15}$$

$$b_{i,j} = kgr_{i,j} - a_{i,j} tgr_{i,j} \tag{16}$$

Koszty pośrednie (wzór 3) zależą od wysokości kosztów pośrednich jednostkowych oraz czasu trwania całej inwestycji wieloobiektowej. Koszty związane z niedotrzymaniem terminów dyrektywnych (wzór 4) wyznaczane są jako suma iloczynów kosztu jednostkowego za niedotrzymanie terminu oraz czasu trwania tego opóźnienia dla wszystkich obiektów. Koszt jednostkowy za niedotrzymanie terminu dyrektywnego może być różny dla każdego z obiektów. Kary są określone w umowie pomiędzy inwestorem a generalnym wykonawcą i wynoszą zwykle od 0,05 do 0,2% wartości kontraktu brutto za każdy dzień zwłoki. Koszty przestojów pracy brygad roboczych (wzór 5) obliczane są jako suma iloczynów kosztu jednostkowego za przestój w pracy brygad oraz czasu trwania przestoju dla wszystkich brygad roboczych. Czas trwania przestoju obliczany jest na podstawie terminu zakończenia pracy brygady na wszystkich obiektach, terminu zakończenia pracy na pierwszym obiekcie oraz czasu trwania pracy brygady na pozostałych obiektach.

Zmiennymi decyzyjnymi w modelu są: $t_{i,j}$ – czas trwania pracy na *i*-tym obiekcie wykonywanej przez *j*-tą brygadę; $Tf_{i,j}$ – czas zakończenia pracy wykonywanej przez *j*-tą brygadę na *i*-tym obiekcie.

Zmienna pomocnicza p_i pozwala określić czas przekroczenia terminu dyrektywnego dla poszczególnych obiektów. Z punktu widzenia programowania liniowego jest to zmienna decyzyjna, jednak z punktu widzenia specyfiki problemu zmienna p_i jest pochodną czasu zakończenia pracy na *i*-tym obiekcie oraz terminu dyrektywnego dla *i*-tego obiektu (ograniczenie 10).

W modelu uwzględniono następujące ograniczenia. Wzór (6) ogranicza czas trwania czynności do przedziału pomiędzy czasem granicznym (minimalnym) oraz normalnym (maksymalnym). Wzory (7), (8) i (9) określają strukturę i założenia, które muszą być spełnione w modelu CPM. Termin zakończenia pracy na pierwszym obiekcie przez pierwszą brygadę musi być dłuższy niż czas trwania tej pracy (wzór 7). Termin zakończenia pracy *j*-tej brygady na *i*-tym obiekcie musi być dłuższy niż termin zakończenia pracy tej samej brygady na obiekcie poprzednim wydłużony o czas trwania pracy brygady na obiekcie *i*-tym (wzór 8). Termin zakończenia pracy *j*-tej brygady na *i*-tym obiekcie musi być dłuższy niż termin zakończenia pracy poprzedniej brygady na tym samym obiekcie wydłużony o czas trwania pracy na tym obiekcie przez *j*-tą brygadę (wzór 9). Warunek (10) pozwala wyznaczyć wartość zmiennej pomocniczej p_i, która określa czas przekroczenia terminów dyrektywnych. Gdy termin dyrektywny *i*-tego obiektu zostanie dotrzymany, to zmienna p_i przyjmuje wartość 0 (brak wpływu na funkcję celu), natomiast gdy termin dyrektywny zostanie przekroczony, to zmienna p_i przyjmie wartość tego opóźnienia, zwiększając wartość funkcji celu. Warunki (11), (12) oraz (13) ograniczają wartości czasu trwania prac, terminów zakończenia prac oraz wartość niedotrzymania terminów dyrektywnych do liczb nieujemnych.

Zarówno funkcja celu, jak i wszystkie ograniczenia mają charakter liniowy, jest to więc model programowania liniowego. Dany problem został zaimplementowany w języku programowania Python z wykorzystaniem pakietów *scipy* (do obliczeń naukowych), *numpy* (do obliczeń macierzowych). Do wyznaczenia rozwiązania optymalnego została użyta funkcja scipy.optimize.linprog, wykorzystująca algorytm Simplex. Program jest dostępny u autorów.

PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

Praktyczne zastosowanie modelu przedstawiono na przykładzie inwestycji wieloobiektowej składającej się z 12 obiektów *Oi*. Na każdym obiekcie należy wykonać 7 różnych prac, do których przypisano odrębne brygady (*Bj*): roboty ziemne, roboty fundamentowe, wykonanie konstrukcji (bez dachu), wykonanie dachu, montaż stolarki, wykonanie instalacji, roboty wykończeniowe. Koszty pośrednie wynoszą 1900 zł·dzień$^{-1}$. Wszystkie potrzebne dane zostały przedstawione w tabelach 1–6.

Zastosowanie proponowanego modelu dla danych z tabel 1–6 prowadzi do rozwiązania optymalnego przedstawionego w tabelach 7–11. Jako rozwiązanie należy rozumieć terminy zakończenia każdej pracy $Tf_{i,j}$, czas trwania każdej pracy t_{ij} oraz wszystkie wartości pochodne (terminy rozpoczęcia, niedotrzymanie terminów dyrektywnych, nieciągłość pracy brygad, całkowity koszt inwestycji). Całkowity koszt inwestycji wyniósł 6983,65 tys. zł. Dla obiektów O6, O8 oraz O11 nie zostały dotrzymane terminy dyrektywne, co skutkowało dodatkowymi karami w wysokości 63,3 tys. zł. Praca brygad B4, B5, B6 i B7 charakteryzuje się dużą nieciągłością (łącznie 1185 dni, co skutkuje 467,7 tys. zł kary). Jednak ze względu na dysproporcję w jednostkowych karach za niedotrzymanie terminów dyrektywnych oraz nieciągłość pracy bardziej opłacalne jest dotrzymywanie terminów niż zapewnienie ciągłości pracy.

Tabela 1. Czas normalny, *tn* [dni], trwania pracy na obiekcie *Oi* przez brygadę *Bj* (B1 – roboty ziemne; B2 – roboty fundamentowe; B3 – wykonanie konstrukcji (bez dachu); B4 – wykonanie dachu; B5 – montaż stolarki; B6 – wykonanie instalacji; B7 – roboty wykończeniowe)

Table 1. Normal times of work, *tn* [days], performance at object *Oi* for brigade *Bj* (B1 – earthworks; B2 – foundation works; B3 – construction works (without a roof); B4 – roof construction; B5 – door and window frames installation; B6 – installation works B7 – finishing work)

Obiekt Object	Brygada – Brigade						
	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7
O1	9	15	58	20	11	14	28
O2	8	15	51	20	10	12	27
O3	9	20	54	17	10	12	33
O4	10	20	54	19	10	12	32
O5	8	16	57	18	10	13	35
O6	10	14	52	18	12	11	32
O7	8	21	54	18	11	10	25
O8	7	19	50	20	10	14	33
O9	7	14	59	17	10	13	32
O10	7	14	56	17	10	11	27
O11	10	15	54	18	11	12	30
O12	9	16	50	19	11	14	27

Tabela 2. Czas graniczny, *tgr* [dni], trwania pracy na obiekcie *Oi* przez brygadę *Bj* (symbole B1–B7 jak w tab. 1)

Table 2. Crash times of work performance, *tgr* [days], at object *Oi* for brigade *Bj* (symbols B1–B7 as given in the Table 1)

Obiekt Object	Brygada – Brigade						
	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7
O1	8	11	51	17	9	9	19
O2	6	8	46	16	9	9	18
O3	8	16	48	15	9	7	24
O4	9	14	45	15	8	9	25
O5	7	13	50	15	9	9	27
O6	7	10	45	14	10	6	26
O7	7	17	48	15	9	7	17
O8	6	16	41	18	9	9	28
O9	4	11	51	15	9	8	25
O10	6	8	46	15	8	9	19
O11	7	9	47	14	9	10	25
O12	6	11	41	17	9	10	18

Tabela 3. Terminy dyrektywne, *td* [dni], oraz koszty jednostkowe ich niedotrzymania, *kp* [tys. zł·dzień$^{-1}$], dla każdego z obiektów *Oi*

Table 3. Directive deadlines, *td* [days], and unit costs of their missing, *kp* [thous. PLN·day^{-1}], for each object *Oi*

Obiekt Object	Terminy dyrektywne, *td* [dni] Directive deadlines, *td* [days]	Koszty jednostkowe ich niedotrzymania, *kp* [tys. zł·dzień$^{-1}$] Unit costs of their missing, *kp* [thous. PLN·day^{-1}]
O1	160	1,9
O2	190	1,9
O3	250	2,0
O4	300	2,0
O5	360	2,1
O6	380	1,9
O7	430	2,1
O8	480	1,9
O9	530	1,8
O10	580	1,9
O11	600	2,1
O12	660	2,1

Tabela 4. Koszt normalny wykonania prac, *kn* [tys. zł], na obiekcie *Oi* przez brygadę *Bj* (symbole B1–B7 jak w tab. 1)

Table 4. Normal cost of work performance, *kn* [thous. PLN], at object *Oi* by brigade *Bj* (symbols B1–B7 as given in the Table 1)

Obiekt Object	Brygada – Brigade						
	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7
O1	10,8	44,6	141,3	53,4	24,5	46,9	54,9
O2	11,4	47,1	162,1	43,3	32,2	41,6	45,6
O3	9,4	37,9	164,5	54	35,4	39,7	57,5
O4	8,5	47,5	171,2	45,2	34,4	45,3	44,5
O5	10,2	49,7	183,4	58	32,9	34,6	45,3
O6	9,6	49	149,8	57,6	24,1	32,8	57,6
O7	11,9	37,8	189	60,9	30,1	35,2	58,8
O8	10	43,6	145,1	61,1	25,6	43,1	53,2
O9	9,2	37,1	140,8	52,6	31,1	47	45,8
O10	12	42,8	150,4	51,4	29,3	42,8	47,5
O11	8,1	47	183,8	47	35	42	49,6
O12	11,9	44,5	175,2	55,7	32	44,8	46,2

Tabela 5. Koszty graniczne wykonania prac, *kgr* [tys. zł], na obiekcie *Oi* przez brygadę *Bj* (symbole B1–B7 jak w tab. 1)

Table 5. Crash costs of work performance, *kgr* [thous. PLN], at object *Oi* by brigade *Bj* (symbols B1–B7 as given in the Table 1)

Obiekt Object	Brygada – Brigade						
	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7
O1	15	56,6	212	73,2	30,4	63,8	75,8
O2	15,8	67,8	239,9	57,2	47,7	51,2	58,8
O3	12,8	47	245,1	70,7	49,6	54,4	71,3
O4	11,1	64,1	210,6	60,6	50,9	59,8	63,6
O5	14,3	62,1	251,3	75,4	49	45,3	64,8
O6	11,6	63,2	211,2	77,8	35,7	46,2	81,2
O7	17,1	46,5	274,1	84,7	39,7	51,7	86,4
O8	12,2	60,2	213,3	82,5	31,5	62,9	65,4
O9	13	50,1	185,9	73,1	45,7	63,9	57,3
O10	18	62,1	180,5	64,8	40,4	53,1	62,2
O11	10,2	70,5	226,1	63	51,5	62,2	64,5
O12	14,9	65	217,2	73,5	45,8	58,2	65,1

Tabela 6. Jednostkowe koszty przestoju brygad roboczych, *kc* [tys. zł·dzień$^{-1}$] dla każdej z brygad *Bj* (symbole B1–B7 jak w tab. 1)

Table 6. Unit costs of downtime of work brigades, *kc* [thous. PLN·day^{-1}] for each brigade *Bj* (symbols B1–B7 as given in the Table 1)

Brygada Brigade	Jednostkowe koszty przestoju brygad roboczych, *kc* [tys. zł·dzień$^{-1}$] Unit costs of downtime of work brigades, *kc* [thous. PLN·day^{-1}]
B1	0,6
B2	0,8
B3	1,5
B4	0,5
B5	0,2
B6	0,3
B7	0,7

Tabela 7. Czas trwania pracy, $t_{i,j}$ [dni], na obiekcie *Oi* przez brygadę *Bj* (symbole B1–B7 jak w tab. 1)

Table 7. Working times, $t_{i,j}$ [days], at object *Oi* for brigade *Bj* (symbols B1–B7 as given in the Table 1)

Obiekt Object	Brygada – Brigade						
	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7
O1	8	11	51	20	11	14	28
O2	8	15	51	17	10	12	27
O3	9	20	51	17	10	12	33
O4	10	20	45	19	10	12	32
O5	8	16	50	18	10	13	35
O6	10	14	45	18	12	11	32
O7	8	21	54	18	11	10	25
O8	7	19	41	20	10	14	33
O9	7	14	51	17	10	13	32
O10	7	14	46	17	10	11	27
O11	10	15	47	18	11	12	30
O12	9	16	50	19	11	11	18

Tabela 8. Terminy zakończenia prac, $Tf_{i,j}$ [dni], na obiekcie *Oi* przez brygadę *Bj* (symbole B1–B7 jak w tab. 1)

Table 8. Deadlines for work, $Tf_{i,j}$ [days], performed at object *Oi* by brigade *Bj* (symbols B1–B7 as given in the Table 1)

Obiekt Object	Brygada – Brigade						
	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7
O1	8	19	70	127	138	152	180
O2	16	34	121	161	171	183	210
O3	25	54	172	189	199	211	244
O4	35	74	217	246	256	268	300
O5	43	90	267	295	305	318	353
O6	53	104	312	330	342	353	385
O7	61	125	366	384	395	405	430
O8	68	144	407	427	437	451	484
O9	75	158	458	475	485	498	530
O10	82	172	504	532	542	553	580
O11	92	187	551	569	580	592	622
O12	101	203	601	620	631	642	660

Tabela 9. Terminy rozpoczęcia prac, $Tf_{i,j}$-$t_{i,j}$ [dni], na obiekcie *Oi* przez brygadę *Bj* (symbole B1–B7 jak w tab. 1)

Table 9. Starting dates of work, $Tf_{i,j}$-$t_{i,j}$ [days], performed at object *Oi* by brigade *Bj* (symbols B1–B7 as given in the Table 1)

Obiekt Object	Brygada – Brigade						
	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7
O1	0	8	19	107	127	138	152
O2	8	19	70	144	161	171	183
O3	16	34	121	172	189	199	211
O4	25	54	172	227	246	256	268
O5	35	74	217	277	295	305	318
O6	43	90	267	312	330	342	353
O7	53	104	312	366	384	395	405
O8	61	125	366	407	427	437	451
O9	68	144	407	458	475	485	498
O10	75	158	458	515	532	542	553
O11	82	172	504	551	569	580	592
O12	92	187	551	601	620	631	642

Tabela 10. Niedotrzymanie terminów dyrektywnych, p_i [dni], na obiekcie *Oi*

Table 10. Missing the directive deadlines, p_i [days], at object *Oi*

Obiekt Object	Niedotrzymanie terminów dyrektywnych, p_i [dni] Missing the directive deadlines, p_i [days]
O1	0
O2	0
O3	0
O4	0
O5	0
O6	5
O7	0
O8	4
O9	0
O10	0
O11	22
O12	0

Tabela 11. Nieciągłość pracy [dni] brygad *Bj* (symbole B1–B7 jak w tab. 1)

Table 11. Discontinuity of the work [days] of brigades *Bj* (symbols B1–B7 as given in the Table 1)

Brygada Brigade	Nieciągłość pracy brygad [dni] Discontinuity of the work of brigades [days]
B1	0
B2	0
B3	0
B4	292
B5	378
B6	359
B7	156

WNIOSKI

Opracowany liniowy model optymalizacji czasowo-kosztowej może być zastosowany do planowania inwestycji wieloobiektowych przez generalnych wykonawców przy uwzględnieniu kosztów oraz konieczności dotrzymania terminów narzuconych przez inwestora. Działanie opracowanego programu opartego na zaproponowanym modelu zaprezentowano na przykładzie obliczeniowym. Model ten może być zastosowany w systemach komputerowych wspomagających zarządzanie inwestycjami wieloobiektowymi. Może również posłużyć do optymalizacji kolejności wykonania obiektów przez brygady robocze i rozwiązane metodą symulacyjną (Monte Carlo) lub metaheurystykami (algorytmy genetyczne, tabu *search*, symulowane wyżarzanie). W modelu nie uwzględniono wszystkich ograniczeń i zależności. Trwają prace nad jego rozszerzeniem o możliwość wykonywania jednocześnie różnych prac na jednym obiekcie, wykonywania jednocześnie tej samej pracy na różnych obiektach, sprzężenia czasowe pomiędzy pracami, uwzględnienie nagród dla generalnego wykonawcy za dotrzymanie terminów dyrektywnych oraz inne.

PIŚMIENNICTWO

Feng, C.-W., Liu, L. i Burns, S. (2000). Stochastic Construction Time-Cost Trade-Off Analysis. *Journal of Computing in Civil Engineering, 14(2)*, 117–126. doi: 10.1061/(ASCE)0887-3801(2000)14:2(117).

Haque, A. i Hasin, A. (2012). Genetic algorithm for project time-cost optimization in fuzzy environment. *Journal of Industrial Engineering and Management, 5(2)*, 364–381. doi: 10.3926/jiem.410.

Ignasiak, E. (2001). *Badania operacyjne.* Warszawa: Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne.

Jaśkowski, P. (2015). Repetitive construction processes scheduling using mixed-integer linear programming. *Budownictwo i Architektura, 14(2)*, 55–61.

Marcinkowski, R. (2002). *Metody rozdziału zasobów realizatora w działalności inżynieryjno-budowlanej.* Warszawa: Wojskowa Akademia Techniczna.

Parveen, S. i Saha, S. (2012). GA Based Multi-Objective Time-Cost Optimization in a Project with Resources Consideration. *International Journal of Modern Engineering Research, 2(6)*, 4352–4359. doi: 10.1.1.417.1784.

Podolski, M. (2016). Scheduling of Job Resources in Multiunit Projects with the Use of Time/Cost Criteria. *Archives of Civil Engineering, 62*(1), 143–158.

Radziszewska-Zielina, E. i Sroka, B. (2016). Problems Encountered During the Carrying out of Multiple-Building Construction Projects. *Cost Estimating and Management of Construction Projects, Proceedings of scientific papers*. (strony 119–126). EuroScientia, Brussels.

Rogalska, M., Bożejko, W. i Hejducki, Z. (2008). Time/cost optimization using hybrid evolutionary algorithm in construction project scheduling. *Automation in Construction, 18(1)*, 24–31.

THE LINEAR MODEL OF TIME-COST OPTIMIZATION OF PLANNING OF MULTIPLE BUILDING CONSTRUCTION PROJECTS

ABSTRACT

The aim of the paper was to create a model of time-cost optimization that would be useful in the planning of realization of multiple building construction projects. The model includes the direct costs of task execution, indirect costs, the downtime of work brigades, penalties for missing the directive deadlines of individual objects. In order to minimize costs, linear programming was applied. Verification of the operation of the model was conducted with the use of the specially designed software and illustrated by an example of calculation for a multiple building construction project. In future the model can be extended by the optimization of the order of realised objects.

Key words: linear model, time-cost optimization, multiple building construction projects