

## MODELOWANIE TOLERANCYJNE PRZEWODZENIA CIEPŁA W MATERIAŁACH PERIODYCZNIE NIEJEDNORODNYCH

Tomasz Jurczak

Harsco Infrastructure Sp. z o.o., Łubna

**Streszczenie.** Praca dotyczy modelowania przepływu ciepła w wybranych materiałach periodycznie niejednorodnych. Zastosowano technikę uśredniania tolerancyjnego do skonstruowania modelu uśrednionego przewodnictwa cieplnego dla materiałów periodycznie warstwowych. Otrzymano układ równań, który będzie prostszy do rozwiązania niż klasyczny układ równań Fouriera. Ponadto przedstawiono rozwiązania analityczne wybranych zagadnień początkowo-brzegowych oraz zweryfikowano je doświadczalnie.

**Słowa kluczowe:** przewodnictwo cieplne, przewodniki niejednorodne, homogenizacja

### WSTĘP

Zjawisko przewodzenia ciepła w materiałach budowlanych opisać można klasycznym równaniem Fouriera. Dla materiałów niejednorodnych jest to równanie różniczkowe drugiego rzędu o zmiennych współczynnikach. Natomiast w przypadku materiałów periodycznych równanie Fouriera zawiera współczynniki nieciągłe, przyjmujące różne wartości na małych przedziałach określoności zmiennych przestrzennych. Funkcje materiałowe są w takim przypadku nieciągłymi funkcjami „lokalnie” periodycznymi, o bardzo małym okresie. Taki stan rzeczy poważnie utrudnia, często wręcz uniemożliwia, stosowanie metod analitycznych i komputerowych do rozwiązania zagadnień początkowo-brzegowych przewodnictwa cieplnego.

Ponieważ poszukiwanie rozwiązań zagadnień przewodnictwa cieplnego dla materiałów lokalnie periodycznie niejednorodnych jest skomplikowane, więc uzasadnione jest konstruowanie modeli prostszych, opisujących analizowane zjawisko z pewnym akceptowalnym przybliżeniem. W niniejszej pracy zastosowano technikę uśredniania tolerancyjnego zaproponowaną przez Cz. Woźniaka i współpracowników [Woźniak i Wierzbicki 2000, Jurczak i Nagórko 2007] do zbudowania modelu dla wybranych materiałów perio-

dycznych i lokalnie periodycznych. W modelu skonstruowanym na podstawie tej techniki wystąpią nowe uśrednione współczynniki przewodzenia ciepła oraz ciepła właściwego, a układ równań będzie prostszy do rozwiązania niż klasyczny układ równań Fouriera dla takich materiałów. Niniejszy artykuł został opracowany na podstawie rozprawy doktorskiej Jurczaka [2011].

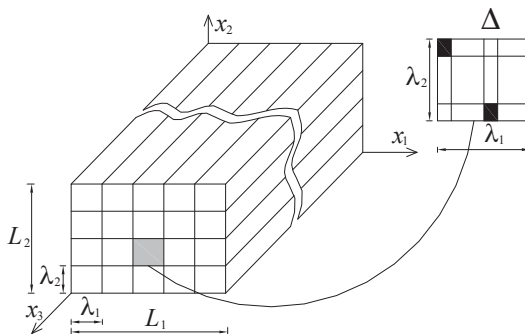
## PRZEWODNICTWO CIEPLNE W MATERIAŁACH PERIODYCZNE NIEJEDNORODNYCH

W pracy będziemy się zajmować przewodnikami niejednorodnymi, dla których konfigurację odniesienia przyjmiemy w postaci:  $\Omega = (0, L_1) \times (0, L_2) \times (0, L_3)$ .

Założmy, że konfigurację odniesienia można podzielić na części  $\Omega_s$ ,  $s = 1, 2, \dots, n_0$ . Ponadto niech istnieją wektory niezerowe i liniowo niezależne  $d^n$  z przestrzeni  $R^3$ :  $d^n = [d_1^n, d_2^n, d_3^n]$ , gdzie  $n = 1$  lub  $n = 1, 2$  lub  $n = 1, 2, 3$ , takie że każda część  $\Omega_s$  jest obrazem przekształcenia translacyjnego pewnego obszaru  $\Delta$  w przestrzeni  $R^3$  o wektor  $l_n d^n$ , gdzie  $l_n$  są liczbami całkowitymi. Jeżeli dla dowolnych  $x \in \Omega$ , takich że  $x + l_n d^n \in \Omega$ , funkcje opisujące własności termiczne ciała (ciepło właściwe  $c = c(x)$  i współczynniki przewodnictwa cieplnego  $k = k(x)$ ) spełniają warunek  $f(x) = f(x + l_n d^n)$ , to takie ciało nazwiemy periodycznie niejednorodnym: w jednym kierunku – gdy  $n = 1$ , w dwu kierunkach – gdy  $n = 1, 2$ , w trzech kierunkach – gdy  $n = 1, 2, 3$ .

Wektory  $d^n$  definiują w  $R^3$  zbiory  $\Delta \equiv \left\{ x \in R^3: x = \eta_n d^n, \eta_n \in \left( -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\}$ , zwane komórkami periodyczności. W przypadku gdy  $n = 1$ , zbiór ten jest odcinkiem, gdy  $n = 1, 2$  – równoległobokiem, natomiast gdy  $n = 1, 2, 3$  – równoległościanem.

W dalszym ciągu założmy, że periodyczność przewodnika jest płaska, co oznacza, że niejednorodność przewodnika jest taka sama w każdym przekroju  $(0, L_1) \times (0, L_2) \times \{x_3\}$ ,  $x_3 \in (0, L_3)$ . Założmy ponadto, że komórka periodyczności  $\Delta$  jest prostokątem wydzielonym prostymi o równaniach:  $x_1 = n\lambda_1$ ,  $x_2 = m\lambda_2$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots, n_1$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots, n_2$ . W ten sposób obszar  $\Pi = (0, L_1) \times (0, L_2)$  podzielimy na  $n_1 \cdot n_2$  prostokątów o wymiarach boków  $\lambda_1, \lambda_2$  (rys. 1).

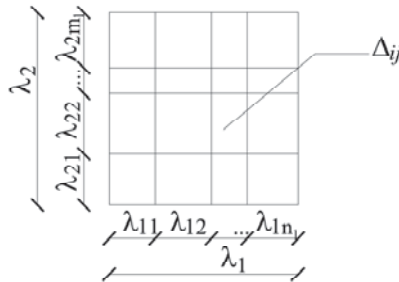


Rys. 1. Ośrodek periodyczny

Fig. 1. A periodic medium

Niech ponadto komórka periodyczności  $\Delta = (0, \lambda_1) \times (0, \lambda_2)$  daje się podzielić na prostokąty o bokach równoległych do osi współrzędnych, których długości wynoszą odpowiednio  $\lambda_{1i}, \lambda_{2j}, i = 1, 2, 3, \dots, n_o, j = 1, 2, 3, \dots, m_o$ , tak że  $\lambda_1 = \sum_{i=1}^{n_o} \lambda_{1i}, \lambda_2 = \sum_{j=1}^{m_o} \lambda_{2j}$ . Prostokąt o wymiarach  $\lambda_{1i}, \lambda_{2j}$  oznaczmy przez  $\Delta_{ij}$ .

Załóżmy, że każdy prostokąt jest utworzony z materiału jednorodnego i izotropowego, tzn. dla każdego ciepła właściwe i składowe tensora przewodności cieplnej są stałe.



Rys. 2. Komórka periodyczności  $\Delta$   
 Fig. 2. A periodic cell  $\Delta$

Temperaturę oznaczmy przez  $\theta$ , tak że  $\theta = \theta(x, t)$ , gdzie  $x \in \Omega, t \in \langle t_0, t_1 \rangle$ .

Jeżeli przewodnik jest anizotropowy i niejednorodny, wtedy strumień ciepła  $q = q(x_1, x_2, x_3, t), (x_1, x_2, x_3) \in \Omega, t \in \langle t_0, t_1 \rangle$ , zgodnie z modelem konstytutywnym Fouriera, wyraża się wzorem:

$$q_i(x_1, x_2, x_3, t) = -k_{ij}(x_1, x_2, x_3)\theta_{,j}(x_1, x_2, x_3, t) \tag{1}$$

gdzie  $\theta_{,i}$  jest pochodną cząstkową  $\theta_{,i} = \frac{\partial \theta}{\partial x_i}, i, j = 1, 2, 3$ , oraz  $k_{ij}$  są składowymi tensora przewodności cieplnej.

W dalszym ciągu przyjmiemy tensor przewodnictwa cieplnego w postaci:

$$k_{ij} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix}$$

Równanie bilansu ma postać:

$$c\dot{\theta} + q_{i,i} + f = 0 \tag{2}$$

gdzie  $\dot{\theta}$  jest pochodną po czasie  $\dot{\theta} = \frac{\partial \theta}{\partial t}$ .

Podstawiając równanie (1) do (2) otrzymamy znane równanie Fouriera przepływu ciepła w przewodniku niejednorodnym:

$$c\dot{\theta} - (k_{ij}\theta_{,i})_{,j} + f = 0 \tag{3}$$

Równanie (3) jest równaniem różniczkowym o zmiennych współczynnikach. Współczynniki te są na ogół nieciągłe (na stykach różnych składników) oraz silnie oscylujące na małych przedziałach określoności zmiennych przestrzennych.

## MODELOWANIE TOLERANCYJNE

Jak już wspomniano, poszukiwanie rozwiązań zagadnień przewodnictwa cieplnego dla materiałów periodycznie niejednorodnych jest skomplikowane. Uzasadnione jest więc konstruowanie modeli prostszych opisujących analizowane zjawisko z pewnym akceptowalnym przybliżeniem. Do konstrukcji modelu przybliżonego zastosujemy technikę uśredniania tolerancyjnego [Matysiak 1989, Matysiak i Nagórko 1989, Nagórko 1989, Woźniak i Wierzbicki 2000, Nagórko i Piwowarski 2003, Woźniak i in. (red.) 2010].

Uwzględnienie w modelu matematycznym przybliżonego opisu zjawiska fizycznego możliwe jest przy wykorzystaniu dokładności  $\varepsilon$ , wyznaczającej pewną tolerancję. W pracy przez tolerancję rozumiemy relację dwuargumentową  $\rho$ , określoną w iloczyźnie  $Z \times Z$  pewnego zbioru  $Z$ ,  $\rho \subset Z \times Z$ , która jest zwrotna i symetryczna.

Podstawowym pojęciem w technice uśredniania tolerancyjnego jest pojęcie funkcji wolnozmiennych na komórce periodyczności, tj. funkcji, którą wraz z jej pochodnymi można uznać za stałą w obrębie komórki. W rezultacie uśrednione równania mogą zawierać stałe efektywne – współczynniki wyrażone przez parametry mikrostruktury.

Zgodnie z techniką uśredniania tolerancyjnego założymy, że temperatura  $\theta(x_1, x_2, x_3, t)$  może być rozłożona na sumę składników:

$$\theta(x_1, x_2, x_3, t) = \vartheta(x_1, x_2, x_3, t) + h^A(x_1, x_2) \cdot \psi_A(x_1, x_2, x_3, t) \quad (4)$$

gdzie  $A = 1, 2, \dots, M$ , oraz funkcje  $\vartheta$ ,  $\psi_A$  są nieznanymi funkcjami wolnozmiennymi. Występujące w drugim składniku funkcje  $h^A$  są znanymi  $\Delta$ -periodycznymi funkcjami oscylującymi, zwanymi funkcjami kształtu. Funkcję  $\vartheta$  interpretujemy jako temperaturę uśrednioną, a funkcje  $\psi_A$  pozwalają opisać wpływ niejednorodności przewodnika na temperaturę, nazywamy je fluktuacjami.

W celu zastosowania metody tolerancyjnego uśredniania zapisujemy równanie (3) w postaci:

$$\left[ \frac{\partial P}{\partial(\theta_i)} \right]_{,i} - \frac{1}{\tau} \frac{\partial P}{\partial \theta} - \frac{\partial P}{\partial \theta} = 0 \quad (5)$$

gdzie:

$$P = \frac{1}{2} (\tau c \dot{\theta}^2 + k_{ij} \theta_{,i} \theta_{,j}) + f \theta \quad (6)$$

a  $\tau$  jest pewnym parametrem.

Łatwo sprawdzić, że równanie (5) jest identyczne z równaniem (3), o ile funkcjonal  $P$  ma postać równania (6).

Zgodnie z techniką uśredniania tolerancyjnego równania na poszukiwane funkcje  $\vartheta$  i  $\psi_A$ , występujące w równaniu (4), mają postać:

$$\left[ \frac{\partial \langle P \rangle}{\partial (\vartheta_{,i})} \right]_{,i} - \frac{1}{\tau} \frac{\partial \langle P \rangle}{\partial \dot{\vartheta}} - \frac{\partial \langle P \rangle}{\partial \vartheta} = 0$$

$$\left[ \frac{\partial \langle P \rangle}{\partial (\psi^A_{,i})} \right]_{,i} - \frac{1}{\tau} \frac{\partial \langle P \rangle}{\partial \dot{\psi}^A} - \frac{\partial \langle P \rangle}{\partial \psi^A} = 0 \quad (7)$$

gdzie wykorzystano operator uśredniania w postaci:

$$\langle F \rangle(x_1, x_2) \equiv \frac{1}{|\Delta|} \int_{\Delta} F(z_1, z_2, f(x_1, x_2)) dz_1 dz_2$$

Wykorzystana tutaj technika uśredniania tolerancyjnego znalazła zastosowanie przy rozwiązywaniu wielu zagadnień mechanicznych i termicznych. Obszerny wykaz prac poświęconych tej tematyce można znaleźć w pracy Woźniaka i in. (red.) [2010].

## MODEL UŚREDNIONY MATERIAŁÓW WARSTWOWO NIEJEDNORODNYCH

Przyjmijmy, że przewodnik jest periodyczny w jednym kierunku. Niech to będzie kierunek osi  $x_1$ . Elementem reprezentatywnym jest więc odcinek  $\Delta \equiv (0, \lambda) \subset R$  podzielony na części o długościach  $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n_0$ , tak że  $\lambda = \sum_{i=1}^{n_0} \lambda_i$ .

Niech  $\Delta_i = \left( \sum_{k=1}^{i-1} \lambda_k, \sum_{k=1}^i \lambda_k \right) \subset \Delta$ , wtedy  $\Omega_i = \Delta_i \times (0, L_2) \times (0, L_3)$  jest  $i$ -tą warstwą

w przewodniku,  $i = 1, 2, \dots, n_0$ .

W przypadku przewodników warstwowych składowe  $k_m, m = 1, 2, 3$ , są funkcjami  $\lambda$ -periodycznymi, określonymi dla  $x_1 \in R$  w następujący sposób:

$$k_m(x_1) = k_m(x_1 + \lambda), x_1 \in R$$

oraz

$$k_m(x_1)|_{(0,\lambda)} = \begin{cases} k_m^1 & \text{dla } x_1 \in (0, \lambda_1) \\ k_m^2 & \text{dla } x_1 \in (\lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2) \\ \vdots & \\ k_m^{n_0} & \text{dla } x_1 \in (\lambda - \lambda_{n_0}, \lambda) \end{cases}$$

Wielkości  $k_m^i$  dla  $i = 1, 2, \dots, n_0, m = 1, 2, 3$  są stałe.

Dla przewodników warstwowych ciepło właściwe jest także funkcją  $\lambda$ -periodyczną zmiennej  $x_1, c = c(x_1)$ , określoną analogicznie do funkcji  $k_m(x_1)$ .

Z równania (7), w przypadku gdy warstwy przewodnika są izotropowe,  $k_m = k$ ,  $m = 1, 2, 3$ , otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \langle c \rangle \dot{\vartheta} - \langle k \rangle \vartheta_{,mm} - \langle k h_{,1} \rangle \psi_{,1} &= -\langle f \rangle \\ \langle c(h)^2 \rangle \dot{\psi} - \langle k(h)^2 \rangle (\psi_{,22} + \psi_{,33}) + \langle k(h_{,1})^2 \rangle \psi + \langle k h_{,1} \rangle \vartheta_{,1} &= -\langle f h \rangle \end{aligned} \quad (8)$$

Pomijając w równaniu (8)<sub>2</sub> człony  $O(\lambda^2)$ , otrzymujemy:

$$\psi = -\frac{\langle k_1 h_{,1} \rangle}{\langle k_1 (h_{,1})^2 \rangle} \vartheta_{,1} \quad (9)$$

Definiując efektywny współczynnik przewodnictwa cieplnego jako:

$$k^{eff} = \langle k_1 \rangle - \frac{\langle k_1 h_{,1} \rangle^2}{\langle k_1 (h_{,1})^2 \rangle} \quad (10)$$

dochodzimy do równania na temperaturę uśrednioną  $\vartheta$  w postaci

$$\langle c \rangle \dot{\vartheta} - k^{eff} \vartheta_{,11} - \langle k_2 \rangle \vartheta_{,22} - \langle k_3 \rangle \vartheta_{,33} = 0 \quad (11)$$

Podstawiając do równania (4) fluktuację (9), otrzymujemy temperaturę  $\theta$ :

$$\theta(x_1, x_2, x_3, t) = \vartheta(x_1, x_2, x_3, t) - h^1(x_1) \frac{\langle k_1 h^1_{,1} \rangle}{\langle k_1 (h^1_{,1})^2 \rangle} \vartheta_{,1}(x_1, x_2, x_3, t) \quad (12)$$

Na zakończenie zauważmy, że wszystkie relacje, w których występują  $\vartheta$  i  $\psi$ , mają sens fizyczny tylko wtedy, gdy  $\vartheta$  i  $\psi$  są funkcjami wolnozmiennymi. Warunek ten może być sprawdzony tylko *a posteriori*, tzn. gdy funkcje te są wyznaczone z równań (8).

## PRZYKŁADY ROZWIĄZAŃ ZAGADNIENI SZCZEGÓLOWYCH

Rozważmy przewodnik dwuwarstwowy, którego konfiguracją jest obszar  $\Pi = (0, \infty) \times (0, L_1)$ . Załóżmy, że warstwy są jednorodne i izotropowe oraz równoległe do osi  $x_2$ . Równanie (11) na temperaturę uśrednioną  $\vartheta$  w przypadku zagadnień stacjonarnych przyjmuje postać:

$$k^{eff} \vartheta_{,11} + \langle k \rangle \vartheta_{,22} = 0 \quad (13)$$

gdzie  $k^{eff}$  określone jest związkiem (10), w którym  $k_1 \equiv k$ .

Wprowadźmy oznaczenie  $\kappa^2 = \frac{\langle k \rangle}{k^{eff}}$ , wtedy równanie (13) przyjmie postać:

$$\vartheta_{,11} + \kappa^2 \vartheta_{,22} = 0 \tag{14}$$

Przyjmijmy następujące warunki brzegowe:

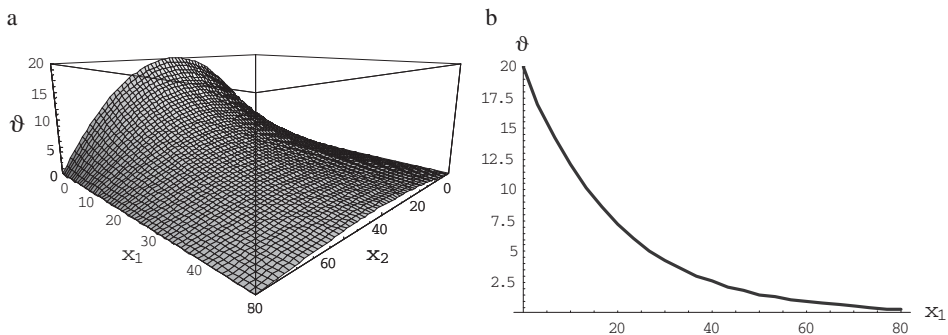
$$\vartheta(x_1, 0) = \vartheta(x_1, L_2) = 0, \quad \vartheta(0, x_2) = f(x_2), \quad \lim_{x_1 \rightarrow \infty} \vartheta(x_1, x_2) = 0$$

Ostatecznie rozwiązanie równania (14) ma postać:

$$\vartheta(x_1, x_2) = \frac{2}{L_2} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x_2}{L_2} e^{-\frac{\kappa n\pi x_1}{L_2}} \int_0^{L_2} f(x_2) \sin \frac{n\pi x_2}{L_2} dx_2 \tag{15}$$

Zbadajmy rozkład temperatury w takiej płycie. Występująca w równaniu (4) stała  $\kappa^2$  jest w tym przypadku równa  $\kappa^2 = \frac{\langle k \rangle}{k^{eff}} = 1,762$ . Przyjmijmy, że na brzegu przewodnika dla  $x_1 = 0$  zadana jest temperatura  $f(x_2) = -0,0125 \cdot x_2 \cdot (x_2 - 80)$ .

Wykres temperatury uśrednionej z równania (15), z przyjętymi warunkami brzegowymi, przedstawiono na rysunku 3a. Na rysunku 3b przedstawiono wykres temperatury uśrednionej  $\vartheta$  dla  $x_2 = \frac{L_2}{2}$ .



Rys. 3. Rozkład temperatury uśrednionej  $\vartheta$ : a – dla  $(x_1, x_2) \in \Pi$ , b – dla  $x_2 = 0,5L_2$   
 Fig. 3. Distribution of the average temperature  $\vartheta$ : a – for  $(x_1, x_2) \in \Pi$ , b – for  $x_2 = 0,5L_2$

W rozpatrywanym przypadku wpływ zadanej na brzegu  $x_1 = 0$  temperatury  $f(x_2)$  zanika wzdłuż osi  $x_1$ , tak że już dla  $x_1 > 0,75 L_2$  temperatura  $\vartheta$  jest w przybliżeniu równa temperaturze otoczenia.

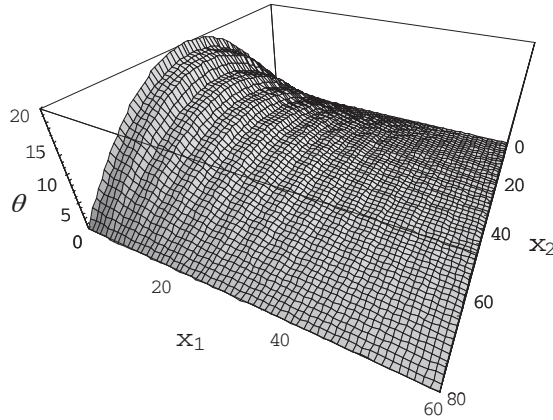
Temperatura  $\theta$  jest równa:

$$\theta(x_1, x_2) = \vartheta(x_1, x_2) - h(x_1) \frac{\langle K h_{,1} \rangle}{\langle K (h_{,1})^2 \rangle} \vartheta_{,1} \tag{16}$$

gdzie temperatura  $\vartheta(x_1, x_2)$  jest określona wzorem (15), a  $h(x_1)$  – wzorem:

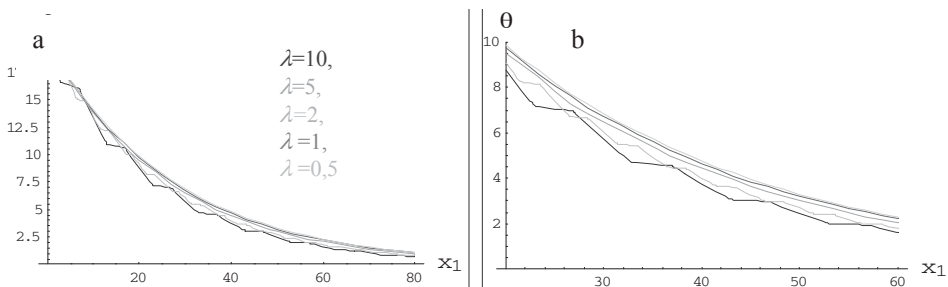
$$h(x_1) = a \begin{cases} \frac{2}{\lambda_1} x_1 + 1 & \text{dla } x_1 \in [0, \lambda_1] \\ \frac{2}{\lambda - \lambda_1} x_1 - \frac{2\lambda}{\lambda - \lambda_1} + 1 & \text{dla } x_1 \in [\lambda_1, \lambda] \end{cases}$$

Wykres temperatury  $\theta(x_1, x_2)$ , określonej wzorem (16), przedstawiono na rysunku 4, gdzie widać wyraźnie wpływ struktury warstwowej na przewodzenie ciepła. Wpływ ten zanika wzdłuż osi  $Ox_1$ .



Rys. 4. Wykres temperatury  $\theta$   
Fig. 4. Graph of the temperature  $\theta$

Wykażemy teraz, że w rozpatrywanym przypadku występuje efekt skali. W tym celu dla ustalonej proporcji wielkości warstw  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{2}{3}$  przyjmijmy  $\lambda = \frac{1}{2}, 1, 2, 5, 10$ . Wykres temperatury  $\theta$  dla  $k' = 0,042 \text{ W} \cdot (\text{m} \cdot \text{K})^{-1}$ ,  $k'' = 0,209 \text{ W} \cdot (\text{m} \cdot \text{K})^{-1}$ , przedstawiono na rysunku 5a dla całego przekroju kompozytu, natomiast na rysunku 5b dla  $x_1 \in [20, 60]$ .

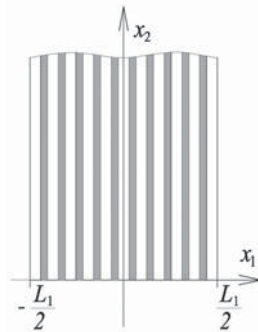


Rys. 5. Wykres temperatury  $\theta$  dla  $x_1 = 0,5 L_1$  dla różnych wartości  $\lambda$   
Fig. 5. Graph of the temperature  $\theta$  for  $x_1 = 0,5 L_1$  and various values of  $\lambda$



Na wykresach 5a i 5b widać, że im mniejszy jest wymiar komórki periodyczności w stosunku do całego przewodnika (więcej komórek), tym wykres ma mniejszą krzywiznę z równoczesnym przejściem w kierunku wykresu liniowego.

W dalszym ciągu rozważymy materiał dwuwarstwowy o grubości  $L_1$  przedstawiony na rysunku 6.



Rys. 6. Przewodnik periodycznie dwuwarstwowy w kierunku  $x_1$   
 Fig. 6. A two constituent layered conductor, periodic in the  $x_1$  direction

Zakładając, że uśredniona temperatura  $\vartheta$  zależy tylko od  $x_1$ , oraz przyjmując następujące warunki początkowe i brzegowe:

$$\vartheta(x_1, 0) = \vartheta_0(x_1), \quad x_1 \in \left[-\frac{L_1}{2}, \frac{L_1}{2}\right]; \quad \vartheta\left(-\frac{L_1}{2}, t\right) = \vartheta\left(\frac{L_1}{2}, t\right) = 0, \quad t \in [0, \infty),$$

otrzymujemy rozwiązanie w postaci:

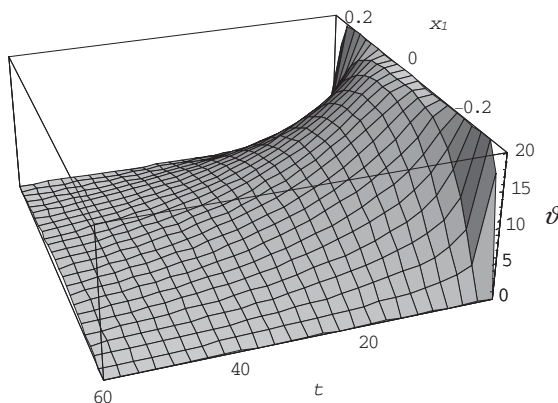
$$\vartheta(x_1, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n(x_1, \tau) \tag{17}$$

gdzie  $\tau = \frac{k^{eff}}{c} t$

$$\text{oraz } \vartheta_n(x_1, \tau) = \frac{4\vartheta_0}{\pi} \left( \frac{(-1)^n}{2n+1} \right) e^{\left[ -\frac{(2n+1)^2 \pi^2 \tau}{(L_1)^2} \right]} \cos \frac{2n+1}{L_1} \pi x_1 \tag{18}$$

Rozwiązanie (17) zilustrujemy graficznie, przyjmując, że przewodnik został ogrzany w przekroju  $x_2 = 0$  do temperatury początkowej  $\vartheta_0 = 20^\circ\text{C}$  oraz  $L_1 = 0,60$  m. Współczynnik przewodnictwa cieplnego pierwszej warstwy o grubości  $\lambda_1 = 0,02$  m wynosi  $k_1' = 0,042 \text{ W}\cdot(\text{m}\cdot\text{K})^{-1}$  (styropian), drugiej warstwy o grubości  $\lambda_2 = 0,03$  m –  $k_1'' = 0,209 \text{ W}\cdot(\text{m}\cdot\text{K})^{-1}$  (beton komórkowy).

Wykres temperatury uśrednionej z równania (17), dla  $n = 30$ :  $\tilde{\vartheta}(x_1, \tau) = \sum_{n=1}^{30} \vartheta_n(x_1, \tau)$ , przedstawiono na rysunku 7.



Rys. 7. Wykres temperatury  $\vartheta$   
Fig. 7. Graph of the temperature  $\vartheta$

W rozpatrywanym przypadku wpływ temperatury początkowej zanika w czasie, szczególnie szybko następuje to przy brzegach kompozytu. Po czasie  $t = 60$  wpływ temperatury początkowej prawie zanika i temperatura kompozytu zbliża się do temperatury otoczenia.

## WERYFIKACJA DOŚWIADCZALNA

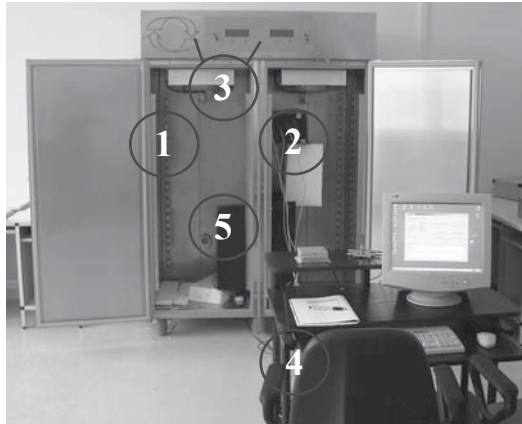
Weryfikację doświadczalną modelu przeprowadzono w Pracowni Procesów Fizycznych w Budownictwie w Centrum Wodnym SGGW w Warszawie. Zbadano zarówno parametry cieplne materiałów wchodzących w skład kompozytu, jak i przeprowadzono eksperyment, w którym przeanalizowano rozkład temperatury.

Weryfikację współczynnika przewodnictwa cieplnego  $k$  przeprowadzono w aparacie płytkowym FOX 600 firmy LASER COMP.

Na podstawie pomierzonych wartości urządzenie określiło wartość współczynnika przewodnictwa cieplnego  $k = 0,4010 \text{ W} \cdot (\text{m} \cdot \text{K})^{-1}$ .

Rozkład temperatury zbadano na stanowisku składającym się ze zintegrowanej szafy klimatycznej, mającej dwie komory: komorę lewą (1) temperatury dodatniej i komorę prawą (2) temperatury ujemnej, wyposażone w sterowniki (3) pozwalające utrzymać zadane warunki termiczne, system pomiarowy TDR z czujnikami do rejestracji temperatury (4) oraz komputer do rejestracji pomiarów.

W ścianie pomiędzy komorami (5) znajdują się trzy otwory pozwalające na umieszczenie próbek w jednej komorze i poddaniu ich działaniu temperatury zaprogramowanej w drugiej komorze. Standardowo otwory te wyposażone są w zamknięcia z płyt izolacyj-

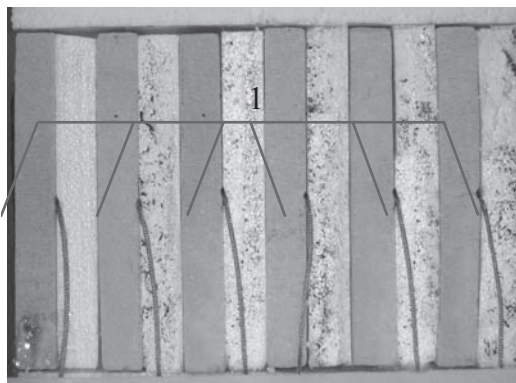


Rys. 8. Stanowisko badawcze z umocowanym kompozytem

Fig. 8. The investigation site with the mounted composite

nych. Pozwala to na korzystanie na przykład tylko z jednego otworu bądź też na prowadzenie badań niezależnie w obu komorach.

Wykonany w laboratorium kompozyt składał się z 6 warstw styropianu i 6 warstw betonu komórkowego, ułożonych naprzemiennie. Każda z warstw miała po 2 cm grubości. Zbudowany kompozyt widoczny jest na zdjęciu (rys. 9). Na tym zdjęciu widoczne są również czujniki pomiaru temperatury (termopary – 1), które zostały rozmieszczone równomiernie w przekroju przewodnika.

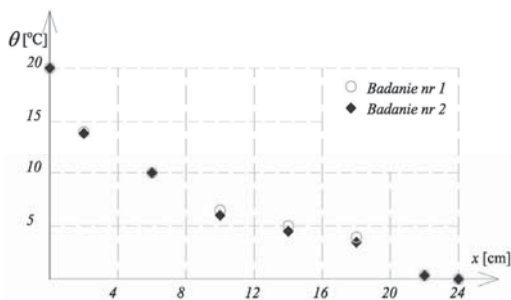


Rys. 9. Kompozyt przygotowany do badań

Fig. 9. The composite prepared to investigations

Wokół boków próbki wykonano izolację termiczną ze styropianu o grubości 20 cm w celu zapewnienia jednokierunkowego przepływu ciepła. Kompozyt wraz z izolacją termiczną umieszczono w jednej z komór. Próbkę zamocowano w ten sposób, że jedna z nieizolowanych powierzchni czołowych przylegała do otworu w ścianie pomiędzy komorami. W ten sposób zapewniono na tej powierzchni stałą temperaturę 0°C, równą temperaturze w komorze. Przestrzeń w otworze niezajętą przez próbkę wypełniono

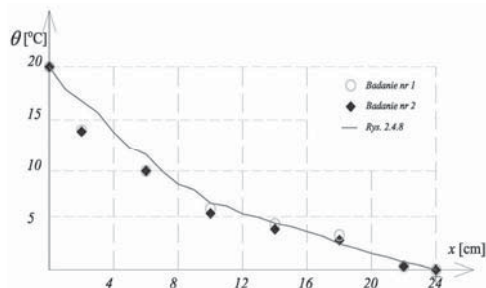
dodatkowym uszczelnieniem z pianki poliuretanowej o średniej grubości około 2 cm. Izolacja ta miała zapobiec przepływowi ciepła po powierzchni próbki, na styku jej płaszczyzn bocznych z powierzchnią izolacji. Na 24 godziny w obu komorach ustawiono temperaturę  $0^{\circ}\text{C}$ . Po tym okresie dokonano odczytu temperatury z czujników umieszczonych między poszczególnymi warstwami. Stwierdzono, że próbka jest należycie wychłodzona i w całej swojej objętości osiągnęła temperaturę otoczenia  $\theta_0 = 0^{\circ}\text{C}$ . Następnie zmieniono ustawienia termostatu w jednej z komór i zaprogramowano temperaturę  $+20^{\circ}\text{C}$ . Zmieniono temperaturę w komorze bez próbki, tak że kontakt z polem temperatury  $\theta_0 = 20^{\circ}\text{C}$  następował tylko i wyłącznie przez jedną nieizolowaną powierzchnię kompozytu. Od momentu zmiany temperatury w jednej komorze w odstępach 5 minut dokonywano odczytu temperatury w kompozycie. Do dalszych rozważań wykorzystano wyniki odczytane po 24 godzinach od rozpoczęcia eksperymentu. Wykonano dwie serie pomiarów. Wyniki eksperymentu zestawiono na rysunku 10.



Rys. 10. Wyniki badań  
Fig. 10. Investigation results

Wyniki doświadczeń porównano z rozwiązaniem teoretycznym (równanie 15). Wykres rozkładu temperatury dla kompozytu o takich samych cechach geometrycznych i fizycznych jak w badaniach eksperymentalnych przedstawiono na rysunku 3.

Rysunek 11 przedstawia porównanie pomiarów doświadczalnych z rozwiązaniem teoretycznym.



Rys. 11. Porównanie rezultatów badań z wynikami modelu  
Fig. 11. Comparison of the investigation results with the model results

Krzywa teoretyczna przebiega w sposób zbliżony do wyników doświadczenia. Największe odchylenie zanotowano dla  $x = 2$  cm, jest ono równe  $2,6^{\circ}\text{C}$ . Jak widać, to odchylenie powstało na pierwszej warstwie kompozytu. Należy przypuszczać, że jest to wynikiem nieszczelności izolacji termicznej płaszczyzn bocznych badanego kompozytu. Należy stwierdzić, że w dalszej części badanego kompozytu różnica między rozwiązaniem uzyskanym z równań modelowych a wynikami eksperymentu jest akceptowalna.

## PODSUMOWANIE

W pracy zastosowano technikę uśredniania tolerancyjnego do modelowania przewodnictwa cieplnego w przewodnikach periodycznie niejednorodnych. Model skonstruowany na podstawie tej techniki zaliczany jest do grupy modeli nieasymptotycznych, tzn. takich, w których rozwiązanie zależy od wymiaru elementu reprezentatywnego, występuje więc w takim modelu efekt skali. Opracowano i zweryfikowano analitycznie i doświadczalnie model tolerancyjny przewodzenia ciepła dla przewodników jedno- i dwukierunkowo periodycznych.

W opracowanych relacjach modelowych występują funkcje kształtu  $h^A$ , które muszą być znane, gdyż bez ich znajomości relacje modelowe nie są równaniami na poszukiwaną temperaturę i fluktuacje.

Układ równań w modelu jest układem równań różniczkowych o stałych (uśrednionych) współczynnikach. Zawiera, zamiast jednego równania na temperaturę, układ równań na temperaturę uśrednioną  $\vartheta$  i fluktuacje  $\psi^A$ .

Przeprowadzono weryfikację doświadczalną opracowanego modelu. Wyznaczono rozkład temperatury w kompozycie dla określonych warunków początkowo-brzegowych. Wyniki doświadczenia porównano z rozwiązaniem równań modelowych. Na tej podstawie stwierdzono, że opracowany model w zadowalający sposób opisuje przepływ ciepła w przewodnikach periodycznych. W pracy zweryfikowano również stałe materiałowe. Badania te potwierdziły opis teoretyczny.

Stwierdzono, że istnieją przypadki, dla których układ równań na temperaturę uśrednioną i fluktuacje można zredukować do jednego równania na temperaturę  $\vartheta$ , w którym występują stałe efektywne. W przypadku ciał jednorodnych stałe te przyjmują postać współczynników znanych z równania Fouriera.

Na podstawie rozwiązanych przykładów stwierdzono, że temperatura uśredniona i fluktuacje są funkcjami wolnozmiennymi względem wymiaru charakterystycznego komórki periodyczności i mogą być traktowane w obrębie komórki jako stałe. Każdorazowe sprawdzenie tego faktu jest warunkiem stosowania modelu.

Opracowany model stanowi dobrą podstawę do uogólnienia przypadku przepływu ciepła, w którym uwzględniono zależność stałych termicznych nie tylko od miejsca, ale i od temperatury oraz wilgotności.

## PIŚMIENNICTWO

- Jurczak T., 2007. Experimental verification of heat conduction in the non asymptotic model with application of the tolerance averaging technique. Seventh Ukrainian-Polish Symposium Current Problems of the Mechanics of Nonhomogenous Structures, Lviv, 39–40.

- Jurczak T., 2011. Modelowanie tolerancyjne przewodzenia ciepła w materiałach periodycznie niejednorodnych. Rozprawa doktorska. Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska SGGW, Warszawa.
- Jurczak T., Nagórko W., 2005. Weryfikacja doświadczalna stałych efektywnych przewodzenia ciepła w modelu nieasymptotycznym kompozytów warstwowych. *Modelowanie w Mechanice* 29, 181–187.
- Jurczak T., Nagórko W., 2007. Multilayered Composites under the Influence of Temperature – the Experimental Verification of a Theoretical Model. W: *Environmental Effects on Buildings and People*. Ed. A. Flaga, T. Lipecki. Lublin University of Technology, Lublin 149–152.
- Matysiak S.J., 1989. Thermal stresses in a periodic two-layered composites weakened by an interface crack. *Acta. Mech.* 78, 95–105.
- Matysiak S., Nagórko W., 1989. Microlocal parameters in a modelling of microperiodic multilayered elastic plates. *Ingenieur – Archiv* 59, 434–444.
- Nagórko W., 1989. Płyty sprężyste mikroperiodycznie niejednorodne. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics* 27, 293–301.
- Nagórko W., Piwowski M., 2003. Przewodnictwo cieplne w ośrodkach periodycznie warstwowych. *Acta Scientiarum Polonorum, Architectura* 2 (1), 31–41.
- Woźniak Cz., Wierzbicki E., 2000. Averaging techniques in thermomechanics of composite solids. Tolerance averaging versus homogenization. Wydawnictwo Politechniki Częstochowskiej, Częstochowa.
- Woźniak Cz. et al. (red), 2010. *Mathematical modeling and analysis in continuum mechanics of microstructured media*. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice.

## **TOLERANCE MODELLING OF HEAT CONDUCTION IN PERIODICALLY NON-HOMOGENEOUS MATERIALS**

**Abstract.** The paper concerns heat flow modeling in chosen periodically non-homogeneous materials. There will be applied the tolerance averaging technique to construct an averaged model of heat conduction for periodically multilayered materials. The set of equations in the constructed model will be simpler than the classical set of Fourier's equations. Apart of that, analytical solutions of chosen initial-boundary problems will be shown and experimentally verified.

**Key words:** heat conduction, non-homogeneous conductors, homogenization

Zaakceptowano do druku – Accepted for print: 5.06.2014