

ZAGADNIENIA NIESTACJONARNE PRZEWODNICTWA CIEPLNEGO PERIODYCZNYCH KOMPOZYTÓW WARSTWOWYCH

Vazgen Bagdasaryan

Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie

Streszczenie. Przedmiotem rozważań w niniejszej pracy są periodyczne kompozyty warstwowe. Zakłada się, że składniki kompozytów są jednorodny. W pracy konstruuje się model przewodnictwa cieplnego, w którym zamiast klasycznego równania Fouriera o nieciągłych i skokowo zmiennych współczynnikach występuje równanie o stałych współczynnikach. Wpływ niejednorodności ośrodka na rozkład temperatury opisany jest nowymi funkcjami, które wyznacza się, znając temperaturę uśrednioną. W pracy analizuje się zagadnienia niestacjonarne

Słowa kluczowe: kompozyty warstwowe, równanie Fouriera, uśrednianie tolerancyjne

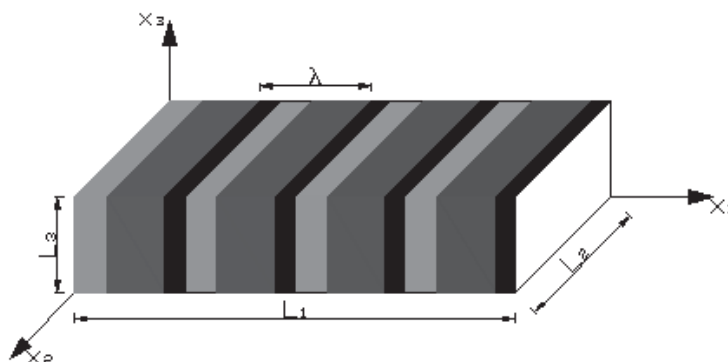
PRZEWODNICTWO CIEPLNE W PERIODYCZNYCH KOMPOZYTACH WARSTWOWYCH

W pracy rozważane będą przewodniki warstwowe, których konfiguracją jest zbiór $\Omega = (0, L_1) \times (0, L_2) \times (0, L_3)$. Przewodnik jest periodyczny w kierunku x_1 , z elementem reprezentatywnym $\Lambda \equiv \langle 0, \lambda \rangle$ podzielonym na n części o długościach λ_i , $i = 1, \dots, n$, tak że $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \lambda$.

Wprowadźmy oznaczenia $\Lambda_1 \equiv \langle 0, \lambda_1 \rangle$ oraz $\Lambda_i = \left(\sum_{k=1}^{i-1} \lambda_k, \sum_{k=1}^i \lambda_k \right) \subset \Lambda$, $i = 2, 3, \dots, n$,

wtedy $\Omega_i = \Lambda_i \times (0, L_2) \times (0, L_3)$ jest i -tą warstwą przewodnika, $i = 1, \dots, n$.

Założmy, że przewodnik jest warstwowo niejednorodny oraz że każda warstwa jest jednorodna. Na rysunku 1 przedstawiono periodyczny przewodnik trójwarstwowy.



Rys. 1. Ciało periodycznie trójwarstwowe
Fig. 1. A three-layered object

W przypadku przewodnika warstwowego współczynniki tensora przewodnictwa ciepła \mathbf{K} , ciepło właściwe c i gęstość masy ρ są funkcjami periodycznymi o okresie λ .

Dla współczynników tensora przewodnictwa ciepła przyjmujemy $K_{kl} = K$, dla $k = l$, oraz $K_{kl} = 0$, dla $k \neq l$, $k, l = 1, 2, 3$.

Założmy, że funkcja K zmienia się tylko względem x_1 , $K(x_1, x_2, x_3) = K(x_1)$:

$$K(x_1)_{(0,\lambda)} = \begin{cases} K^1 & \text{dla } x_1 \in (0, \lambda_1) \\ K^2 & \text{dla } x_1 \in (\lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2) \\ \vdots & \\ K^n & \text{dla } x_1 \in (\lambda - \lambda_n, \lambda) \end{cases}$$

Wielkości K^i , $i = 1, \dots, n$, są stałe.

W podobny sposób zdefiniowane są funkcje ciepła właściwego $c = c(x_1, x_2, x_3)$ oraz gęstości masy $\rho = \rho(x_1, x_2, x_3)$.

Oznaczmy przez $\theta = \theta(x_1, x_2, x_3, t)$, $(x_1, x_2, x_3) \in \Omega$, $t \in < t_0, t_1 >$ temperaturę, a przez $f = f(x_1, x_2, x_3, t)$ – wydajność źródeł ciepła. Równanie przewodnictwa cieplnego rozprzeczonych przewodników ma postać:

$$c\rho\dot{\theta} - (K\theta_{,1})_{,1} - K(\theta_{,22} + \theta_{,33}) = f \quad (1)$$

Równanie przewodnictwa ciepła (1) jest równaniem różniczkowym liniowym o zmieniających się skokowo współczynnikach. Dla takiego opisu można zbudować model prostszy, w którym współczynniki będą stałe.

MODEL UŚREDNIONY PERIODYCZNYCH PRZEWODNIKÓW WARSTWOWYCH

Do modelowania zastosujemy technikę uśredniania tolerancyjnego [Woźniak i Wierzbicki 2000].

Zgodnie z tą techniką przyjmujemy rozkład temperatury w postaci:

$$\theta(x_1, x_2, x_3, t) = \vartheta(x_1, x_2, x_3, t) + h^A(x_1) \cdot \psi^A(x_1, x_2, x_3, t) \quad A = 1, 2, \dots, M \quad (2)$$

gdzie ϑ jest temperaturą uśrednioną, a ψ^A są funkcjami opisującymi wpływ niejednorodności na przewodnictwo ciepła, nazwanymi fluktuacjami. Funkcje h^A są danymi, Λ -periodycznymi, oscylującymi funkcjami kształtu. Funkcjami poszukiwanymi są ϑ oraz ψ^A .

W technice uśredniania tolerancyjnego równania na niewiadome ϑ i ψ^A otrzymuje się w postaci:

$$\left[\frac{\partial \langle P \rangle}{\partial (\vartheta, k)} \right]_{,k} - \frac{1}{\tau} \frac{\partial \langle P \rangle}{\partial \dot{\vartheta}} - \frac{\partial \langle P \rangle}{\partial \vartheta} = 0 \quad (3)$$

$$\left[\frac{\partial \langle P \rangle}{\partial (\psi^A, k)} \right]_{,k} - \frac{1}{\tau} \frac{\partial \langle P \rangle}{\partial \dot{\psi}^A} - \frac{\partial \langle P \rangle}{\partial \psi^A} = 0$$

gdzie $\langle P \rangle$ jest funkcjonalem uśrednionym po komórce

$$\langle P \rangle \equiv \frac{1}{|\Lambda|} \int_{\Lambda} P dx_1 \quad (4)$$

a P ma postać

$$P = \frac{1}{2} (\tau c \dot{\vartheta}^2 + K \theta, k \theta, k) + f \theta \quad (5)$$

Po podstawieniu do zależności (5) dekompozycji (2) równania (3) przyjmują postać:

$$\langle c \rho \rangle \dot{\vartheta} - \langle K \rangle \vartheta, k k - \langle K h, 1^A \rangle \psi, 1^A = \langle f \rangle \quad (6)$$

$$\langle c \rho h^A h^B \rangle \psi^B - \langle K h^A h^B \rangle (\psi, 22 + \psi, 33) + \langle K h, 1^A h, 1^B \rangle \psi^B + \langle K h, 1^A \rangle \vartheta, 1 = \langle f h^A \rangle$$

W przypadku przewodnika dwuwarstwowego funkcję kształtu przyjmiemy w postaci $h^1(x_1) \equiv h(x_1)$, $A = 1$:

$$h(x_1) = \begin{cases} \frac{\lambda}{\lambda_1 - \lambda} x_1 + \frac{\lambda^2}{2(\lambda_1 - \lambda)} & \text{dla } x_1 \in \left\langle -\frac{\lambda}{2}, -\frac{\lambda_1}{2} \right\rangle \\ \frac{\lambda}{\lambda_1} x_1 & \text{dla } x_1 \in \left\langle -\frac{\lambda_1}{2}, \frac{\lambda_1}{2} \right\rangle \\ \frac{\lambda}{\lambda_1 - \lambda} x_1 - \frac{\lambda^2}{2(\lambda_1 - \lambda)} & \text{dla } x_1 \in \left\langle \frac{\lambda_1}{2}, \frac{\lambda}{2} \right\rangle \end{cases} \quad (7)$$

Uśrednione wielkości występujące w równaniach (6) będą dla rozpatrywanego przypadku równe:

$$\begin{aligned}\langle c\rho\rangle &= \eta_1 c^1 \rho^1 + (1 - \eta_1) c^2 \rho^2; \quad \langle K_i \rangle = \eta_1 K^1 + (1 - \eta_1) K^2 \\ \langle c\rho h^2 \rangle &= \frac{\eta_1 c^1 \rho^1 + (1 - \eta_1) c^2 \rho^2}{12} (\lambda)^2; \quad \langle K h^2 \rangle = \frac{\eta_1 K^1 + (1 - \eta_1) K^2}{12} (\lambda)^2 \\ \langle K h_{,1} \rangle &= (K^1 - K^2); \quad \langle K (h_{,1})^2 \rangle = \left[\frac{K^1}{\eta_1} + \frac{K^2}{1 - \eta_1} \right]\end{aligned}\quad (8)$$

gdzie: $\eta_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda}$, $1 - \eta_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda}$.

MODEL ASYMPTOTYCZNY

W równaniach (6)₂ pierwszy i drugi składnik jest rzędu $O(\lambda^2)$. Wykorzystując przejście graniczne $\lambda \rightarrow 0$, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\langle c\rho \rangle \vartheta - \langle K \rangle \vartheta_{,11} - \langle K \rangle (\vartheta_{,22} + \vartheta_{,33}) - \langle K h_{,1}^A \rangle \psi_{,1}^A &= 0 \\ \langle K h_{,1}^A h_{,1}^B \rangle \psi^B + \langle K h_{,1}^A \rangle \vartheta_{,1} &= 0\end{aligned}\quad (9)$$

Oznaczmy przez E^{AB} macierz odwrotną do $\langle K h_{,1}^A h_{,1}^B \rangle$, wtedy z równania (9)₂ wyznaczyć można fluktuację:

$$\psi^A = -E^{AB} \langle K_{,1}^B \rangle \vartheta_{,1} \quad (10)$$

Podstawiając równanie (10) do (9)₁ oraz definiując

$$K^{eff} = \langle K \rangle - \langle K h_{,1}^A \rangle \left(E^{AB} \langle K h_{,1}^B \rangle \right) \quad (11)$$

otrzymujemy równanie na temperaturę uśrednioną ϑ w postaci

$$\langle c\rho \rangle \vartheta - K^{eff} \vartheta_{,11} - \langle K \rangle (\vartheta_{,22} - \vartheta_{,33}) = 0 \quad (12)$$

Równanie (12) ma postać analogiczną do równania Fouriera (1), z tym że występują w nim uśrednione stałe współczynniki.

W przypadku przewodnika periodycznie dwuwarstwowego otrzymujemy:

$$K^{eff} = \langle K \rangle - \frac{\langle K h_{,1} \rangle^2}{\langle K (h_{,1})^2 \rangle} \quad (13)$$

Podstawiając do równania (13) wielkości uśrednione (8), otrzymujemy:

$$K^{eff} = \eta_1 K^1 + (1 - \eta_1) K^2 - \frac{(K^2 - K^1)^2 (1 - \eta_1) \eta_1}{(1 - \eta_1) K^1 - \eta_1 K^2} \quad (14)$$

Jeśli do równania (2) wstawimy wartość fluktuacji (10), to otrzymamy poszukiwaną temperaturę θ w postaci:

$$\theta(x_1, x_2, x_3, t) = \vartheta(x_1, x_2, x_3, t) - E^{AB} \langle Kh_{,1}^B \rangle h^A(x_1) \vartheta_{,1}(x_1, x_2, x_3, t) \quad (15)$$

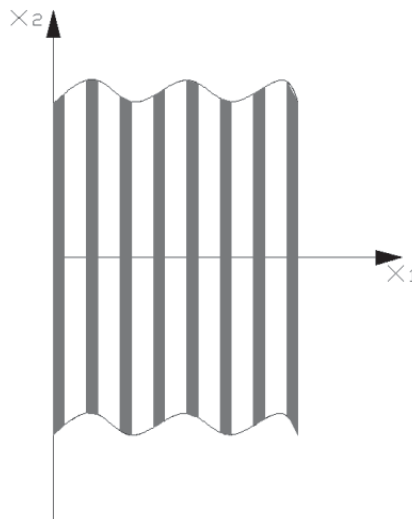
Równania (12) i (15) przedstawiają model przewodnictwa cieplnego przewodników warstwowych uzyskany w ramach techniki uśredniania tolerancyjnego.

PRZYKŁADY ROZWIĄZAŃ

Niech przedmiotem rozważań będzie dwuwarstwowy przewodnik złożony z jednorodnych i izotropowych warstw równoległych do osi x_2, x_3 (rys. 2). Rozpatrywać będziemy jednokierunkowy, niestacjonarny przepływ ciepła w kierunku x_1 , bez źródeł ciepła. Zakładając $\vartheta = \vartheta(x_1, t)$, otrzymujemy temperaturę uśrednioną:

$$\langle c\rho \rangle \dot{\vartheta} - K^{eff} \vartheta_{,11} = 0 \quad (16)$$

gdzie K^{eff} określono związkami (13).



Rys. 2. Przewodnik periodycznie dwuwarstwowy wzdłuż osi x_1
Fig. 2. A periodically two-layered conductor along the x_1 -axis

Równanie (16) można zapisać w postaci:

$$\dot{\vartheta} = \kappa^2 \vartheta_{,11} \quad (17)$$

gdzie $\kappa^2 = \frac{K^{eff}}{\langle c\rho \rangle}$.

Warunki brzegowe przyjęto w postaci:

$$\vartheta(0, t) = 0; \quad \vartheta(L_1, t) = \vartheta_0; \quad \vartheta(x_1, 0) = 0; \quad 0 < x_1 < L_1 \quad (18)$$

Rozwiązanie równania (17) otrzymujemy, stosując transformatę Laplace'a:

$$\vartheta(x_1, t) = \vartheta_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{2nL_1 + L_1 + x_1}{2\kappa\sqrt{t}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{2nL_1 + L_1 - x_1}{2\kappa\sqrt{t}} \right) \right] \quad (18)$$

gdzie $\operatorname{erf}(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du$.

Sprawdźmy, jaki będzie rozkład temperatury w płycie, w której $L_1 = 120$ cm oraz $\lambda = 6$ cm. Niech rozpatrywana płyta będzie złożona z dwu jednorodnych i izotropowych warstw: styropianu ($c^1 = 1200 \text{ J}\cdot(\text{kg}\cdot\text{K})^{-1}$, $\rho^1 = 15 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, $K^1 = 0,042 \text{ W}\cdot(\text{m}\cdot\text{K})^{-1}$, $\lambda_1 = 2$ cm) oraz betonu komórkowego o klasie gęstości 600 ($c^2 = 840 \text{ J}\cdot(\text{kg}\cdot\text{K})^{-1}$, $\rho^2 = 600 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, $K^2 = 0,210 \text{ W}\cdot(\text{m}\cdot\text{K})^{-1}$, $\lambda_2 = 4$ cm).

Dla takiego przewodnika mamy:

$$\begin{aligned} K^{eff} &= 0,303 \text{ W}\cdot(\text{m}\cdot\text{K})^{-1} & \langle c\rho \rangle &= 342\,000 \text{ J}\cdot(\text{m}^3\cdot\text{K})^{-1} \\ \langle K_i h_{,1} \rangle &= -0,168 \text{ W}\cdot(\text{m}\cdot\text{K})^{-1} & \langle K_i (h_{,1})^2 \rangle &= 0,441 \text{ W}\cdot(\text{m}\cdot\text{K})^{-1} \end{aligned}$$

Po obliczeniu podstawowych wielkości uzyskujemy występującą w równaniu (16)

wartość współczynnika $\kappa^2 = \frac{K^{eff}}{\langle c\rho \rangle} = 8,860 \cdot 10^{-7}$.

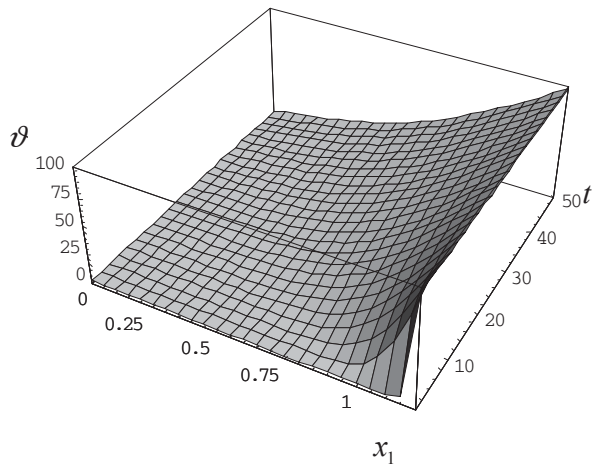
Przyjmijmy, że na brzegu L_1 zadana jest temperatura $\vartheta_0 = 100$ K.

Rysunek 3 przedstawia wykres temperatury uśrednionej (18) w przedziale $0 \leq x_1 \leq 1,2$ m, $0,1 \text{ h} \leq t \leq 50$ h.

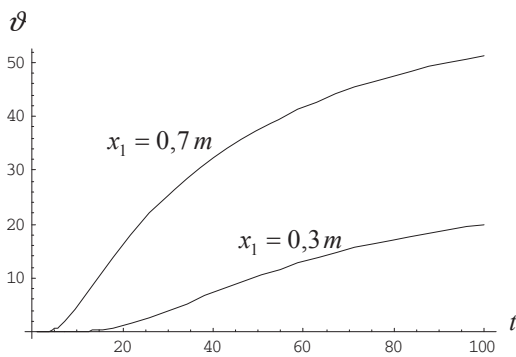
Na rysunkach 4 oraz 5 przedstawiono rozkład temperatury odpowiednio w zależności od upływu czasu oraz miejsca. Można zauważyć, że rozkład temperatury uśrednionej w kierunku osi periodyczności wraz z upływem czasu dąży do rozkładu liniowego.

W danym przypadku, zgodnie z równaniem (15), temperatura θ ma postać:

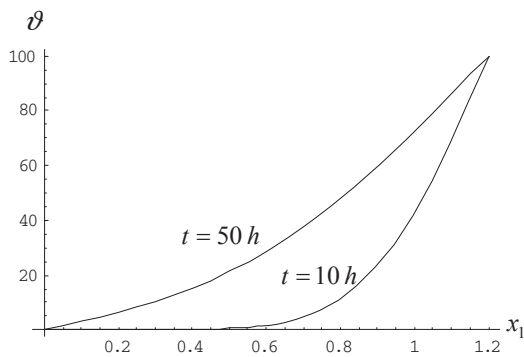
$$\theta(x_1, x_2) = \vartheta(x_1, x_2) - h(x_1) \frac{\langle Kh_{,1} \rangle}{\langle K(h_{,1})^2 \rangle} \vartheta_{,1} \quad (19)$$



Rys. 3. Rozkład temperatury uśrednionej w przewodniku w przedziale $0 \leq x_1 \leq 1,2$ m, $0 \leq t \leq 50$ h
 Fig. 3. Distribution of averaging temperature in the conductor for $0 \leq x_1 \leq 1,2$ m, $0 \leq t \leq 50$ h

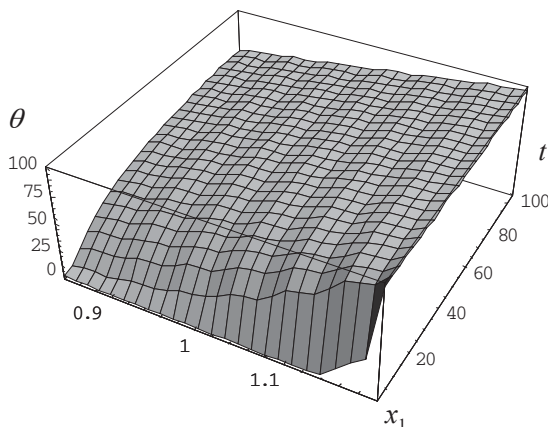


Rys. 4. Wykres temperatury $\vartheta(x_1, t)$ dla $x_1 = 0,3$ m oraz $x_1 = 0,7$ m
 Fig. 4. A $\vartheta(x_1, t)$ temperature diagram for $x_1 = 0,3$ m and $x_1 = 0,7$ m

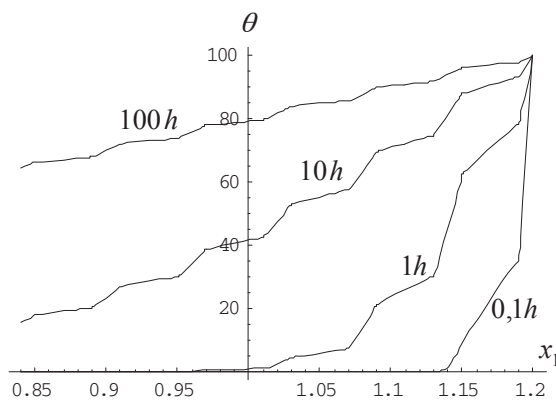


Rys. 5. Wykres temperatury $\vartheta(x_1, t)$ po $t = 10$ h oraz $t = 50$ h
 Fig. 5. A $\vartheta(x_1, t)$ temperature diagram after $t = 10$ h and $t = 50$ h

Rysunek 6 przedstawia wykres temperatury $\theta(x_1, t)$ z uwzględnieniem dekompozycji (15), a rysunek 7 – wykres temperatury $\theta(x_1, t)$ odpowiednio po: $t = 0, 1 \text{ h}, t = 10 \text{ h}, t = 100 \text{ h}$, w przedziale $x \in \langle 0,84; 1,2 \rangle$.



Rys. 6. Wykres temperatury $\theta(x_1, t)$ dla $x_1 \in (0,84 \text{ m}, 1,2 \text{ m})$ oraz $t \in (0, 100 \text{ h})$
 Fig. 6. A $\theta(x_1, t)$ temperature diagram for $x_1 \in (0,84 \text{ m}, 1,2 \text{ m})$ and $t \in (0, 100 \text{ h})$



Rys. 7. Wykres temperatury $\theta(x_1, t)$ po czasie $t = 0,1 \text{ h}, t = 1 \text{ h}, t = 10 \text{ h}, t = 100 \text{ h}$
 Fig. 7. A $\theta(x_1, t)$ temperature diagram after $t = 0,1 \text{ h}, t = 1 \text{ h}, t = 10 \text{ h}, t = 100 \text{ h}$

Na rysunkach 6 oraz 7 wyraźnie widać wpływ struktury warstwowej przewodnika na przepływ ciepła. Wpływ ten maleje wzdłuż osi x_1 .

Dla analizowanego przewodnika przyjmijmy teraz warunki początkowo-brzegowe w postaci:

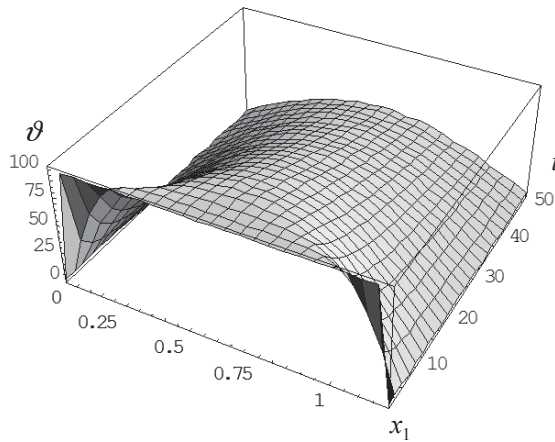
$$\vartheta(0, t) = 0, \vartheta(L_1, t) = 0, \vartheta(x_1, 0) = \vartheta_0, 0 < x_1 < L_1 \quad (20)$$

Rozwiązanie równania (17) otrzymujemy także, stosując transformatę Laplace'a i ma ono postać:

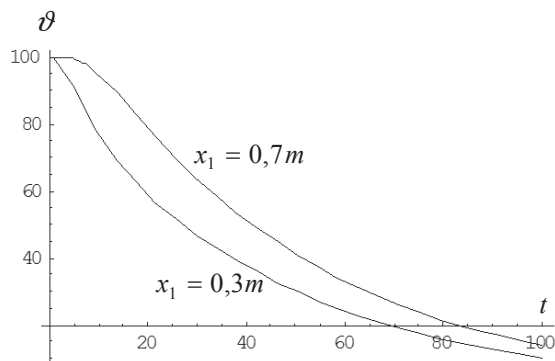
$$\vartheta(x_1, t) = \vartheta_o \left\{ 1 - \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{-x_1}{2\kappa\sqrt{t}} \right) - \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{x_1}{2\kappa\sqrt{t}} \right) + \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{2nL_1 - x_1}{2\kappa\sqrt{t}} \right) - \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{2nL_1 + x_1}{2\kappa\sqrt{t}} \right) + \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{2nL_1 + 2L_1 - x_1}{2\kappa\sqrt{t}} \right) - \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{2nL_1 + 2L_1 + x_1}{2\kappa\sqrt{t}} \right) - \operatorname{erfc} \left(\frac{2nL_1 + L_1 - x_1}{2\kappa\sqrt{t}} \right) + \operatorname{erfc} \left(\frac{2nL_1 + L_1 + x_1}{2\kappa\sqrt{t}} \right) \right] \right\} \quad (21)$$

gdzie $\operatorname{erfc}(x) \equiv 1 - \operatorname{erf}(x)$.

Wykresy funkcji (21) wykonano dla pierwszych 50 wyrazów szeregu (rys. 8).

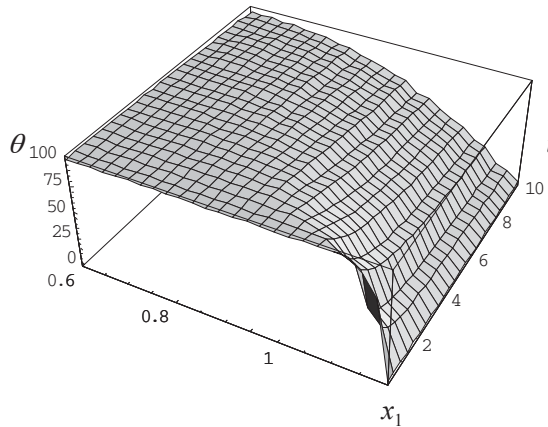


Rys. 8. Rozkład temperatury uśrednionej w przewodniku w przedziale $0 \leq x_1 \leq 1,2$ m, $0 \leq t \leq 50$ h
Fig. 8. Distribution of averaging temperature in the conductor for $0 \leq x_1 \leq 1,2$ m, $0 \leq t \leq 50$ h

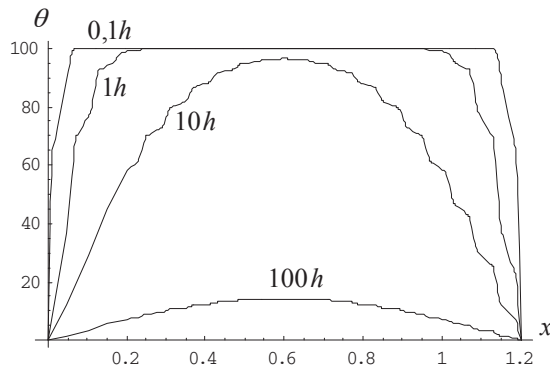


Rys. 9. Wykres temperatury uśrednionej dla $x_1 = 0,3$ m oraz $x_1 = 0,7$ m
Fig. 9. An averaging temperature diagram for $x_1 = 0,3$ m and $x_1 = 0,7$ m

Rysunek 9 przedstawia wykres temperatury $\theta(x_1, t)$ dla połowy przewodnika z uwzględnieniem dekompozycji (15), a rysunek 10 – wykres temperatury $\theta(x_1, t)$ odpowiednio po $t = 0,1$ h, $t = 1$ h, $t = 10$ h, $t = 100$ h. Na rysunkach 10 oraz 11 widać wpływ struktury warstwowej przewodnika na przepływ ciepła.



Rys. 10. Wykres temperatury $\theta(x_1, t)$ dla $x_1 \in (0,6 \text{ m}, 1,2 \text{ m})$ oraz $t \in (0,10 \text{ h})$
 Fig. 10. A $\theta(x_1, t)$ temperature diagram for $x_1 \in (0,6 \text{ m}, 1,2 \text{ m})$ and $t \in (0,10 \text{ h})$



Rys. 11. Wykres temperatury $\theta(x_1, t)$ po czasie $t = 0,1$ h, $t = 1$ h, $t = 10$ h, $t = 100$ h
 Fig. 11. A $\theta(x_1, t)$ temperature diagram after $t = 0,1$ h, $t = 1$ h, $t = 10$ h, $t = 100$ h

PODSUMOWANIE

W klasycznym modelu przewodzenia ciepła, opisanym równaniem Fouriera na małych przedziałach określoności funkcji, dla rozważanych przewodników występują współczynniki nieciągłe, skokowo zmienne. Przedstawiony model, opisany równaniem na uśrednioną temperaturę, ma współczynniki stałe. Skonstruowany model wydaje się być wygodnym narzędziem do badania przewodnictwa ciepła w warstwowych materiałach wieloskładnikowych. Obszarem dalszych badań będą zagadnienia naprężeń cieplnych w takich przewodnikach.

PIŚMIENNICTWO

- Woźniak Cz., Wierzbicki E., 2000. Averaging techniques in thermomechanics of composite solids. Tolerance averaging versus homogenization. Wydawnictwo Politechniki Częstochowskiej, Częstochowa.
- Woźniak Cz., Michalak B., Jędrysiak J. (red.), 2008. Thermomechanics of microheterogeneous solids and structures. Tolerance averaging approach. Politechnika Łódzka, Łódź.

TRANSIENT ANALYSIS OF HEAT CONDUCTION IN PERIODICAL LAYERED COMPOSITES

Abstract. The subject of the paper are periodical layered composites. It is assumed that the components of the composites are homogeneous. The work consists in forming a model of heat conduction in which the Fourier equation with discontinuous highly oscillating coefficients was substituted with an equation with constant coefficients. The influence of the conductor on the temperature is described with additional functions which are determined knowing the averaging temperature. The paper deals with transient problems. Further research will be done on thermal stresses in such cases.

Key words: layered composites, Fourier's law, tolerance averaging

Zaakceptowano do druku – Accepted for print: 5.06.2014