ACTA SCIENTIARUM POLONORUM Architectura 13 (1) 2014, 21–36

WYBRANE ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE WYZNACZANIA WARTOŚCI CHARAKTERYSTYCZNYCH W GEOTECHNICE

Wojciech Puła

Politechnika Wrocławska, Wrocław

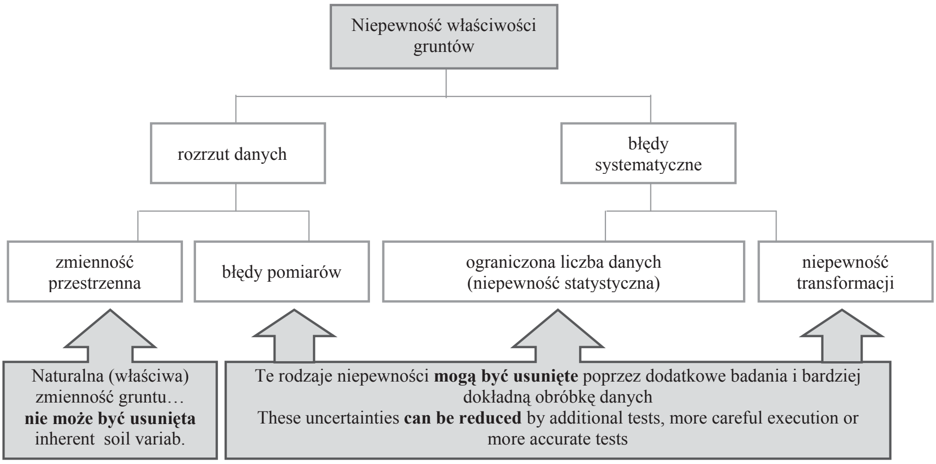
Streszczenie. W pracy zaprezentowano różne sposoby określania wartości charakterystycznych właściwości gruntu w kontekście postanowień obowiązującego Eurokodu 7. Po przedstawieniu najprostszych propozycji podano przykład porównujący różne metody. Następnie podano podstawowe fakty dotyczące opisu właściwości podłoża za pomocą pól losowych oraz koncepcję uśrednień przestrzennych. Zreferowano też metodę Schneidera, uwzględniającą w sposób jawny przestrzenną zmienność właściwości gruntu przy określaniu wartości charakterystycznych. Propozycję tę zilustrowano przykładem związanym z mechanizmem Prandtla, a wyniki odniesiono do rezultatów wynikających z uśrednienia właściwości wzdłuż linii poślizgu w tym mechanizmie. Rezultaty wykazują, że zastosowanie teorii pól losowych wraz z propozycją Schneidera daje rezultaty zgodne z wymaganiami Eurokodu 7. Zwrócono uwagę na istotną rolę podejścia probabilistycznego w wyznaczaniu parametrów do projektowania geotechnicznego w kontekście oceny bezpieczeństwa. Niniejszy artykuł jest rozszerzoną wersją prezentacji przedstawionej na konferencji ProGeotech (SGGW, Warszawa 12–13.09.2013).

Słowa kluczowe: Eurokod 7, współczynnik zmienności, pole losowe, skala fluktuacji, funkcja redukcji wariancji

WSTĘP

Wydaje się rzeczą oczywistą, że przyjęcie odpowiednich parametrów podłoża w obliczeniach geotechnicznych ma bardzo duży wpływ na bezpieczeństwo projektowanej konstrukcji. Jednak nie jest już tak oczywiste, w jaki sposób określić te parametry, aby zachować odpowiedni poziom tego bezpieczeństwa. Podstawową przyczyną takiego stanu rzeczy jest niepewność (losowość) cech podłoża, a niejednokrotnie także brak precyzyjnej procedury prowadzącej do przyjęcia wartości danego parametru w obliczeniach projektowych. Niepewność właściwości gruntu może mieć różne źródła. Najczęściej spotyka się podział pokazany na rysunku 1. Największy problem stanowi

Adres do korespondencji – Corresponding author: Wojciech Puła, Politechnika Wrocławska, Instytut Geotechniki i Hydrotechniki, Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław, e-mail: wojciech.pula@pwr.wroc.pl



Rys. 1. Źródła niepewności określania właściwości gruntu
Fig. 1. Sources of variability in soil properties evaluations

naturalna zmienność gruntu, która nie może być zniwelowana poprzez polepszanie procedur czy modyfikację sprzętu.

Od ponad dwóch lat funkcjonuje w naszym kraju Eurokod 7 [PN-EN 1997-1:2008], który zastąpił poprzednio obowiązujące normy geotechniczne, w tym te najczęściej stosowane i będące w użyciu przez długie lata, jak norma PN-81/B-03020, która podawała zasady przyjmowania wartości charakterystycznych i obliczeniowych właściwości gruntowych. Eurokod 7 całkowicie odmienił te zasady. Aby wskazać, jak duże są to zmiany, warto przypomnieć podstawową metodę (tzw. metoda A) zamieszczoną w PN-81/B-03020.

Zgodnie z zasadami obliczeń według stanów granicznych do projektowania geotechnicznego stosuje się wartości obliczeniowe parametrów, przy czym zależność między wartością charakterystyczną $x^{(n)}$, przyjmowaną w normie PN-81/B-03020 jako średnią arytmetyczną wyników pomiarów parametru X (w przypadku tzw. metody A oznaczania parametrów), a wartością obliczeniową $x^{(n)}$ jest następująca:

$$x^{(r)} = \gamma_m x^{(n)} \tag{1}$$

gdzie γ_m jest współczynnikiem materiałowym (cząstkowym współczynnikiem bezpieczeństwa) obliczanym według następującego wzoru:

$$\gamma_m = 1 \pm \frac{\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left(x_i - x^{(n)} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{x^{(n)}} = 1 \pm V\left(X\right) \tag{2}$$

w którym x_i są wynikami testowania właściwości X, a $V(X)$ – współczynnikiem zmienności tej cechy.

Ze wzorów (1) i (2) wynika, że:

$$x^{(r)} = x^{(n)} \pm \sigma_x \tag{3}$$

gdzie σ_x oznacza odchylenie standardowe właściwości X.

Norma PN-81/B-03020 wprowadza jeszcze dodatkowe ograniczenia na współczynniki materiałowe, a mianowicie: $0{,}8 \le \gamma_m \le 0{,}9$ lub $1{,}1 \le \gamma_m \le 1{,}25$. Warto zwrócić uwagę, że współczynniki materiałowe uwzględniają w sposób statystyczny naturalną niepewność właściwości podłoża i prowadzą do wartości obliczeniowej zależnej od wielkości rozrzutu wyników uzyskanych z badań podłoża, choć nie jest jasne, dlaczego zdecydowano się na margines w postaci pojedynczego odchylenia standardowego.

PROPOZYCJE OKREŚLANIA WARTOŚCI CHARAKTERYSTYCZNYCH WEDŁUG EUROKODU 7

Zgodnie z Eurokodem 7 wartość charakterystyczna to ostrożne oszacowanie wielkości danej właściwości gruntu, która jest związana z wystąpieniem określonego stanu granicznego. Taka definicja zakreśla jedynie dość ogólne metody określenia wartości charakterystycznej, bez podania precyzyjnego algorytmu.

Eurokod 7 [PN-EN 1990:2000] wskazuje, że wartość charakterystyczna parametru X powinna być wyznaczona jako pięcioprocentowy kwantyl z rozkładu prawdopodobieństwa tego parametru. Zakładając, że parametr X jest zmienną losową o rozkładzie normalnym, otrzymuje się następujący wzór na wartość charakterystyczną:

$$X_k = \mu(X) - 1{,}645\sigma(X) = \mu(X)\big(1 - 1{,}645V(X)\big) \tag{4}$$

w którym $\mu(X)$, $\sigma(X)$, $V(X)$ oznaczają odpowiednio: wartość oczekiwaną, odchylenie standardowe oraz współczynnik zmienności zmiennej losowej X.

Zgodnie z założeniem wzór (4) może być stosowany, gdy rozkład badanej właściwości można uznać za normalny. Ponadto wielkość projektowanego elementu, gdzie używa się danego parametru, powinna być porównywalna z elementem poddanym testowaniu. Z taką sytuacją spotykamy się zazwyczaj przy projektowaniu konstrukcji. W projektowaniu geotechnicznym oba powyższe warunki na ogół nie są spełnione. Wyniki testowania większości parametrów podłoża charakteryzują się dużymi wartościami współczynników zmienności, co w przypadku zastosowania wzoru (4) może prowadzić do „niefizycznych" wartości X_k. Zwłaszcza w przypadku spójności czy wytrzymałości na ścinanie w warunkach bez odpływu, gdzie współczynniki zmienności są rzędu kilkudziesięciu procent, wzór (4) prowadzi do ujemnych lub bardzo małych wartości charakterystycznych. Warto też odnotować, że w materiałach takich jak stal czy beton problem ten nie występuje, gdyż w przypadku tych materiałów współczynniki zmienności są zwykle mniejsze niż 10%. Drugą przyczyną bardzo ograniczonej stosowalności wzoru (4) do projektowania geotechnicznego jest to, że obszar podłoża związany z konkretną awarią jest zwykle znacznie większy od obszaru pojedynczego testowania. Z uwagi na fakt, że nawet jednorodna warstwa gruntu wykazuje naturalną przestrzenną zmienność losową, wartość związana z powstaniem określonego stanu granicznego jest pewną wartością średnią danego parametru względem odpowiadającej temu stanowi powierzchni poślizgu, a nie wartością lokalnie zmierzoną. Dlatego w projektowaniu geotechnicznym wartość charakterystyczna powinna być pięcioprocentowym kwantylem średniej wytrzymałości mierzonej po powierzchni poślizgu. Taka wartość jest zazwyczaj różna od pięcioprocentowego kwantyla uzyskanego w wyniku rutynowego testowania podłoża.

Kolejnym istotnym czynnikiem jest fakt, że w projektowaniu geotechnicznym wykorzystuje się zwykle niewielką liczbę wyników testowania (z uwagi na wysokie koszty). W konsekwencji wartość średnia i odchylenie standardowe danego parametru, otrzymane w wyniku rozpoznania geotechnicznego, mogą nie być zbliżone do, odpowiednio, wartości oczekiwanej i odchylenia standardowego dla parametru związanego z obszarem podłoża odpowiedzialnym za powstanie stanu granicznego.

Ze względu na przytoczone wyżej argumenty często proponuje się (np. Orr i Breysse [2008]) wyznaczanie wartości charakterystycznej na podstawie znanego wzoru na przedział ufności dla wartości oczekiwanej. W przypadku gdy odchylenie standardowe populacji nie jest znane, wzór ten przyjmuje następującą postać [Fisz 1967]:

$$X_k = m(X) - \frac{t}{\sqrt{N}} s(X) \tag{5}$$

gdzie:

$$m(X) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i \tag{6}$$

$$s(X) = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} \left(x_i - m(X)\right)^2} \tag{7}$$

są estymatorami odpowiednio wartości oczekiwanej oraz odchylenia standardowego (estymator nieobciążony). Wartość t otrzymuje się z dystrybuanty rozkładu Studenta [Student 1909], w zależności od liczebności próby oraz poziomu ufności. W nawiązaniu do pięcioprocentowego kwantyla, sugerowanego przez Eurokod 7 [PN-EN 1990:2000], poziom ufności należy przyjąć jako 95%.

Jako uproszczoną formę wzoru (5) można potraktować propozycję Schneidera [1997]:

$$X_k = m(X) - 0,5 s(X) \tag{8}$$

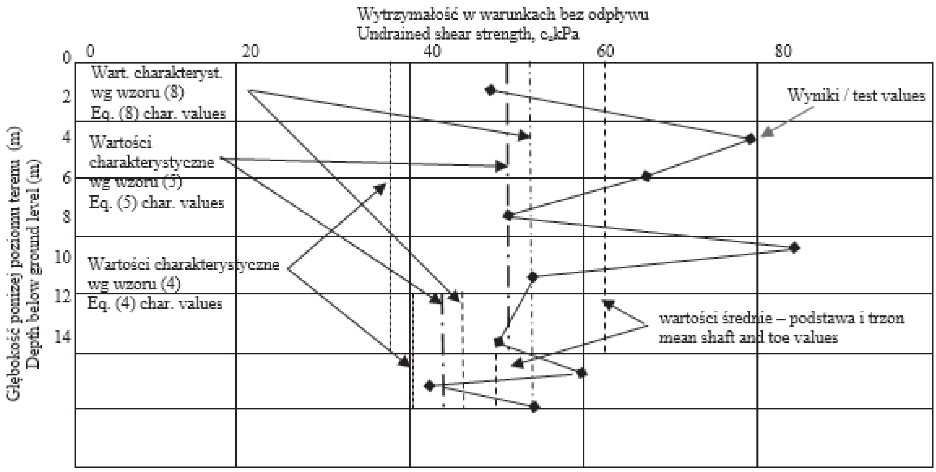
przy czym zastosowano oznaczenia jak we wzorze (5).

Inną uproszczoną propozycję podał Duncan [2000]. Propozycja ta bazuje na tzw. regule 3-sigma, która stwierdza, że prawdopodobieństwo pojawiania się wartości spoza przedziału $\left[\mu(X) - 3\sigma(X), \mu(X) + 3\sigma(X)\right]$ jest małe (w przypadku rozkładu normalnego wynosi ono w przybliżeniu 0,0027). W związku z tym dla ograniczonych zmiennych losowych, których wartości koncentrują się w przedziale $[X_{min}, X_{max}]$, można w przybliżeniu przyjąć, że:

$$\sigma(X) \approx \frac{1}{6}\left(X_{\max} - X_{\min}\right) \tag{9}$$

Według Duncana wartość charakterystyczną X_k można obliczyć ze wzoru (4), szacując jednocześnie odchylenie standardowe zgodnie ze wzorem (9).

Łatwo domyślić się, że obliczenia według wzorów (4), (5), (8) oraz propozycji Duncana prowadzą do różnych wartości charakterystycznych. Ilustruje to przykład zaczerpnięty z pracy Orr i Breysse [2008]. Na rysunku 2 zaznaczono wyniki 10 testów wytrzymałości na ścinanie, c_u (badania trójosiowe w warunkach bez odpływu).



Rys. 2. Wyniki badań oraz wartości charakterystyczne otrzymane według różnych wzorów
Fig. 2. Test results and characteristic values obtained using different equations

Próby pochodziły z różnych otworów i różnych głębokości z miejsca, w którym planowano wykonanie pali długości 10 m. Załóżmy, że sposób testowania i dokładność pomiaru wnoszą małe błędy, które mogą być pominięte. Jak to wynika z rysunku, siedem wyników dotyczy strefy pobocznicy pala, a cztery – strefy podstawy pala (jeden z pomiarów może być zaliczony zarówno do pierwszej, jak i do drugiej grupy). Wartość średnia z próby (wzór 6) dla pierwszej strefy (pobocznica) wynosi $m(c_{u,s}) = 61$ kPa, a dla strefy drugiej (podstawa) – $m(c_{u,t}) = 50$ kPa. Odchylenia standardowe obliczone według estymatora nieobciążonego (7) wynoszą odpowiednio: $s(c_{u,s}) = 14{,}3$ kPa oraz $s(c_{u,t}) = 6{,}6$ kPa. Jeśli założyć, że obliczone powyżej wielkości są odpowiednio wartościami oczekiwanymi i odchyleniami standardowymi w obu populacjach, to wartości charakterystyczne można by wyznaczyć według wzoru (4), co prowadzi do następujących wyników:

– wartość charakterystyczna wytrzymałości na ścinanie w okolicy pobocznicy pala $c_{u,s;k} = 37{,}5$ kPa,
– wartość charakterystyczna wytrzymałości na ścinanie w okolicy podstawy pala $c_{u,t;k} = 39{,}2$ kPa.

Powyższe wartości zaznaczono na rysunku 2. Jak łatwo zauważyć, nie są satysfakcjonujące, gdyż każda z nich jest mniejsza od najmniejszej wartości uzyskanej z pomiarów. Ponadto obliczona wyżej wartość charakterystyczna wytrzymałości dla obszaru wokół podstawy pala ($c_{u,t;k}$) jest większa od wartości wytrzymałości w sąsiedztwie trzonu pala ($c_{u,s;k}$). Można podejrzewać, że obliczone wartości są niewłaściwe z dwóch powodów.

Po pierwsze liczebność próby jest zbyt mała, aby uznać, że wartości $s(c_{u,s})$ oraz $s(c_{u,t})$ są bliskie odchyleniom standardowym rozpatrywanych populacji. Po drugie obszar podłoża, z którego pobierane były próby, mógł być zbyt mały w stosunku do obszaru, który obejmowałyby strefy awarii (linie poślizgu).

Jeśli do oceny wartości charakterystycznych użyć wzoru (5), to – biorąc pod uwagę, że przy $N = 7$ wartość statystyki wyniesie $t = 1,943$, a przy $N = 4$ – $t = 2,353$ – oszacowania wartości charakterystycznych obu wytrzymałości wyniosą odpowiednio:

$c_{u,s;k} = 50,5$ kPa oraz $c_{u,t;k} = 42,3$ kPa (wartości zaznaczono na rys. 2).

Korzystając z propozycji Schneidera (8), uzyskuje się:

$c_{u,s;k} = 53,9$ kPa oraz $c_{u,t;k} = 46,7$ kPa.

Natomiast propozycja Duncana prowadzi do:

$c_{u,s;k} = 50,86$ kPa oraz $c_{u,t;k} = 45,61$ kPa.

Jak widać, oszacowania wartości charakterystycznych według wzorów (5), (8) i propozycji Duncana są do siebie zbliżone. Znacznie jednak odbiegają od oszacowania według wzoru (4).

Oszacowania wartości charakterystycznych według wzorów (5), (8) oraz według Duncana można określić mianem „oszacowań statystycznych”. Jednak oszacowania statystyczne mogą okazać się wątpliwe, gdy liczba wyników badań danego parametru jest mała. W takiej sytuacji wcześniej uzyskana wiedza dotycząca charakterystyk podłoża w lokalnych warunkach może być wykorzystana jako informacja *a priori* zastosowania procedury bayesowskiej, jak to zaproponowano w pracach Ovesen i Denver [1994] oraz Cherubini i Orr [1999]. Jak to wynika ze wzoru (4), kluczową informacją dla statystycznego oszacowania wartości charakterystycznej jest znajomość współczynnika zmienności $V(X)$ rozpatrywanego parametru. W związku z tym Cherubini i Orr [1999] podali orientacyjne wartości takich współczynników, które mogą być przyjęte jako współczynniki zmienności *a priori* w sytuacji, gdy nie ma żadnych informacji dotyczących warunków lokalnych. Przykładowe wartości zamieszczono w tabeli 1.

Tabela 1. Typowe zakresy współczynnika zmienności dla wybranych parametrów gruntu
Table 1. Typical range of coefficient of variation for soil properties

Parametr X Parameter X	Typowy zakres $V(X)$ Tipical range of $V(X)$	Rekomendowana wartość $V(X)$ w przypadku małej liczby wyników badań Recommended value of $V(X)$ in the case of small number of test results
$\tan\varphi'$	0,05–0,15	0,1
c'	0,20–0,40	0,4
c_u	0,20–0,40	0,3
γ (ciężar objętościowy – unit weight)	0,01–0,10	0

Jak już wcześniej zauważono, istotny wpływ na oszacowanie wartości charakterystycznej ma wielkość obszaru, z którego pobierane są próby gruntu. Obszar ten powinien obejmować strefy uczestniczące w mechanizmie zniszczenia (powierzchnie poślizgu) prowadzącym do awarii. Taka sytuacja jest odzwierciedleniem przestrzennej zmienności właściwości podłoża. Koncepcję uwzględniającą przestrzenną zmienność parametru przy wyznaczaniu wartości charakterystycznej zaproponował Schneider [2011]. Omówienie propozycji Schneidera poprzedzone zostanie krótką charakterystyką metody uśrednień lokalnych.

CHARAKTERYZACJA WŁAŚCIWOŚCI GRUNTU ZA POMOCĄ TEORII PÓL LOSOWYCH

Koncepcja probabilistycznej charakteryzacji właściwości podłoża za pomocą pól losowych została w sposób efektywny opracowana w pracach Vanmarcke'a [1977, 1983]. Zakłada ona, że dana właściwość jest polem losowym (funkcją losową) $X(x,\omega),\ x\in R^3,\ \omega\in\Omega$, przy czym Ω jest pewną przestrzenią probabilistyczną (dla uproszczenia w dalszej części stosowane będzie oznaczenie $X(x)$). Tak więc w każdym punkcie obszaru podłoża gruntowego właściwość charakteryzowana jest przez osobną zmienną losową. Pełna charakteryzacja pola losowego dana jest poprzez rozkłady skończenie wymiarowe [Gikhman i Skorokhod 1968]. Najczęściej jednak opis ogranicza się do podania funkcji wartości oczekiwanej oraz funkcji kowariancji:

$$\mathrm{Cov}(x,y)=\mathrm{E}\left\{\left[X(x)-\mathrm{E}\{X(x)\}\right]\left[X(y)-\mathrm{E}\{X(y)\}\right]\right\} \tag{10}$$

przy czym E oznacza operator wartości oczekiwanej.

Do opisu właściwości podłoża stosuje się pola stacjonarne w szerszym sensie, tj. takie, w których funkcja wartości oczekiwanej jest stała, a funkcja kowariancji jest niezmiennicza na przesunięcia, czyli spełnia warunek:

$$\mathrm{Cov}(x+h,y+h)=\mathrm{Cov}(x,y),\quad \forall h\in R \tag{11}$$

Ponieważ $\mathrm{Var}(X(x))=\mathrm{Cov}(x,x)$, zatem warunek (11) oznacza, że w stacjonarnym polu losowym wariancja jest stała. Czyli w polu stacjonarnym zarówno funkcja wartości oczekiwanej, jak i funkcja wariancji są stałe, tj. $\mathrm{E}\{X(x)\}=\mu(X)=\mu$ oraz $\mathrm{Var}(X(x))=\sigma^2(X)=\sigma^2$. W polach stacjonarnych alternatywnie do funkcji kowariancji stosuje się funkcję korelacji $\rho(x, y)$, zwaną też funkcją autokorelacji. Obie funkcje są związane ze sobą poprzez prostą proporcję, a mianowicie:

$$\rho(x,y)=\frac{\mathrm{Cov}(x,y)}{\sigma^2} \tag{12}$$

Vanmarcke [1977] zaproponował skalę fluktuacji δ (równoważne określenia to: promień korelacyjny, odległość korelacyjna lub długość korelacyjna) jako wygodną charakterystykę zmienności przestrzennej rozpatrywanej właściwości gruntu (traktowanej jako pole losowe). Skalę fluktuacji określa się jako całkę z funkcji korelacji. W przypadku jednowymiarowym mamy:

$$\delta = \frac{2}{\sigma^2}\int_0^\infty \mathrm{Cov}(\Delta x)\,d\Delta x = 2\int_0^\infty \rho(\Delta x)\,d\Delta x \tag{13}$$

gdzie Δx oznacza przyrost argumentu x, czyli odległość między dwoma punktami pola w określonym kierunku.

Skala fluktuacji jest miarą szybkości zmienności pola losowego, a jej wartość często interpretuje się jako przybliżoną odległość między punktami pola, poza którą wzajemna korelacja właściwości staje się nieistotna. Co ważne, skala fluktuacji może być wyznaczana na podstawie wyników badań podłoża. Vanmarcke [1977] zaproponował sposób jej określania, który następnie był modyfikowany przez innych autorów (np. Wickremesinghe i Campanella [1993]).

Jednym z ważniejszych elementów koncepcji Vanmarcke'a jest tzw. uśrednienie przestrzenne (alternatywnie uśrednienie lokalne). Jest ono konsekwencją założenia, że o awarii nie decyduje wartość parametru podłoża w danym punkcie, lecz średnia wartość tego parametru z masywu gruntu związanego z mechanizmem awarii. Przestrzenne (lokalne) uśrednienie, zastosowane przez Vanmarcke'a [1977], polega na wprowadzeniu nowego pola (tzw. pola o ruchomej średniej) określonego jako:

$$X_V = \frac{1}{|V|}\int_V X(x)\,dx \tag{14}$$

przy czym $|V|$ jest miarą (objętością, powierzchnią) rozpatrywanego obszaru.

Jak łatwo zauważyć, X_V jest zmienną losową określającą pewną średnią pola X w obszarze V. Nowa rodzina zmiennych losowych (proces o ruchomej średniej) indeksowana jest rodziną rozpatrywanych obszarów $\{V\}$. Dzięki własności stacjonarności pole losowe X_V ma taką samą wartość oczekiwaną jak X, ale zmienia się jego wariancja, którą można zapisać w postaci:

$$\mathrm{Var}[X_V] = \sigma_V^2 = \gamma(V)\,\sigma_X^2 \tag{15}$$

Wzór (15) definiuje funkcję $\gamma(V)$, tzw. funkcję wariancji (zwaną też funkcją redukcji wariancji), określającą zmiany wariancji punktowej σ_X^2 po zastosowaniu uśrednienia przestrzennego. W przypadku jednowymiarowym zależność między funkcją wariancji a funkcją korelacji jest następująca:

$$\gamma(L) = \frac{2}{L}\int_0^L \left(1 - \frac{\Delta x}{L}\right)\rho(\Delta x)\,d\Delta x \tag{16}$$

We wzorze (16) zamiast objętości $|V|$ występuje długość prostoliniowego odcinka L. Można wykazać [Vanmarcke 1983], że między skalą fluktuacji a funkcją wariancji zachodzi następująca zależność:

$$\delta = \lim_{L\to\infty} L\gamma(L) \tag{17}$$

przy założeniu, że granica z prawej strony równości (17) istnieje.

KONCEPCJA SCHNEIDERA DOTYCZĄCA OKREŚLANIA WARTOŚCI CHARAKTERYSTYCZNYCH

Jeśli rozkład prawdopodobieństwa rozpatrywanej właściwości gruntu jest inny od rozkładu normalnego, to wzór (4) powinien być napisany w postaci:

$$X_k = \mu(X)\left(1 - kV(X)\right) \tag{18}$$

gdzie *k* jest czynnikiem definiującym pięcioprocentowy kwantyl z rozkładu tej właściwości.

Schneider [2011] zaproponował, aby we wzorze (18) współczynnik zmienności $V(X)$ rozpatrywanego rozkładu zastąpić przez „globalny" współczynnik zmienności $V_t(X)$ zdefiniowany wzorem:

$$V_t(X) = \sqrt{\gamma(V)\left[V_{in}(X)\right]^2 + \left[V_m(X)\right]^2 + \left[V_{tr}(X)\right]^2 + \left[V_s(X)\right]^2} \tag{19}$$

gdzie: $V_{in}(X)$ – współczynnik zamienności związany z niepewnością naturalną (rys. 1),
$V_m(X)$ – współczynnik zamienności związany z błędami pomiarów (rys. 1),
$V_{tr}(X)$ – współczynnik zamienności związany z niepewnością transformacji danych (rys. 1),
$V_s(X)$ – współczynnik zamienności związany z ograniczoną liczbą danych (niepewność statystyczna (rys. 1),
$\gamma(V)$ – funkcja redukcji wariancji (wzór 15).

Warto zauważyć, że tak zdefiniowany „globalny" współczynnik zmienności uwzględnia wszystkie podstawowe rodzaje niepewności związane z właściwościami gruntu wymienione we wstępie, a ponadto bierze pod uwagę uśrednienie właściwości ze względu na obszar mechanizmu awarii poprzez zastosowanie funkcji redukcji wariancji. Podstawienie współczynnika $V_t(X)$ w miejsce $V(X)$ we wzorze (18), a także zastąpienie wartości oczekiwanej $\mu(X)$ przez średnią z próby $m(X)$ prowadzi do następującej formuły na określenie wartości charakterystycznej:

$$X_k = m(X)\left(1 - k\sqrt{\gamma(V)\left[V_{in}(X)\right]^2 + \left[V_m(X)\right]^2 + \left[V_{tr}(X)\right]^2 + \left[V_s(X)\right]^2}\right) \tag{20}$$

Ponadto Schneider proponuje zastosowanie uproszczonej formuły do oceny funkcji redukcji wariancji (proponowanej też w pracach Vanmarvke'a i stosowanej później w pracy Phoon i Kulhawy [1999]:

$$\gamma(V) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad |V| \le \delta \\ \dfrac{\delta}{|V|} & \text{dla} \quad |V| > \delta \end{cases} \tag{21}$$

Aby otrzymać przybliżoną formułę dla celów projektowania, proponowane są kolejne uproszczenia. Jeśli założyć, że $V_{tr}(X) = 0$, co ma miejsce na przykład w przypadku bezpośredniego pomiaru danej cechy w laboratorium, a także $V_s(X) = \dfrac{V_{in}(X)}{n}$, gdzie *n* jest liczebnością próby, to w przypadku rozkładu normalnego danej cechy (k = 1,645) wzór (20) redukuje się do postaci:

$$X_k = m(X)\left(1 - 1,645\sqrt{\left(\frac{\delta}{|V|} + \frac{1}{n}\right)\left[V_{in}(X)\right]^2 + \left[V_m(X)\right]^2}\right) \tag{22}$$

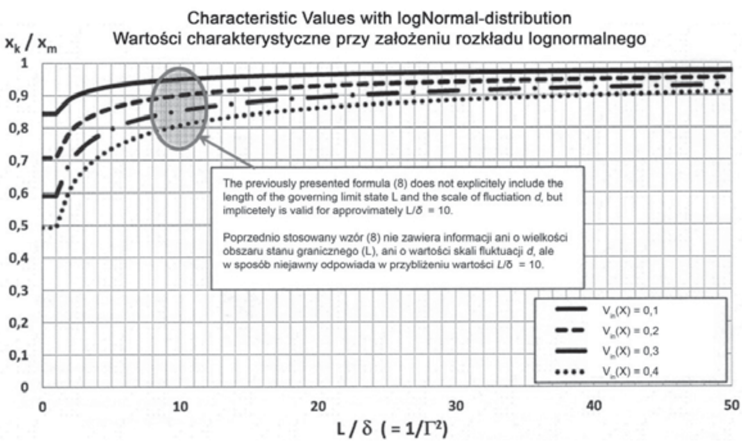
Jeśli ponadto błąd pomiarowy oraz błąd statystyczny są do pominięcia, to formuła staje się jeszcze prostsza:

$$X_k = m(X)\left(1 - 1,645 V_{in}(X)\sqrt{\frac{\delta}{|V|}}\right) \tag{23}$$

Zdaniem Schneidera akceptowanie rozkładu normalnego dla właściwości gruntu jest możliwe tylko wówczas, gdy $V_{in}(X)$ < 0,3. W przypadku większych współczynników zmienności lepiej jest przyjąć rozkład lognormalny, a wówczas wzór (23) zredukuje się do postaci:

$$X_k = m(X)\frac{0,193^{\sqrt{\ln\left(1+\frac{\delta}{|V|}\left[V_{in}(X)\right]^2\right)}}}{\sqrt{1+\frac{\delta}{|V|}\left[V_{in}(X)\right]^2}} \tag{24}$$

W zakresie współczynników zmienności $V_{in}(X) \le 0,15$ dają zbliżone rezultaty. Wzory (23) i (24) z pewnością wychodzą naprzeciw postulatowi uwzględnienia zamienności rozpatrywanej właściwości w obszarze podlegającemu mechanizmowi awarii. Trzeba jednak pamiętać, że aby z nich skorzystać, konieczna jest znajomość objętości (powierzchni, długości) obszaru związanego z postacią awarii, a także skali fluktuacji δ. Wpływ obu tych czynników na wartość charakterystyczną cech w przypadku rozkładu lognormalnego pokazano na rysunku 3.



Rys. 3. Nomogram do wyznaczania wartości charakterystycznych według wzoru (24) [Schneider 2011]

Fig. 3. Graphical determination of characteristic values according to equation (24) [Schneider 2011]

PRZYKŁAD

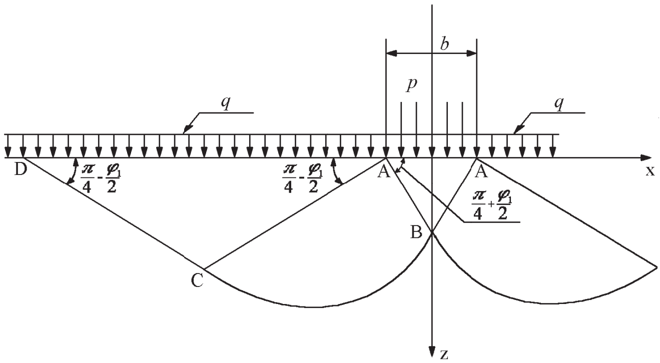
Oszacowania skali fluktuacji δ dla różnych gruntów i dla różnych ich właściwości są podawane w pracach wielu autorów. Cherubini [1997] dokonał obszernej analizy tych prac. Przykładowe wartości przedstawiono w tabeli 2.

Tabela 2. Wartości skali fluktuacji dla pionowej zmienności parametrów [Cherubini 1997]
Table 2. Examples of vertical fluctuation scale values [Cherubini 1997]

Właściwość Soil property	δ_v [m]
Wilgotność naturalna Natural water content	1,2
Wskaźnik porowatości, *e* Void ratio, *e*	3,05
Wytrzymałość na ścinanie w warunkach bez odpływu Undrained shear strength	0,8–5,00
Opór stożka sondy (w piasku) Cone resistance (in sand)	0,25–2,20
Opór stożka sondy (glina pylasta) Cone resistance (silty clay)	0,40–2,5

Wartości δ_v podane w tabeli charakteryzują zmienność w kierunku pionowym (zmiana wraz z głębokością). Okazuje się jednak [Cherubini 1997], że w kierunku poziomym wartości skali fluktuacji δ_h są dużo większe – około 10–30 razy.

Aby zorientować się, jakie wartości charakterystyczne otrzymuje się według propozycji podanej w poprzednim punkcie, rozpatrzmy następujący przykład. Na potrzeby obliczania nośności fundamentu posadowionego na glinie poszukuje się wartości charakterystycznych kąta tarcia wewnętrznego i spójności (w warunkach z odpływem). Jeśli oceny nośności dokonywane są na podstawie mechanizmu Prandtla, to lokalne uśrednienia należy przeprowadzić z uwzględnieniem linii poślizgu, jak pokazano na rysunku 4. Przyjmijmy założenia, że pole losowe spójności i pole losowe kąta tarcia wewnętrznego są stacjonarne i normalne (współczynniki zmienności równe 0,15), o wartościach oczekiwanych i odchyleniach standardowych równych odpowiednio: $E\{\varphi 1(x)\} = 18°$, $E\{c(x)\} = 31$ kPa, $\sigma_{\varphi 1}(x) = 2{,}7°$, $\sigma_c(x) = 4{,}65$ kPa. Skala fluktuacji w kierunku pionowym wynosi w obu przypadkach $\delta = 1{,}0$ m. Do oszacowania wartości charakterystycznej przyjmijmy wzór (23). Jeśli zastosować jedynie skalę fluktuacji w kierunku pionowym, to uśrednienia należy dokonać także tylko w kierunku pionowym. Oznacza to, że miara obszaru uśrednienia $|V|$ będzie równa maksymalnej rzędnej spirali logarytmicznej na odcinku BC. Rzędna ta w przybliżeniu jest równa 1,7*b*, gdzie *b* jest szerokością fundamentu. Wobec tego mnożnik redukcyjny we wzorze (23) jest równy $\sqrt{\frac{\delta}{|V|}} = \frac{1}{\sqrt{1,7b}}$. Tym samym wartości charakterystyczne będą zależne od szerokości fundamentu *b*. Wartości te ze zestawiono w tabeli 3.



Rys. 4. Linie poślizgu w mechanizmie Prandtla; *b* – szerokość fundamentu, φ_1 – kąt tarcia wewnętrznego pod podstawą fundamentu

Fig. 4. Slip lines in Prandtl's mechanism; *b* – foundation width, φ_1 – the angle of internal friction

Tabela 3. Wartości charakterystyczne spójności i kąta tarcia wewnętrznego otrzymane według oszacowania (23)

Table 3. Characteristic values of cohesion and angle of internal friction evaluated by means of equation (23)

Szerokość fundamentu, *b* [m] Foundation width, *b* [m]	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4
Spójność, c_k [kPa] Cohesion, c_k [kPa]	25,64	26,04	26,36	26,63	26,85	27,04	27,21
Kąt tarcia wewnętrznego, φ_k [°] Angle of internal friction, φ_k [°]	14,89	15,12	15,31	15,46	15,59	15,70	15,80

Zmiany wartości charakterystycznych w zależności od szerokości fundamentu są konsekwencją tego, że wraz ze wzrostem szerokości zwiększa się miara obszaru uśrednienia, co powoduje coraz mniejszą wartość funkcji redukcji wariancji. Powyższe oszacowanie wartości charakterystycznych może budzić wątpliwości z dwóch powodów. Po pierwsze ze względu na uproszczoną funkcję redukcji wariancji (wzór 21), a po drugie ze względu na jednowymiarowy charakter uśrednienia, który nie pozwala na uwzględnienie anizotropii pola losowego (skala δ_h jest dużo większa niż δ_v). Dlatego warto zanalizować powyższy przykład przy nieco bardziej adekwatnych założeniach. Przyjmijmy zatem, że rozpatrywane pole losowe jest anizotropowe z funkcją korelacji postaci:

$$\rho(\Delta x, \Delta z) = \sigma_X^2 \exp\left\{-\left[\left(\frac{\Delta z\sqrt{\pi}}{\delta_v}\right)^2 + \left(\frac{\Delta x\sqrt{\pi}}{\delta_h}\right)^2\right]\right\} \tag{25}$$

Uśrednienia dokonywane będą wzdłuż linii poślizgu, a więc kolejno po liniach AB, BC i CD (rys. 4). W tym przypadku funkcja redukcji wariancji nie da się przedstawić w zamkniętej postaci, a więc mnożnik redukujący współczynnik zmienności będzie inny niż we wzorze (23). Redukcję wariancji wyznaczaną na podstawie funkcji kowariancji w polu uśrednionym można znaleźć w pracach Puła [2004, 2007]. Jak poprzednio załóżmy, że pionowa skala fluktuacji wynosi 1 m, tj. $\delta_v = 1$ m, natomiast skalę poziomą przyjmijmy 10-krotnie większą, tj $\delta_h = 10$ m. Wartość oczekiwana i odchylenie standardowe pozostają takie same. Zredukowane odchylenia standardowe kąta tarcia wewnętrznego i spójności zestawiono w tabeli 4 [Puła 2007].

Tabela 4. Zredukowane odchylenia standardowe kąta tarcia wewnętrznego i spójności [Puła 2007]
Table 4. Reduced standard deviations for angle of internal friction and cohesion [Puła 2007]

Szerokość fundamentu *b* [m] Foundation width, *b* [m]	Zredukowane odchylenie standardowe kąta, φ [°] Reduced standard devition of the friction angle, φ [°]			Zredukowane odchylenie standardowe spójności, *c* [kPa] Reduced standard deviation of cohesion, *c* [kPa]		
	odcinek AB	odcinek BC	odcinek CD	odcinek AB	odcinek BC	odcinek CD
1,2	2,341	2,564	2,226	4,031	4,415	3,834
1,4	2,253	2,522	2,126	3,880	4,343	3,662
1,6	2,169	2,478	2,034	3,735	4,267	3,503
1,8	2,090	2,432	1,950	3,599	4,188	3,359
2,0	2,016	2,386	1,875	3,472	4,109	3,229
2,2	1,948	2,340	1,806	3,355	4,030	3,111
2,4	1,886	2,294	1,744	3,248	3,951	3,004

Zredukowana wartość odchylenia standardowego po podzieleniu przez początkową wartość odchylenia standardowego (bez redukcji) będzie współczynnikiem redukcyjnym, który zastąpi mnożnik $\sqrt{\frac{\delta}{|V|}}$ we wzorze (23). Ponieważ na każdym z odcinków AB, BC, CD zredukowane odchylenie jest inne, więc do dalszych obliczeń przyjęto odchylenia największe (najmniejszy współczynnik redukcyjny), czyli te dla odcinka BC (spirala logarytmiczna). Jest to podejście konserwatywne, gdyż w tym przypadku otrzymuje się najmniejsze wartości charakterystyczne. Obliczone wartości charakterystyczne zamieszczono w tabeli 5.

Tabela 5. Wartości charakterystyczne spójności i kąta tarcia wewnętrznego otrzymane poprzez uśrednienie dwuwymiarowe
Table 5. Characteristic values of cohesion and angle of internal friction evaluated by means two-dimensional spatial averaging

Szerokość fundamentu, *b* [m] Foundation width, *b* [m]	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4
Współczynnik redukcyjny Reduction factor	0,9496	0,9341	0,9178	0,9007	0,8837	0,8667	0,8496
Spójność, c_k [kPa] Cohesion, c_k [kPa]	23,74	23,85	23,98	24,11	24,24	24,37	24,5
Kąt tarcia wewnętrznego, φ [°] Angle of internal friction, φ [°]	13,78	13,85	13,92	14,0	14,08	14,15	14,23

Otrzymane wartości charakterystyczne są mniejsze niż w przypadku oszacowania według wzoru Schneidera (tab. 3). Różnice nie przekraczają 11%. W przypadku uśrednienia dwuwymiarowego zależność wartości charakterystycznej od szerokości fundamentu jest mniejsza w stosunku do przypadku oszacowania według Schneidera.

Oszacowanie konserwatywne, polegające na przyjęciu do obliczeń najmniejszego z trzech współczynników redukcyjnych, można zastąpić oszacowaniem, w którym współczynnik redukcyjny będzie średnią ważoną współczynników na poszczególnych odcinkach z wagami w postaci długości poszczególnych odcinków. W tym przypadku wartości charakterystyczne mieszczą się w przedziałach:

– dla spójności: 24,19–25,28 kPa (w zależności od szerokości fundamentu),
– dla kąta tarcia wewnętrznego: 14,05–14,68°.

Te wartości są bliższe wartościom oszacowanym za pomocą wzoru (23).

PODSUMOWANIE

W Eurokodzie 7 cząstkowe współczynniki bezpieczeństwa, pozwalające obliczyć wartości obliczeniowe poszczególnych wielkości na podstawie ich wartości charakterystycznych, podane są arbitralnie i nie ma możliwości uwzględnienia w nich, przynajmniej w obecnej postaci, niepewności wynikającej z losowej zmienności właściwości podłoża gruntowego. Losowy charakter właściwości gruntu można uwzględnić jedynie w fazie określania wartości charakterystycznych. Jednak jak już na wstępie wspomniano, definicja wartości charakterystycznej podawana przez Eurokod 7 jest w wysokim stopniu rozmyta. W artykule przedstawiono kilka propozycji określania wartości charakterystycznych, tak aby uwzględniały one różne rodzaje niepewności, o których była mowa we Wstępie. Niewątpliwie bardzo istotnym postulatem jest uwzględnienie uśrednienia przestrzennego w obszarze towarzyszącym rozpatrywanemu mechanizmowi zniszczenia. Taką możliwość daje charakteryzacja właściwości podłoża za pomocą pól losowych. Jednak przedstawiony przykład wykazał, że wówczas wartości charakterystyczne w sposób istotny zależą od wielkości rozpatrywanego obszaru, co utrudnia ich wyznaczenie. Ponadto takie podejście wymaga znajomości skali fluktuacji, a to z kolei – dodatkowych badań podłoża lub pozyskania takiej informacji na podstawie badań archiwalnych. Co więcej, jak wykazano w pracach Puła [2004] oraz Vessia i inni [2009], istotny jest wpływ anizotropii pól losowych wynikającej z faktu, że skala fluktuacji w kierunku poziomym jest wielokrotnie większa niż w kierunku pionowym. Niemniej jednak korzystanie z teorii pól losowych przy wyznaczaniu wartości charakterystycznych wydaje się być właściwym krokiem. Badania w tym kierunku są nadal prowadzone.

Postanowienia normy PN-81/B-03020 w zakresie wartości charakterystycznych i obliczeniowych właściwości gruntu, przypomniane we Wstępie, prezentują podejście semi-probabilistyczne, w którym cząstkowe współczynniki bezpieczeństwa wyznaczane są na podstawie podejścia statystycznego. Eurokod 7 takiej możliwości nie daje. W związku z tym nie daje on możliwości projektowania według teorii niezawodności i uniemożliwia ocenę bezpieczeństwa fundamentów na jednakowych zasadach w stosunku do pozostałych elementów konstrukcji, tak jak sugeruje to Eurokod [PN-EN 1990]. W dalszym ciągu projektowanie według metod teorii niezawodności (*reliability based design*) ma swoje miejsce w geotechnice [Phoon 2008 (red.), Fenton i Griffiths 2008], zwłaszcza w krajach, gdzie nie obowiązują Eurokody (np. Kanada, Australia, Stany Zjednoczone czy Norwegia), a w niektórych krajach, gdzie wprowadzono Eurokody, służy jako narzędzie sprawdzające (Holandia, Szwajcaria). Wynika to z faktu, że podejście probabilistyczne jest obecne w projektowaniu konstrukcji stalowych czy żelbetowych, a więc trudno uciec od niego w projektowaniu geotechnicznym, jeśli chce się mieć jednolite miary bezpieczeństwa dla całości obiektu.

Autor niniejszej pracy ma nadzieję, że metody probabilistyczne „powrócą do łask" w przyszłych modyfikacjach Eurokodu 7 lub normatywach, które go zastąpią.

PIŚMIENNICTWO

Cherubini C., 1997. Data and consideration on the variability of geotechnical properties of soils. Proceedings of the ESREL Conference, Lisboa, 1538–1591.

Cherubini C., Orr T.L.L., 1999. Considerations on the applicability of semi-probabilistic Bayesian methods to geotechnical design. Proceedings XX Convegno Nazionale di Geotecnica, Parma. Associatione Geotechnica Italiana, 421–426.

Duncan J.M., 2000. Factors of safety and reliability in geotechnical Engineering. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE 126 (4), 307–316.

Fenton G.A., Griffiths D.V., 2008. Risk Assessment in Geotechnical Engineering. John Wiley & Sons, New York.

Fisz M., 1967. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna. PWN, Warszawa.

Gikhman I.I., Skorokhod A.W., 1968. Wstęp do teorii procesów stochastycznych. PWN, Warszawa.

Orr T.L.L., Breysse D., 2008. Eurocode 7 and reliability-based design. In: Reliability Based Design in Geotechnical Engineering.Taylor & Francis, London and New York.

Ovesen N.K., Denver H., 1994. Assesment of characteristic values of soil parameters for design. Proceedings XIII Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, New Delhi. Balkema, 1, 427–460.

Phoon K.K. (ed.), 2008. Reliability-Based Design in Geotechnical Engineering. Taylor & Francis, London and New York.

Phoon K.K., Kulhawy F.H., 1999. Evaluation of geotechnical property variability. Canadian Geotechnical Journal 36 (4), 625–639.

PN-81/B-03020 1981 Grunty budowlane. Posadowienie bezpośrednie budowli. Obliczenia statyczne i projektowanie.

PN-EN 1990:2000 Eurokod. Podstawy projektowania konstrukcji.

PN-EN 1997-1:2008 Eurokod 7. Projektowanie geotechniczne.

Puła W., 2004. Zastosowania teorii niezawodności konstrukcji do oceny bezpieczeństwa fundamentów. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław.

PułaW., 2007. On some aspects of reliability computations in bearing capacity of shallow foundations. In: Probabilistic Methods in Geotechnical Engineering. Springer, Wien, New York.

Schneider H.R., 1997. Definition and determination of characteristic soil properties. Proceedings XII International Conference on Soil Mechanics and Geotechnical Engineering, Hamburg. Balkemea, Rotterdam, 2271–2274.

Schneider H.R., 2011. Dealing with uncertainties in EC7 with emphasis on characteristic values. Proceedings of Workshop on Safety Concepts and Calibration of Partial Factors in European and North American Codes of Practice, Delft.

Student, 1908. The probable terror of a mean. Biometria 6, 1–25.

Vanmarcke E.H., 1977. Probabilistic Modeling of Soil Profiles. Journal of the Geotechnical Engineering Division, *ASCE*, 103, GT11, 1227–1246.

Vanmarcke E.H., 1983. Random Fields-Analysis and Synthesis. MIT Press, Cambridge.
Vessia G., Cherubini C., Pieczyńska J., Puła W., 2009. Application of random finite element method to bearing capacity design of strip footing. Journal of GeoEngineering 4 (3), 103–112.
Wickremesinghe D., Campanella R.G., 1993. Scale of fluctuation as a description of soil variability. Proceedings of the Conference on Probabilistic Methods in Geotechnical Engineering, Canberra, 233–239.

ON SOME ISSUES OF CHARACTERISTIC VALUES EVALUATIONS IN GEOTECHNICS

Abstract. The paper presents various possibilities of evaluating characteristic values of soil properties in the context of Eurocode 7 recommendations. Some simplest approaches have been illustrated by computing and comparing resulting of characteristic values. Next the very basic concepts of random fields and spatial averaging were introduced. Consecutively, as application, the Schneider method has been demonstrated and applied to bearing capacity problem incorporating Prandtl's mechanism. The obtained results were compared with evaluation based on spatial averaging along slip lines (in Prandtl's mechanism). It appears that random field approach in conjunction with Schneider's method gave satisfactory results considering Eurocode 7 requirements. It has been pointed out that probabilistic approach in selecting parameters for geotechnical design plays a vital role in safety evaluation.

Key words: Eurocode 7, coefficient of variation, random field, fluctuation scale, variance reduction function

Zaakceptowano do druku – Accepted for print: 5.02.2014