

PRZEWODNICTWO CIEPLNE W OŚRODKACH PERIODYCZNIE WIELOSKŁADNIKOWYCH

Marcin Piwowski

Ministerstwo Spraw Wewnętrznych, Warszawa

Streszczenie. W pracy wyprowadzono model uśredniony przewodnictwa cieplnego dla przewodników wieloskładnikowych, warstwowych i szkieletowych. Opisano metodę doboru funkcji kształtu dla zagadnień brzegowo-początkowych. Rozwiązano wybrane zagadnienia niestacjonarne wraz z określeniem wpływu zmiennych wartości współczynnika przewodności cieplnej oraz zmiennych wymiarów komórki periodyczności na przewodnictwo cieplne.

Słowa kluczowe: przewodnictwo cieplne, przewodniki wieloskładnikowe, modele uśrednione

WSTĘP

Przewodnictwo cieplne jest podstawowym procesem, opisującym przepływ energii cieplnej z miejsc o temperaturze wyższej do miejsc o temperaturze niższej. Opisem formalnym przewodnictwa cieplnego jest odpowiednio przyjęty model konstytutywny, ustalający relację między strumieniem ciepła a gradientem temperatury. Model przewodnictwa cieplnego w ciałach stałych powstaje poprzez powiązanie relacji konstytutywnej z odpowiednią relacją bilansu energii, wynikającą z pierwszej zasady termodynamiki.

Z matematycznego punktu widzenia teoria przewodnictwa cieplnego prowadzi do badania układu równań różniczkowych cząstkowych. Związki te, jako pierwszy, dla ciał nieodkształcalnych przedstawił Fourier (1822), zakładając, że wektor strumienia ciepła jest wprost proporcjonalny do gradientu temperatury, a współczynnik proporcjonalności nazwał współczynnikiem przewodnictwa cieplnego.

Dość szybko powstały uogólnienia tych związków, wynikające z obserwacji, że stałe termiczne zależą od położenia (niejednorodność), kierunku (anizotropia) czy sprzężenia z innymi polami, na przykład mechanicznymi (termomechanika). Literatura poświęcona

¹Adres do korespondencji – Corresponding author: Marcin Piwowski, Ministerstwo Spraw Wewnętrznych, Departament Nadzoru, ul. Stefana Batoiego 5, 02-591 Warszawa, e-mail: marcinpiwowski@wp.pl

tej tematyce jest obszerna, można ją znaleźć w podstawowych monografiach (np. Nowacki i Olesiak [1991]).

Poszukiwanie rozwiązań analitycznych zagadnień początkowo-brzegowych dla ciał anizotropowych i niejednorodnych nawet w przypadku przewodnictwa cieplnego jest na ogół skomplikowane. W takich przypadkach poszukuje się rozwiązań numerycznych, przybliżonych. Możliwe jest także konstruowanie modeli prostszych, tj. modeli, w których relacje opisujące badane zjawiska pozwalają na łatwiejsze znalezienie rozwiązań bądź analitycznych, bądź numerycznych. Przykładem takiego modelowania może być traktowanie ciał niejednorodnych jako jednorodnych. Przybliżenie to jest dopuszczalne, gdy mamy do czynienia ze „słabą” niejednorodnością. Obecnie jednak coraz częściej stosuje się materiały „silnie” niejednorodne, takie jak na przykład kompozyty. Założenie upraszczające o jednorodności ciała trzeba w takim przypadku odrzucić.

W pracy rozważano przewodniki silnie niejednorodne, ograniczone jednak do takich, w których niejednorodność jest powtarzalna. W konsekwencji funkcje charakteryzujące ciało, takie jak ciepło właściwe i składowe tensora przewodnictwa cieplnego, będą funkcjami periodycznymi.

MODEL UŚREDNIONY PRZEWODNICTWA CIEPLNEGO

Konfiguracją odniesienia ciał rozważanych w pracy będzie obszar Ω , $\Omega \subset R^3$ w kartezjańskim układzie współrzędnych $0x_1x_2x_3$. Punkty w Ω oznaczać się będzie przez (x_1, x_2, x_3) lub x_k , $k = 1, 2, 3$.

Oznaczmy temperaturę przez $\theta : \Omega \times \langle t_0, t_1 \rangle \rightarrow R$ oraz strumień ciepła przez $q : \Omega \times \langle t_0, t_1 \rangle \rightarrow R^3$, gdzie $q_k = -K_{kl}\theta_{,l}$ oraz K_{kl} są składowymi tensora przewodnictwa cieplnego.

Paraboliczne równanie przewodnictwa cieplnego ma postać:

$$c\dot{\theta} - (K_{kl}\theta_{,l})_{,k} = f \quad (1)$$

Określone jest ono w każdym punkcie (x_1, x_2, x_3, t) obszaru $\Omega \times \langle t_0, t_1 \rangle$.

W tak sformułowanym opisie przewodnictwa cieplnego zagadnienie początkowo-brzegowe polega na znalezieniu funkcji θ spełniającej równanie (1) oraz następujące warunki:

- 1) dana jest temperatura w chwili t_0 , $\theta(x_1, x_2, x_3, t_0) = G(x_1, x_2, x_3)$, $(x_1, x_2, x_3) \in \Omega$;
- 2) dana jest temperatura na brzegu przewodnika, $\theta = H(x_1, x_2, x_3, t)$, $(x_1, x_2, x_3) \in \partial\Omega$, w każdej chwili $t \in \langle t_0, t_1 \rangle$;
- 3) dany jest gradient temperatury na brzegu $\partial\Omega$, $\theta_{,l}(x_1, x_2, x_3, t)$, $(x_1, x_2, x_3) \in \partial\Omega$ w każdej chwili $t \in \langle t_0, t_1 \rangle$;
- 4) dana jest funkcja $J(x_1, x_2, x_3, t) = \theta_{,l}(x_1, x_2, x_3, t) + g\theta(x_1, x_2, x_3, t)$, $(x_1, x_2, x_3) \in \partial\Omega$, $t \in \langle t_0, t_1 \rangle$, gdzie g jest wielkością stałą.

Równanie (1) z warunkami początkowo-brzegowymi 1–4, stanowią podstawowy układ relacji modelu Fouriera przepływu ciepła w ciele anizotropowym i niejednorodnym.

W dalszym ciągu będziemy rozważać klasę przewodników periodycznych, których konfiguracją odniesienia będzie obszar $\Omega = (0, L_1) \times (0, L_2) \times (0, L_3) \subset R^3$ i periodycz-

ność będzie płaska, tzn. taka sama w każdym przekroju x_3 , czyli w obszarze Π , gdzie $\Pi = (0, L_1) \times (0, L_2)$. Załóżmy ponadto, że powtarzającym się elementem jest prostokąt o wymiarach boków l_1 i l_2 .

W dalszym ciągu na oznaczenie zmiennej x_3 będziemy używać także z , $x_3 \equiv z$.

O tensorze przewodnictwa cieplnego założymy, że ma postać:

$$K_{kl}(x_1, x_2, z) = \begin{bmatrix} K_{11}(x_1, x_2) & K_{12}(x_1, x_2) & 0 \\ K_{21}(x_1, x_2) & K_{22}(x_1, x_2) & 0 \\ 0 & 0 & K_{zz}(x_1, x_2) \end{bmatrix}$$

Założmy też, że ciepło właściwe nie zależy od zmiennej z .

Do modelowania opisanych przewodników zastosujemy metodę parametrów mikrolokalnych zaproponowaną przez Woźniaka [1987]. Jest to metoda nieasymptotyczna, wykorzystująca aparat formalny analizy niestandardowej. Analiza niestandardowa należy do tego nurtu badań w matematyce, w którym rozważa się, co matematyka utraciła, odrzucając, w wyniku fascynacji formalizmem epsilonowo-deltowym, takie pojęcia, jak: monada, nieskończenie mała czy nieskończenie wielka. Ten nurt badań jest umotywowany warunkami fenomenologicznymi, biorącymi się z obserwacji rzeczywistości, takimi jak: opis świata niekoniecznie musi być ciągły, wątpliwe, czy istnieją zbiory nieskończone obiektów rzeczywistych, przejście graniczne nie jest weryfikowalne. W analizie niestandardowej, pozostając w zgodzie z wymogami formalnej poprawności, rozszerza się przestrzeń liczb rzeczywistych o te, które się różnią nieskończenie małą i nieskończenie dużą. Powrót do nieskończonej małej i dużej nastąpił w drugiej połowie ubiegłego wieku, głównie dzięki pracom Robinsona [1966]. Metoda parametrów mikrolokalnych obejmuje klasę ciał gęstoperyodycznych, tzn. takich, w których jest *dużo* komórek periodyczności. To, czy komórek w ciele jest już dostatecznie dużo, rozstrzyga badacz arbitralnie. Rozstrzygnięcie to powinno motywować przyjęcie pewnej hipotezy co do klasy rozważanych problemów, tzw. hipotezy homogenizacyjnej [Woźniak 1987]. Mówi ona, że zachowanie się ciał gęsto periodycznych jest podobne, o ile komórki mają te same własności materiałowe i są pod wpływem tych samych sił zewnętrznych. Ta heurystyczna przesłanka leży u podstaw pewnego zabiegu matematycznego wykorzystującego analizę niestandardową, w którego wyniku rozpatrywane ciało modelowane jest w strukturze niestandardowej, opartej na rozszerzonej przestrzeni liczb rzeczywistych (tzw. liczby hiperrzeczywiste). W tym niestandardowym modelu przynajmniej jeden wymiar komórki periodyczności jest nieskończenie mały, funkcje zaś opisujące własności materiałowe, gęstość, przemieszczenie są niestandardowe.

Proponowany formalny zabieg – opisu ciała w rozszerzonej przestrzeni liczb rzeczywistych – na niewiele by się zdał, gdyby nie możliwość poszukiwania jednoznacznego przedstawienia niestandardowych funkcji przemieszczeń za pomocą funkcji standardowych. Zakłada się, że takich funkcji powinno być więcej, powinny to być nie tylko standardowe funkcje przemieszczeń, ale i pewne nowe funkcje opisujące zachowanie się mikrokomórki, czyli parametry mikrolokalne [Woźniak 1976, 1977, 1986, 1987, Wągorowska 1986, Matysiak i Woźniak 1987, 1988, Kaczyński i Matysiak 1988, 1989, Nagórko 1989a,b, 2004, Matysiak 1989, Matysiak i Nagórko 1989, Nagórko i in. 1991, Michalak 1998, 1999, 2000].

Metoda parametrów mikrolokalnych została zastosowana w wielu obszarach mechaniki, m.in. w zagadnieniach cieplnych [Matysiak i Pauk 1995, Matysiak i in. 1998a, 1998b, Nagórko i Zieliński 1999, Nagórko i Piwowarski 2003, Piwowarski 2006], dynamicznych [Mazur-Śniady 1993, Wierzbicki 1986, Matysiak i Nagórko 1995], w mechanice zniszczenia [Kaczyński i Matysiak 1993, 1994], a także w teorii dyfuzji [Matysiak i Mieszkowski 1999].

Zgodnie z metodą parametrów mikrolokalnych założymy, że temperatura $\theta(x_1, x_2, z, t)$ może być rozłożona na sumę dwóch składników:

$$\theta(x_1, x_2, z, t) = \vartheta(x_1, x_2, z, t) + h(x_1, x_2)\psi(x_1, x_2, z, t)$$

gdzie składnik pierwszy $\vartheta(x_1, x_2, z, t)$ jest temperaturą uśrednioną, a składnik drugi $\psi(x_1, x_2, z, t)$ opisuje wpływ niejednorodności na temperaturę. Funkcje $\vartheta(x_1, x_2, z, t)$ i $\psi(x_1, x_2, z, t)$ są funkcjami nieznanymi.

Zgodnie z metodą parametrów mikrolokalnych układ równań na funkcje ϑ i ζ^A ma postać:

$$\begin{aligned} \langle c \rangle \dot{\vartheta} - \langle K_{\alpha\beta} \rangle \vartheta_{,\alpha\beta} - \langle K_{zz} \rangle \vartheta_{,zz} - \langle K_{\alpha\beta} h^A \rangle_{,\beta} \zeta^A_{,\alpha} &= 0 \\ \langle ch^A h^B \rangle \zeta^B + \langle K_{\alpha\beta} h^A \rangle_{,\alpha} h^B_{,\beta} \zeta^B - \langle K_{\alpha\beta} h^A h^B \rangle \zeta^B_{,\alpha\beta} - \langle K_{zz} h^A h^B \rangle \zeta^B_{,zz} + \\ + \langle K_{\alpha\beta} h^A \rangle_{,\beta} \vartheta_{,\alpha} &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Układ (2) jest układem równań na funkcje wolnozmiennne ϑ i ζ^A , o ile znane są funkcje kształtu h^A . Dobór tych funkcji jest więc istotny i powinien być dokonany zgodnie z pewnymi określonymi kryteriami dla całej ustalonej klasy przewodników.

MODALNE FUNKCJE KSZTAŁTU

W przypadku przewodnictwa cieplnego funkcja kształtu h powinna określać zaburzenia temperatury spowodowane periodyczną niejednorodnością przewodnika, a same zaburzenia powinny maleć z upływem czasu. Przyjmijmy więc, że temperatura ograniczona do członu opisującego zaburzenia, malejąca z upływem czasu, ma postać:

$$\theta(x_1, x_2, z, t) = h(x_1, x_2)e^{-\lambda t} \quad (3)$$

gdzie $\lambda > 0$.

Podstawiając równanie (3) do równania Fouriera (1), otrzymujemy:

$$\lambda ch + (K_{\alpha\beta} h_{,\alpha})_{,\beta} = 0 \quad (4)$$

Znalezienie więc funkcji kształtu h sprowadza się do rozwiązania problemu własnego: czy istnieje $\lambda > 0$, dla której równanie (4) ma periodyczne rozwiązanie niezerowe? Zauważmy, że warunek jednorodności na brzegu $h|_{\partial\Delta} = 0$ wobec periodyczności h jest

spełniony. Niech λ^A , $A = 1, 2, \dots, n$, są niezerowymi wartościami własnymi równania (4). Odpowiadające im rozwiązania $h^A(x_1, x_2)$ nazwiemy modalnymi lub globalnymi funkcjami kształtu.

Jako przykład rozwiążmy równanie (4) w przypadku przewodnika periodycznie dwuwarstwowego i izotropowego, w którym niejednorodność występuje tylko w kierunku x_1 .

Współczynnik przewodnictwa cieplnego K_{11} jest funkcją x_1 , przyjmującą wartości K'_{11} dla $x_1 \in \left(0, \frac{l'_1}{2}\right)$ i $x_1 \in \left(\frac{l'_1}{2} + l''_1, l_1\right)$, oraz K''_{11} dla $x_1 \in \left(\frac{l'_1}{2}, \frac{l'_1}{2} + l''_1\right)$. Podobnie przebiegać będzie funkcja ciepła właściwego c .

Funkcje $K_{11}(x_1)$ i $c(x_1)$ są funkcjami nieciągłymi, skokowo zmieniającymi wartości na stykach warstw. Funkcja kształtu h jest tutaj funkcją tylko zmiennej x_1 .

Równanie (4) przyjmie postać:

$$\lambda ch + (K_{11}h_{,1})_{,1} = 0 \quad (5)$$

Równanie (5) rozwiązujemy w sposób przybliżony. Nieciągły rozkład ciepła właściwego uśrednimy i dyskretyzujemy tak, by skupiona wartość uśredniona ciepła właściwego $\langle c \rangle$ znalazła się tylko w dwóch punktach: $x_1 = \frac{l'_1}{2}$ i $x_1 = \frac{l'_1}{2} + l''_1$, czyli miała wartość $\frac{l_1 \langle c \rangle}{2}$, gdzie, jak łatwo sprawdzić: $\langle c \rangle = \eta_1 c' + (1 - \eta_1) c''$ oraz $\eta_1 = \frac{l'_1}{l_1}$. Pochodną funkcji

$K_{11}h_{,1}$ zastępujemy ilorazem różnicowym w tych punktach.

Sprawdźmy, czy funkcja h^1 postaci

$$h^1(x_1) = \begin{cases} \frac{2}{\eta_1} x_1 & \text{dla } x_1 \in \left(0, \frac{l'_1}{2}\right) \\ -l_1 \left(\frac{2}{l_1(1-\eta_1)} x_1 - \frac{\eta_1}{1-\eta_1} - 1 \right) & \text{dla } x_1 \in \left(\frac{l'_1}{2}, \frac{l'_1}{2} + l''_1\right) \\ \frac{2}{\eta_1} x_1 - 2l_1 \left(1 + \frac{1-\eta_1}{\eta_1} \right) & \text{dla } x_1 \in \left(\frac{l'_1}{2} + l''_1, l_1\right) \end{cases} \quad (6)$$

jest rozwiązaniem przybliżonym równania (5). Funkcja (6) jest funkcją oscylującą, Δ -periodyczną, oraz spełnia warunek $\langle ch \rangle = 0$.

Dla tak przyjętej funkcji kształtu z równania (5) wyliczamy λ :

$$\lambda = \frac{8}{l_1^2 \langle c \rangle} \left(\frac{K'_{11}}{\eta_1} + \frac{K''_{11}}{(1-\eta_1)} \right)$$

Wyliczona wielkość λ spełnia warunek $\lambda > 0$. Funkcja (6) jest określona oczywiście z dokładnością do stałej dowolnej.

W przypadku periodyczności dwukierunkowej, postępując podobnie, można wyznaczyć dwie modalne funkcje kształtu [Piwowski 2006].

ZAGADNIENIA NIESTACJONARNE

Zagadnienia niestacjonarne w przewodnikach o dwuwarstwowym elemencie reprezentatywnym opisują równania (2), w których występuje jedna funkcja kształtu $h^1 = h^1(x_1)$ i jeden parametr wolnozmienny $\zeta^1 = \zeta^1(x_1, x_2, z, t)$ oraz współczynniki przewodnictwa cieplnego K_{11} , K_{22} , K_{zz} , jako funkcje tylko zmiennej x_1 . W takim przypadku równania te przyjmą postać:

$$\begin{aligned} \langle c \rangle \vartheta - \langle K_{11} \rangle \vartheta_{,11} - \langle K_{22} \rangle \vartheta_{,22} - \langle K_{zz} \rangle \vartheta_{,zz} - \langle K_{11} h^1 \rangle \zeta^1_{,1} &= 0 \\ \langle ch^1 h^1 \rangle \zeta^1 + \langle K_{11} h^1 \rangle \zeta^1_{,1} + \langle K_{11} h^1 \rangle \vartheta_{,1} - \langle K_{11} h^1 h^1 \rangle \zeta^1_{,11} - & \\ - \langle K_{22} h^1 h^1 \rangle \zeta^1_{,22} - \langle K_{zz} h^1 h^1 \rangle \zeta^1_{,zz} &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \langle c \rangle &= \eta_1 c' + (1 - \eta_1) c'', \quad \langle K_{11} \rangle = \eta_1 K'_{11} + (1 - \eta_1) K''_{11}, \quad \langle K_{22} \rangle = \eta_1 K'_{22} + (1 - \eta_1) K''_{22}, \\ \langle K_{zz} \rangle &= \eta_1 K'_{zz} + (1 - \eta_1) K''_{zz}, \quad \langle K_{11} h^1 \rangle = 2(K'_{11} - K''_{11}), \quad \langle K_{11} h^1 \rangle \langle h^1 \rangle = 4 \left(\frac{K'_{11}}{\eta_1} + \frac{K''_{11}}{1 - \eta_1} \right), \\ \langle K_{zz} h^1 h^1 \rangle &= \frac{l_1^2}{3} (\eta_1 K'_{zz} + (1 - \eta_1) K''_{zz}), \quad \langle ch^1 h^1 \rangle = \frac{l_1^2}{3} (\eta_1 c' + (1 - \eta_1) c''), \\ \langle K_{22} h^1 h^1 \rangle &= \frac{l_1^2}{3} (\eta_1 K'_{22} + (1 - \eta_1) K''_{22}). \end{aligned}$$

Przyjmijmy, że funkcje ϑ i ζ^1 są funkcjami tylko zmiennej z i t . Poszukujemy rozwiązania równań (7) w postaci:

$$\vartheta(z, t) = \tilde{\vartheta}(z) e^{-\omega t}, \quad \zeta^1(z, t) = \tilde{\zeta}^1(z) e^{-\omega t}$$

gdzie $\omega > 0$ i $z \in \langle 0, L_3 \rangle$. Będziemy więc poszukiwać rozwiązań szczególnych układu równań (7). Podstawiając zadane funkcje do równań (7), otrzymamy:

$$\begin{aligned} \tilde{\vartheta}_{,zz} + b_1 \tilde{\vartheta} &= 0 \\ \tilde{\zeta}^1_{,zz} + b_0 \tilde{\zeta}^1 &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

gdzie:

$$b_1 = \frac{\omega \langle c \rangle}{\langle K_{zz} \rangle} = \frac{\omega(\eta_1 c' + (1 - \eta_1) c'')}{(\eta_1 K'_{zz} + (1 - \eta_1) K''_{zz})},$$

$$b_0 = -\frac{\langle K_{11} h^1_{,1} h^1_{,1} \rangle - \omega \langle c h^1 h^1 \rangle}{\langle K_{zz} h^1 h^1 \rangle} =$$

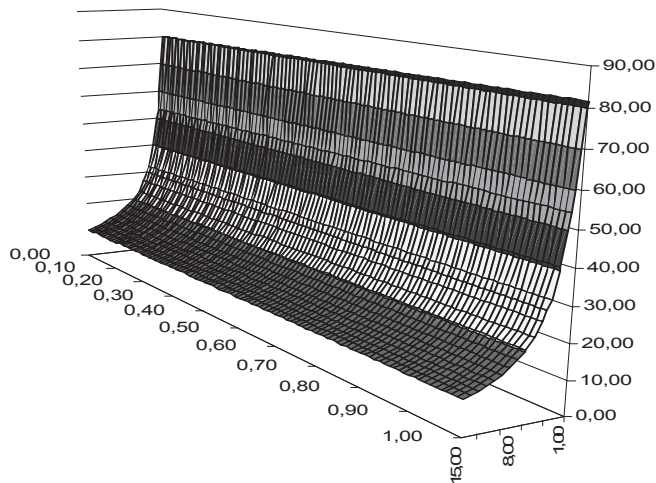
$$= -\frac{12((1 - \eta_1) K'_{11} + \eta_1 K''_{11}) - \omega l_1^2 \eta_1 (1 - \eta_1) (\eta_1 c' + (1 - \eta_1) c'')}{l_1^2 \eta_1 (1 - \eta_1) (\eta_1 K'_{zz} + (1 - \eta_1) K''_{zz})}.$$

Zauważmy, że stała b_1 jest większa od zera, stąd rozwiązaniem równania (7)₁ jest funkcja:

$$\tilde{\vartheta}(z) = C_1 \cos \sqrt{b_1} z + C_2 \sin \sqrt{b_1} z \quad (9)$$

gdzie dla warunków brzegowych $\tilde{\vartheta}(0) = \tilde{\vartheta}_0$, $\tilde{\vartheta}(L_3) = \tilde{\vartheta}_1$ mamy $C_1 = \tilde{\vartheta}_0$ i $C_2 = \frac{\tilde{\vartheta}_1 - \tilde{\vartheta}_0 \cos \sqrt{b_1} L_3}{\sin \sqrt{b_1} L_3}$.

Zbadajmy współczynnik b_1 , w zależności od $\alpha = \frac{c'}{c''}$ oraz $\beta = \frac{K'_{zz}}{K''_{zz}}$. Przyjmijmy $\alpha \in \left(\frac{1}{1000}, 1\right)$, $\beta \in (1, 15)$, $c'' = 2400$, $K''_{zz} = 15$, $\omega = 0,02$ oraz $l'_1 = l''_1 = 0,01$. Wykres funkcji $b_1 = b_1(\alpha, \beta)$ przedstawiono na rysunku 1.



Rys. 1. Wykres funkcji $b_1 = b_1(\alpha, \beta)$

Fig. 1. Graph of the function $b_1 = b_1(\alpha, \beta)$

W rozpatrywanym przypadku wartości funkcji b_1 należą do przedziału $b_1 \in \left(10\frac{1}{5000}, 81\frac{3}{5}\right)$, przy czym przy ustalonym β funkcja b_1 jest funkcją rosnącą. I tak, dla $\beta = 1$, b_1 , rośnie od 80,0016 do 81,6, a dla $\beta = 15$ – od 10,0002 do 10,2.

Widać więc, że nie w całym obszarze wartości b_1 funkcja (9) jest wolnozmienna. Przy „wyrównywaniu” się własności cieplnych, tj. gdy $c' \rightarrow c''$, $K'_{zz} \rightarrow K''_{zz}$, rozwiązania (9) nie są funkcjami wolnozmiennymi – tracą sens fizyczny. Istnieje jednak dostatecznie duży obszar zmienności b_1 (obszar obejmujący przypadki istotnej niejednorodności cieplnej), w którym temperatura średnia jest wolnozmienna.

Współczynnik b_0 występujący w równaniu (9)₂ można przedstawić w postaci $b_0 = a_0 + \omega d_0$, gdzie a_0 jest stałą określoną wzorem:

$$a_0 = -\frac{\langle K_{11}h^1, {}_1h^1, {}_1h^1 \rangle}{\langle K_{zz}h^1h^1 \rangle} = -\frac{12(K'_{11}(1-\eta_1) + K''_{11}\eta_1)}{l_1^2\eta_1(1-\eta_1)(\eta_1K'_{zz} + (1-\eta_1)K''_{zz})}$$

natomiast $d_0 = \frac{\langle ch^1h^1 \rangle}{\langle K_{zz}h^1h^1 \rangle}$. Wielkość b_0 jest mniejsza od zera, gdy $\omega < \omega_0$, gdzie:

$$\omega_0 = -\frac{a_0}{d_0} = \frac{\langle K_{11}h^1, {}_1h^1, {}_1h^1 \rangle}{\langle ch^1h^1 \rangle} = \frac{12((1-\eta_1)K'_{11} + \eta_1K''_{11})}{l_1^2\eta_1(1-\eta_1)(\eta_1c' + (1-\eta_1)c'')}.$$

Jeżeli $b_0 < 0$, to rozwiązaniem równania (8)₂ jest funkcja:

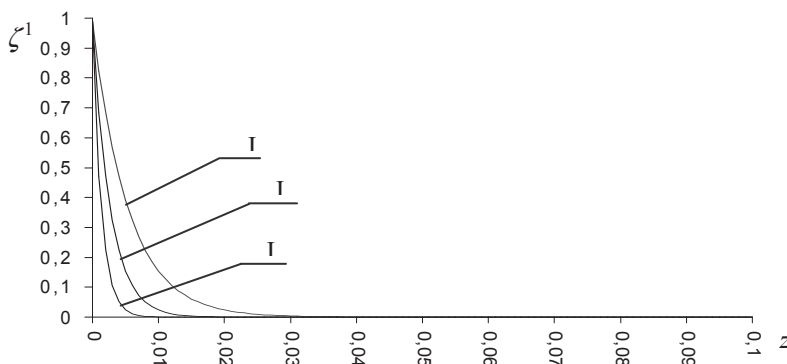
$$\zeta^1(z) = \zeta_0^1 e^{-\sqrt{-b_0}z} + \zeta_0^2 e^{\sqrt{-b_0}z} \quad (10)$$

We wzorze (10) wielkości ζ_0^1 , ζ_0^2 są dowolnymi stałymi.

Sprawdźmy jeszcze, jak na fluktuacje wpływa zmiana wymiarów komórki. Załóżmy, że wielkości charakteryzujące przewodnik: ζ_0^1 , L_3 , c' , c'' , K'_{11} , K'_{zz} , K''_{zz} , ω , t , są takie jak w przypadku poprzednim: $K'_{11} = 200,00$, $l'_1 = l''_1$ oraz $l_1 = 0,04$ (przypadek I, wtedy $\omega_0 = 2455,68$), $l_1 = 0,02$ (przypadek II, wtedy $\omega_0 = 9817,91$), $l_1 = 0,01$ (przypadek III, przy którym $\omega_0 = 39\,290,94$). W tych przypadkach wykresy fluktuacji przedstawiono na rysunku 2.

Zmiana wymiaru komórki wpływa na zaburzenie w taki sposób, że występuje ono na większym odcinku przewodnika dla mniejszej liczby warstw, a na mniejszym odcinku dla przewodnika o większej liczbie warstw. Wpływ ten jednak także szybko zanika.

Zagadnienia przepływu ciepła w płaszczyźnie przekroju przewodnika rozpatrywano w pracy Piwowskiego [2006].

Rys. 2. Wykres fluktuacji $\zeta^1 \Gamma_1$ Fig. 2. Graph of fluctuations $\zeta^1 \Gamma_1$

PODSUMOWANIE

Wyodrębniona w pracy klasa przewodników jest obszerna; obejmuje m.in. przewodniki wielowarstwowe i szkieletowe, tzn. takie, w których struktura jest przecięciem prostopadłym dwu rodzajów warstw. Opis takich przewodników na gruncie klasycznej teorii przewodnictwa cieplnego sprowadza się do równania Fouriera o zmiennych współczynnikach. Z tego powodu za cel pracy przyjęto skonstruowanie modelu uśrednionego przewodnictwa cieplnego, a więc modelu, w którym współczynniki zmieniające periodycznie swoje wartości zastąpi się wielkościami uśrednionymi. Nie chcąc jednak, by uśrednienie zbyt daleko uprościło opis zjawiska, do konstrukcji modelu wykorzystano metody nieasympotyczne parametrów mikrolokalnych i technikę uśredniania tolerancyjnego. W tych metodach, mimo uśrednienia współczynników, możliwe jest opisanie wpływu niejednorodnej struktury przewodnika na przewodnictwo przez wprowadzenie dodatkowych (obok temperatury) niewiadomych. W modelach takich rozwiązywanie zagadnień zależy od wymiaru elementu reprezentatywnego, czyli występuje tzw. efekt skali.

W skonstruowanym modelu występuje $n + 1$ równań na temperaturę i na fluktuacje, których wyznaczenie zależy od pewnych postulowanych funkcji periodycznych i oscylujących, zwanych funkcjami kształtu, które muszą być znane. W pracy znaleziono, zgodnie z przyjętymi kryteriami, takie funkcje i zastosowano je do rozwiązania wybranych zagadnień przewodzenia ciepła w ciałach periodycznych dwuwarstwowych i szkieletowych. Rozwiązanie tych zagadnień zweryfikowało model i weryfikację można uznać za zadowalającą.

Układ równań modelu jest układem równań różniczkowych o stałych (uśrednionych) współczynnikach, jest więc modelem prostszym w stosunku do klasycznego modelu Fouriera dla ciał niejednorodnych. Z drugiej jednak strony zamiast jednego równania na temperaturę, o stałych współczynnikach, występuje w nim układ równań na temperaturę i fluktuacje.

Zaburzenia przewodnictwa cieplnego wzdłuż osi przewodnika prostopadłej do płaszczyzny struktury periodycznej, wywołane fluktuacją, zarówno w przypadku stacjonarnym, jak i niestacjonarnym na ogół bardzo szybko zanikają. Szybkość ta zależy od różnicy współczynników przewodnictwa cieplnego i jest większa dla współczynników bardziej zróżnicowanych.

PIŚMIENNICTWO

- Kaczyński A., Matysiak S.J., 1988. On the complex potentials of the linear thermoelasticity with microlocal parameters. *Acta Mech.* 72, 245–259.
- Kaczyński A., Matysiak S.J., 1989. A system of interface cracks in a periodically layered elastic composites. *Engng. Fracture Mech.* 32, 745–756.
- Kaczyński A., Matysiak S.J., 1993. Rigid sliding punch on a periodic two-layered elastic half-space. *J. Theor. Appl. Mech.* 31, 295–305.
- Kaczyński A., Matysiak S.J., 1994. Analysis of stress intensity factors in crack problems of periodic two-layered elastic composites. *Acta Mech.* 107, 1–16.
- Matysiak S.J., 1989. Thermal stresses in a periodic two-layered composite weakened by an interface crack. *Acta Mech.* 78, 95–108.
- Matysiak S.J., Mieszkowski R., 1999. On homogenization of diffusion process in microperiodic stratified bodies. *Int. Comm. Heat. Mass Transfer.* 26, 539–547.
- Matysiak S.J., Nagórko W., 1989. Microlocal parameters in a modelling of microperiodic multilayered elastic plates. *Ing. Arch.* 59, 434–444.
- Matysiak S.J., Nagórko W., 1995. On the wave propagation in periodically laminated composites. *Bull. Pol. Acad. Sci., Tech. Sci.* 43, 1–12.
- Matysiak S.J., Pauk V.J., 1995. Plane contact problem for periodic laminated composite involving frictional heating. *Arch. Appl. Mech.* 66, 82–89.
- Matysiak S.J., Woźniak Cz., 1987. Micromorphic effect in a modelling of periodic multilayered elastic composites. *Int. J. Eng. Sci.* 5, 549–559.
- Matysiak S.J., Woźniak Cz., 1988. On the microlocal modelling of thermoelastic periodic composites. *J. Tech. Physics* 29, 65–97.
- Matysiak S.J., Pauk V.J., Yevtushenko A.A., 1998a. On applications of the microlocal parameter method in modelling of temperature distributions in composite cylinders. *Arch. Appl. Mech.* 68, 297–307.
- Matysiak S.J., Yevtushenko A.A., Ivanyk E.G., 1998b. Temperature field in a microperiodic two-layered composite caused by a circular laser heat source. *Heat Mass Transfer* 34, 127–133.
- Mazur-Śniady K., 1993. Macro-dynamics of micro-periodic elastic beams. *Mech. Teor. Stos.* 31, 34–46.
- Michalak B., 1998. Stability of elastic slightly wrinkled plates. *Acta Mech.* 130, 111–119.
- Michalak B., 1999. Stability of slightly wrinkled plates interacting with an elastic subsoil. *Engng. Trans.* 47, 269–283.
- Michalak B., 2000. Vibrations of plates with initial geometrical imperfections interacting with a periodic elastic foundation. *Arch. Appl. Mech.* 70, 508–518.
- Nagórko W., 1989a. Modele powierzchniowe i mikrolokalne płyt sprężystych. Wydaw. UW, Warszawa.
- Nagórko W., 1989b. Płyty sprężyste mikroperiodycznie niejednorodne. *Mech. Teor. Stos.* 27, 293–301.
- Nagórko W., 2004. Vibrations of thin plates reinforced by a periodic system of stiffeners. *Vibrations in Physical Systems* 275–278.

- Nagórko W., Piwowarski M., 2003. Przewodnictwo cieplne w ośrodkach periodycznie warstwowych. *Acta Scientiarum Polonorum, Budownictwo* 2 (1), 31–40.
- Nagórko W., Zieliński J., 1999. On the modelling of heat conduction problem in plates composed of periodically non-homogeneous layers. *Ser. Mech.-Math.* 55, 100–105.
- Nagórko W., Naniewicz Z., Woźniak Cz., 1991. Analiza niegładka i metody niestandardowe w zagadnieniach mechaniki ciała stałego. *Mech. Teor. Stos.* 29, 135–151.
- Nowacki W., Olesiak Z., 1991. *Termodyfuzja w ciałach stałych*. PWN, Warszawa.
- Piwowarski M., 2006. Przewodnictwo cieplne w ośrodkach periodycznie wieloskładnikowych. Rozprawa doktorska. Wydział Inżynierii Mechanicznej i Informatyki, Politechnika Częstochowska, Częstochowa.
- Robinson A., 1966. *Non-standard Analysis*. North-Holland Publ. Comp., Amsterdam.
- Wągrowaska M., 1986. Certain solutions of axially-symmetric problems in linear elasticity with microlocal parameters. *Bull. Pol. Acad. Sci., Tech. Sci.*
- Wierzbiński E., 1986. Nonlinear macro-micro dynamics of laminated structures. *J. Theor. Appl. Mech.* 33, 1–17.
- Woźniak Cz., 1976. Nonstandard approach to the theory of elasticity. I, II, *Bull. Acad. Pol., Tech.* 5, 24.
- Woźniak Cz., 1977. On the nonstandard formulation of mechanics. *Arch. Mech.* 4, 29.
- Woźniak Cz., 1986. Nonstandard analysis in mechanics. *Adv. Mech.* 1, 3–35.
- Woźniak Cz., 1987. A nonstandard method of modelling of thermoelastic periodic composites. *Int. J. Engng. Sci.* 25, 489–498.

HEAT CONDUCTION IN PERIODICALLY MULTICOMPONENT MEDIA

Abstract. The paper presents construction of an averaged model of heat conduction in multicomponent, layered and skeletal conductors. A method of selection of shape function was described for initial-boundary problems. Selected non-stationary problems were solved including determination of the influence of variable values of the coefficient of heat conduction as well as the influence of variable dimensions of a microstructure cell on the heat conduction.

Key words: heat conduction, multicomponent conductors, averaged models

Zaakceptowano do druku – Accepted for print: 5.06.2014