

## ANALIZA ZASIĘGU WARSTWY BRZEGOWEJ W KOMPOZYTACH Z PODŁUŻNĄ I POPRZECZNĄ GRADACJĄ WŁASNOŚCI

Joanna Witkowska-Dobrev

Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie

**Streszczenie.** W pracy rozpatrzono zagadnienie warstwy brzegowej w wielowarstwowej przegrodzie budowlanej charakteryzującej się podłużną i poprzeczną gradacją własności mechanicznych. Każda warstwa rozpatrywanej przegrody zbudowana jest z dwóch izotropowych, jednorodnych, sprężystych materiałów. Rozważania ograniczono do płaskiego stanu odkształcenia. Przyjęty model został zbudowany na podstawie metody asymptotycznego uśredniania tolerancyjnego. Zbadano wpływ budowy kompozytu na zasięg warstwy brzegowej w obszarze kompozytu.

**Słowa kluczowe:** podłużna gradacja własności, poprzeczna gradacja własności, asymptotyczne uśrednianie tolerancyjne, efekt warstwy brzegowej

### WSTĘP

W pracy rozpatrzono dwuskładnikowe kompozyty warstwowe z funkcyjną gradacją własności mechanicznych. Analizie poddano dwa typy kompozytów – z poprzeczną i podłużną gradacją własności (rys. 1).

O kompozytach założono, że składają się z dwu materiałów liniowo sprężystych. Przyjęto, że modelem dla analizowanych kompozytów jest statyczny model liniowej teorii sprężystości. W takim modelu formułuje się zagadnienie: znaleźć przemieszczenia (bądź naprężenia) ciała przy zadanych warunkach brzegowych (przemieszczeniowych i/lub warunkach w naprężeniach).

W przypadku struktur warstwowo-niejednorodnych otrzymanie rozwiązań ścisłych sformułowanego wyżej zagadnienia napotyka często na znaczne trudności spowodowane funkcjami materiałowymi, które są nieciągłe na małych obszarach określoności. Wska-



W równaniach (2) występują nowe współczynniki, zwane modułami efektywnymi, opisane w pracach Wągrowskiej i Witkowskiej-Dobrev [2011, 2012], które odpowiednio wynoszą:

$$(2\mu + \lambda)_0 = \frac{(2\mu_R + \lambda_R)(2\mu_M + \lambda_M)}{(2\mu_R + \lambda_R)v^M + (2\mu_M + \lambda_M)v^R}$$

$$\tilde{\lambda} = \frac{(2\mu_M + \lambda_M)\lambda_R v^R + (2\mu_R + \lambda_R)v^M \lambda_M}{(2\mu_R + \lambda_R)v^M + (2\mu_M + \lambda_M)v^R}$$

$$\langle 2\mu + \lambda \rangle = (2\mu_R + \lambda_R)v^R + (2\mu_M + \lambda_M)v^M$$

$$\overline{2\mu + \lambda} = \langle 2\mu + \lambda \rangle - \frac{v^R v^M (\lambda_R - \lambda_M)^2}{(2\mu_R + \lambda_R)v^M + (2\mu_M + \lambda_M)v^R}$$

$$\mu_0 = \frac{\mu_R \mu_M}{\mu_R v^M + \mu_M v^R}$$

Natomiast fluktuacje  $u_1(\cdot)$ ,  $u_2(\cdot)$  mają postać:

- dla gradacji podłużnej

$$u_1 = - \left( \frac{v^R v^M}{(\lambda_R + 2\mu_R)v^M + (\lambda_M + 2\mu_M)v^R} \right) \times \\ \times \left[ ((2\mu_R + \lambda_R) - (2\mu_M + \lambda_M))u_{1,1} + (\lambda_R - \lambda_M)u_{2,2} \right]$$

$$u_2 = - \left( \frac{v^R v^M}{(v^R \mu_M + v^M \mu_R)} \right) \left[ ((\mu_R - \mu_M)u_{1,2} + (\mu_R - \mu_M)u_{2,1}) \right]$$

- dla gradacji poprzecznej

$$v_1 = 0$$

$$v_2 = \left( \frac{v^R v^M}{(2v^M \mu_R + 2v^R \mu_M) + (\lambda_R v^M + \lambda_R v^R)} \right) \left[ ((2\mu_R - 2\mu_M)u_{2,2} + (\lambda_R - \lambda_M)u_{2,2}) \right]$$

Każda z warstw kompozytu ma stałą grubość  $\eta$ ,  $\eta \ll L$  i składa się z dwóch izotropowych, jednorodnych składników noszących nazwę matrycy oraz wzmocnienia.

Funkcja  $\nu^R(\cdot)$ ,  $\nu^R(x^2) \in [0, 1]$ ,  $x^2 \in [0, H]$ ,  $\nu^R \in C^1([0, H])$  jest funkcją opisującą średnią frakcję wzmocnienia w warstwie, natomiast  $\nu^M(\cdot)$  opisuje średnią frakcję osno-  
wy w warstwie i wynosi:  $\nu^M(x^2) = 1 - \nu^R(x^2)$ ,  $x^2 \in [0, H]$ .

W przypadku zagadnienia jednowymiarowego, gdy przemieszczenia zależą tylko od  $x^2$ , równanie (2) redukuje się do postaci:

$$\left( (2\mu + \lambda) u_{2,2} \right)_{,2} = 0 \quad (3)$$

Po rozwiązaniu równania (3) pole przemieszczeń  $w_1(\cdot)$ ,  $w_2(\cdot)$  może być aproksymowane w postaci:

– dla przypadku gradacji podłużnej

$$w_1 \approx \tilde{w}_1 = hM \partial_2 u_2 \quad (4)$$

$$w_2 \approx \tilde{w}_2 = u_2$$

– dla gradacji poprzecznej pola przemieszczenia  $w_1(\cdot)$  i  $w_2(\cdot)$  są przybliżone przez

$$w_2 \approx \tilde{w}_2 = u_2 + hM \partial_2 u_2 \quad (5)$$

$$w_1 \approx \tilde{w}_1 = u_1 + h u_1 = 0$$

gdzie wielkość  $M$  przyjmuje postać:

$$M = - \left( \frac{\nu^R \nu^M}{(\lambda_R + 2\mu_R) \nu^M + (\lambda_M + 2\mu_M) \nu^R} \right) [(\lambda_R - \lambda_M)] \quad (6)$$

Oznaczmy dla gradacji poprzecznej przez  $\Gamma_0^0$  brzeg  $\Gamma_0^0 = [0, L] \times \{0\} \times R$  oraz przez  $\Gamma_H^0$  brzeg  $\Gamma_H^0 = [0, L] \times \{H\} \times R$ .

Oznaczmy dla gradacji podłużnej przez  $\Gamma_0^0$  brzeg  $\Gamma_0^0 = [0, H] \times \{0\} \times R$  oraz przez  $\Gamma_H^0$  brzeg  $\Gamma_H^0 = [0, H] \times \{L\} \times R$ .

W obu przypadkach przemieszczenie  $\tilde{w}_1(\cdot)$  nie spełnia warunków brzegowych na brzegach  $\Gamma_0^0$  i  $\Gamma_H^0$ . W celu usunięcia tego mankamentu zmodyfikujmy, zgodnie z pracą Woźniaka [2010b], przemieszczenie  $w_1^{(2)}$ :

$$w_1^{(2)} = \tilde{w}_1 + h q_1 = h M \partial_2 u_2 + h q_1 \quad (7)$$

gdzie  $q_1(\cdot)$  jest nieznanym polem, które wyznaczamy z równania:

$$\left\langle (2\mu + \lambda) h^2 \right\rangle q_{1, \xi\xi} - \left\langle (h_{,1})^2 \mu \right\rangle q_1 = 0 \quad (8)$$

z warunkami:

$$q_1 \Big|_{\Gamma_0^0} = -M \partial_2 u_2 \Big|_{\Gamma_0^0} \quad \text{i} \quad q_1 \Big|_{\Gamma_H^0} = -M \partial_2 u_2 \Big|_{\Gamma_H^0} \quad (9)$$

Równania (8) i (9) opisują tzw. efekt brzegowy.

Podobnie postępujemy z przemieszczeniem  $w_2^{(2)}(\cdot)$  w przypadku gradacji poprzecznej.

Przyjmujemy:

$$w_2^{(2)} = \tilde{w}_2 + h q_2 = u_2 + h M \partial_2 u_2 + h q_2 \quad (10)$$

Nieznane pole  $q_2(\cdot)$  wyznaczamy z równania:

$$\langle (2\mu + \lambda) h^2 \rangle q_{2, \xi \xi} - \langle (h_{,2})^2 \mu \rangle q_2 = 0 \quad (11)$$

z warunkami brzegowymi na  $\Gamma_0^0$  i  $\Gamma_H^0$  odpowiednio:

$$q_2 \Big|_{\Gamma_0^0} = -M \partial_2 u_2 \Big|_{\Gamma_0^0} \quad \text{i} \quad q_2 \Big|_{\Gamma_H^0} = -M \partial_2 u_2 \Big|_{\Gamma_H^0} \quad (12)$$

Zbadamy teraz, rozpatrując przykłady, jak zmienia się obszar występowania efektu brzegowego, w zależności od typu gradacji, własności mechanicznych oraz nasycenia składnikami w komórce.

## ANALIZA – WYNIK BADAŃ

Rozpatrzmy przegrodę dwuskładnikową o podłużnej gradacji własności, która zajmuje obszar  $\Omega = (0, L) \times (0, H) \times R$ ,  $L = 200$  cm,  $H = 200$  cm.

Założmy, że stałe materiałowe składników wynoszą odpowiednio:  $\lambda_R = 0,5035$ ,  $\mu_R = 0,2594$ ,  $\lambda_M = 0,128$ ,  $\mu_M = 0,055$ .

Rozkłady frakcji (funkcje nasycenia) przyjmują postać:

$$v^R(x^2) = \left( -\frac{(x^2)^2}{(L^2)^2} + \frac{x^2}{L^2} + 0,2 \right); \quad v^M(x^2) = 1 - v^R(x^2)$$

Niech ponadto przegroda składa się ze 100 dwuskładnikowych warstw o stałej grubości  $\eta = 2$  cm.

Przyjmujemy następujące warunki brzegowe:  $u_2(x^1, 0, x^3) = 2$ ;  $u_2(x^1, 200, x^3) = 0$ ;  $x^1 \in (0, 200) = 0$ ;  $x^3 \in R$

oraz

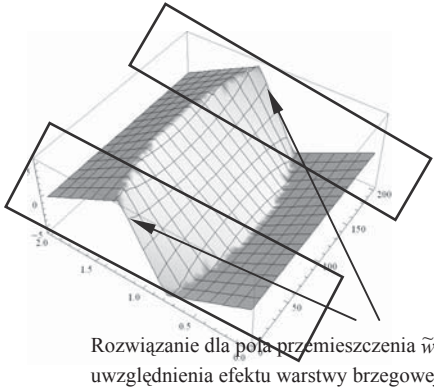
$$u_2(0, x^2, x^3) = \left( -0,0049303 \left( \frac{-188,18081 \ln[0,75411 + 0,003063 x^2] - 273,771 \ln[1,824 - 0,003064 x^2]}{+188,1808 \ln(0,1415 + 0,003064 x^2) - \ln(1,216 + 0,003063 x^2)} \right) + 1 \right)$$

$$u_2(200, x^2, x^3) = \left( -0,0049303 \left( \frac{-188,18081 \ln[0,75411 + 0,003063 x^2] - 273,771 \ln[1,824 - 0,003064 x^2]}{+188,1808 \ln(0,1415 + 0,003064 x^2) - \ln(1,216 + 0,003063 x^2)} \right) + 1 \right)$$

Rozpatrywany laminat nie jest periodyczny. Mikrostruktura laminatu o podłużnej gradacji ma własności periodyczne w kierunku osi  $x^1$ . Rozwiązania przedstawiono więc dla pojedynczej komórki.

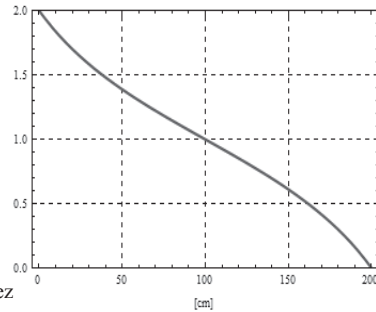
Jak już zaznaczyliśmy, rozwiązanie (4) w postaci przemieszczeń  $w_1(\cdot)$  i  $w_2(\cdot)$  nie spełnienia warunków na brzegach  $\Gamma_0^0$  i  $\Gamma_H^0$  (przecinających uwarstwienie).

Rysunek 2 przedstawia wykres przybliżonego pola przemieszczenia  $\tilde{w}_1(\cdot)$ . Ramką została zaznaczona rozkład pola przemieszczenia  $\tilde{w}_1(\cdot)$  w obszarach przy brzegu  $\Gamma_0^0$  i  $\Gamma_H^0$ . Przemieszczenia  $\tilde{w}_2(\cdot)$  przedstawiono na rysunku 3.



Rys. 2. Przybliżony rozkład pola przemieszczenia  $\tilde{w}_1(\cdot)$

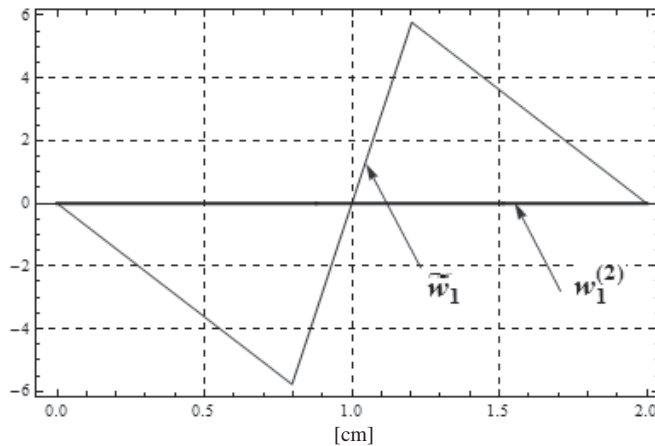
Fig. 2. The approximate distribution of the displacement field  $\tilde{w}_1(\cdot)$



Rys. 3. Przybliżony rozkład pola przemieszczenia  $\tilde{w}_2(\cdot)$

Fig. 3. The approximate distribution of the displacement field  $\tilde{w}_2(\cdot)$

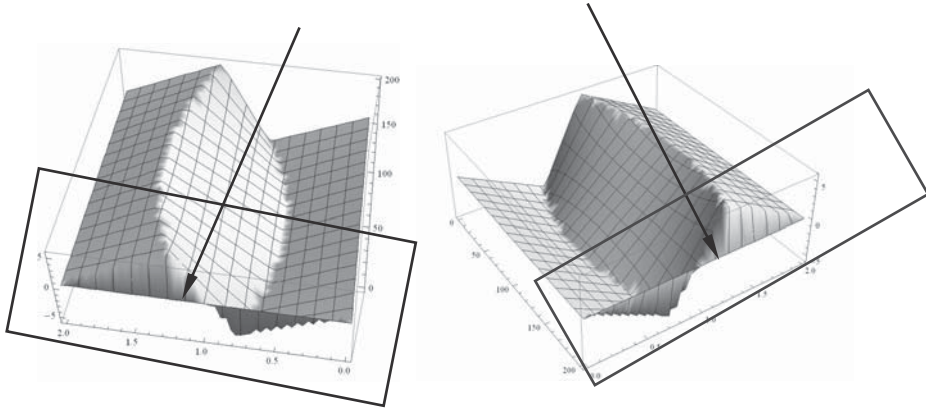
Rozkład przemieszczenia  $w_1^{(2)}(\cdot)$  z uwzględnieniem i bez uwzględnienia efektu brzegowego na  $\Gamma_0^0$  przedstawiono na rysunku 4. Otrzymane rozwiązanie spełnia warunki brzegowe (9) na  $\Gamma_0^0$  ( $\xi = 0$ ). Z kolei rozwiązanie równania (4), oznaczone na rysunku jako  $w_1(\cdot)$ , warunków brzegowych nie spełnia. Wykres  $w_1^{(2)}(\cdot)$  na brzegu  $\Gamma_0^0$  przegrody nie ma oscylacji, co jest konsekwencją zastosowanej formuły (7).



Rys. 4. Rozkład pola przemieszczenia  $\tilde{w}_1(\cdot)$  i  $w_1^{(2)}$  na brzegu  $\Gamma_0^0$

Fig. 4. Distribution of the displacement field  $\tilde{w}_1(\cdot)$  and  $w_1^{(2)}$  on boundary  $\Gamma_0^0$

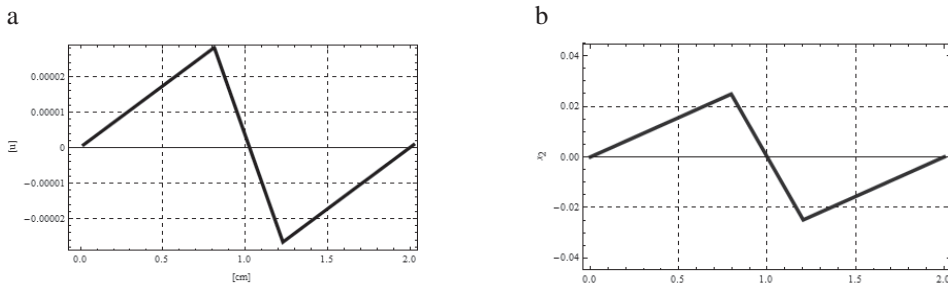
Rysunki 5a i 5b przedstawiają przemieszczenie  $w_1^{(2)}(\cdot)$  na brzegu  $\Gamma_0^0$  i  $\Gamma_H^0$ . Ramką na rysunku 5a zaznaczono rozwiązanie dla pola przemieszczenia  $w_1^{(2)}(\cdot)$  w obszarze przylegającym do brzegu  $\Gamma_0^0$ , a na rysunku 5b – do brzegu  $\Gamma_H^0$ . Zasięg warstwy brzegowej nie jest duży. W odległości równej  $0,8\eta$  od brzegu  $\Gamma_0^0$  i  $0,35\eta$  od brzegu  $\Gamma_H^0$  efekt brzegowy może być pominięty. Jest on jednak różny dla brzegów  $\Gamma_0^0$  i  $\Gamma_H^0$ .



Rys. 5. Rozkład pola przemieszczenia  $w_1^{(2)}$  przy brzegach: a –  $\Gamma_0^0$ , b –  $\Gamma_H^0$

Fig. 5. Distribution of the displacement field  $w_1^{(2)}$  near boundary: a –  $\Gamma_0^0$ , b –  $\Gamma_H^0$

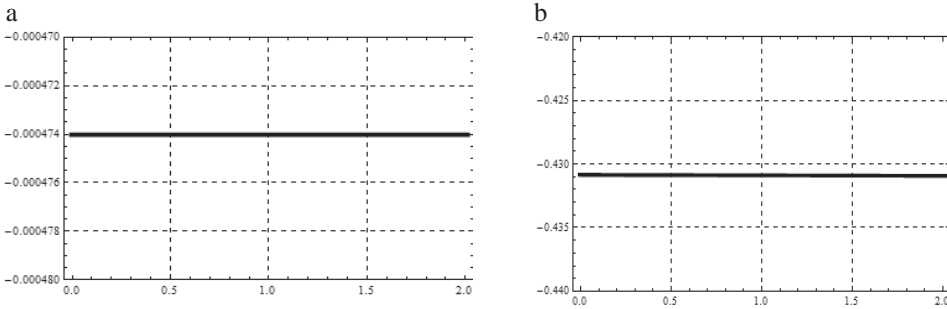
Porównując rozwiązanie przedstawiające przybliżony rozkład pola przemieszczenia  $\tilde{w}_1(\cdot)$  oraz rozwiązanie w postaci  $w_1^{(2)}$  przy brzegu  $\Gamma_0^0$  i  $\Gamma_H^0$ , możemy wyznaczyć ich różnicę (rys. 6).



Rys. 6. Różnica między przybliżonym rozkładem pola przemieszczenia  $\tilde{w}_1(\cdot)$  a rozwiązaniem w postaci  $w_1^{(2)}$  dla brzegów: a –  $\Gamma_0^0$ , b –  $\Gamma_H^0$

Fig. 6. The differences between the approximate distribution of the displacement field  $\tilde{w}_1(\cdot)$  and solution in the form of  $w_1^{(2)}$  on the boundary: a –  $\Gamma_0^0$ , b –  $\Gamma_H^0$

I tak względna różnica rozwiązań  $\tilde{w}_1(\cdot)$  i  $w_1^{(2)}(\cdot)$  dla odległości  $\zeta = 0,8\eta$  przy brzegu  $\Gamma_0^0$  i dla odległości  $\zeta = 0,35\eta$  przy brzegu  $\Gamma_H^0$  wynosi odpowiednio 0,000474 i 0,43 (rys. 7).



Rys. 7. Względne różnice między rozwiązaniami  $\tilde{w}_1(\cdot)$  i  $w_1^{(2)}$  odpowiednio: a – dla brzegu  $\Gamma_0^0$ , b – dla brzegu  $\Gamma_H^0$

Fig. 7. The relative differences between the solution  $\tilde{w}_1(\cdot)$  and  $w_1^{(2)}$  in distance  $\xi = 0,8\eta$  from boundary  $\Gamma_0^0$  and  $\xi = 0,35\eta$  from boundary  $\Gamma_H^0$  respectively: a –  $\Gamma_0^0$ , b –  $\Gamma_H^0$

Rozpatrzmy teraz przegrodę o poprzecznej gradacji własności. Przegroda zajmuje obszar  $\Omega = (0, L) \times (0, H) \times R$ ,  $L = 54$  cm,  $H = 200$  cm. Własności materiałowe przyjęto jak poprzednio.

Rozkład frakcji przyjęto w postać  $v^R(x^2) = 1 - \frac{(x^2)^3}{L^3}$ ,  $v^M(x^2) = 1 - v^R(x^2)$ . Załóżmy, że przegroda składa się z 27-dwuskładnikowych warstw o stałej grubości  $\eta = 2$  cm.

Przyjęto następujące warunki brzegowe:

$$u_2(x^1, 0, x^3) = 1; \quad u_2(x^1, 54, x^3) = 0; \quad x^1 \in (0, 200); \quad x^3 \in R;$$

$$u_2(0, x^2, x^3) = \left( -0,000332 \left( \begin{array}{l} -132,0976 \ln[0,638 - 0,0031 x^2] + 262,270 \ln[1,584 - 0,0031 x^2] \\ +132,097 \ln[0,6381 + 0,0031 x^2] - 262,2701 \ln[0,9718 + 0,0227 x^2] \end{array} \right) + 1 \right)$$

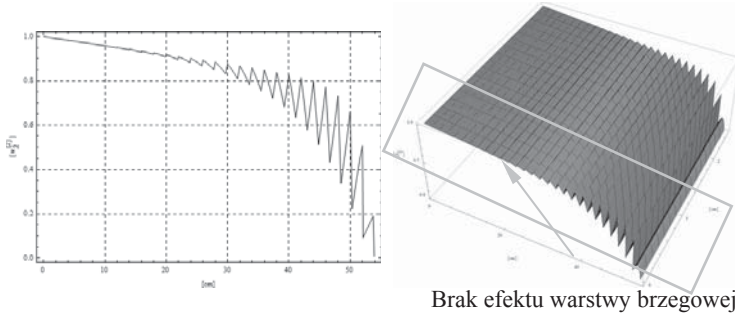
$$u_2(H, x^2, x^3) = \left( -0,000332 \left( \begin{array}{l} -132,0976 \ln[0,638 - 0,0031 x^2] + 262,270 \ln[1,584 - 0,0031 x^2] \\ +132,097 \ln[0,6381 + 0,0031 x^2] - 262,2701 \ln[0,9718 + 0,0227 x^2] \end{array} \right) + 1 \right)$$

Wykres przemieszczenia  $w_2(\cdot)$  przedstawiono na rysunkach 8 i 9.

Wykres przemieszczenia z uwzględnieniem i bez uwzględnienia efektu warstwy brzegowej na  $\Gamma_0^0$  zaprezentowano na rysunku 10. Rozwiązanie  $w_2^{(2)}(\cdot)$  spełnia warunki brzegowe na  $\Gamma_0^0$  ( $\xi = 0$ ). Z kolei rozwiązanie równania (5), oznaczone na rysunku jako  $\tilde{w}_2(\cdot)$ , warunków brzegowych nie spełnia. Wykres  $w_2^{(2)}(\cdot)$  na brzegu  $\Gamma_0^0$  przegrody nie ma oscylacji, co jest konsekwencją zastosowanej formuły (10). Na brzegu  $\Gamma_H^0$  wykresy przemieszczeń przedstawiają się identycznie.

Rysunki 11a i 11b przedstawiają rozkład pola przemieszczenia  $w_2^{(2)}(\cdot)$ . Ramką na rysunku 11a zaznaczono przemieszczenie  $w_2^{(2)}(\cdot)$  w obszarze przylegającym do brzegu  $\Gamma_0^0$ , a na rysunku 11b – do brzegu  $\Gamma_H^0$ . Zasięg warstwy brzegowej nie jest duży. W odległości równej  $2,5\eta$  od brzegu  $\Gamma_0^0$  i  $\Gamma_H^0$  efekt brzegowy może być pominięty.



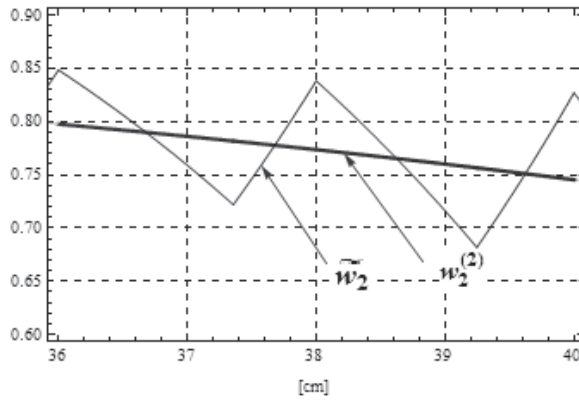


Rys. 8. Rozkład pola przemieszczenia  $\tilde{w}_2(\cdot)$  dla  $x^3 = \text{const}$   $x^1 = \text{const}$

Fig. 8. Distribution of the displacement field  $\tilde{w}_2(\cdot)$  for  $x^3 = \text{const}$   $x^1 = \text{const}$

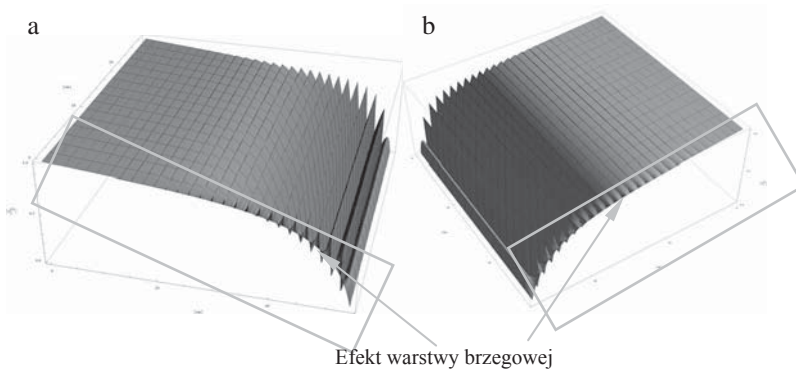
Rys. 9. Rozkład pola przemieszczenia  $\tilde{w}_2(\cdot)$  dla  $x^3 = \text{const}$

Fig. 9. Distribution of the displacement field  $\tilde{w}_2(\cdot)$  for  $x^3 = \text{const}$



Rys. 10. Rozkład pola przemieszczenia  $\tilde{w}_2(\cdot)$  i  $w_2^{(2)}(\cdot)$  na brzegu  $\Gamma_0^0$

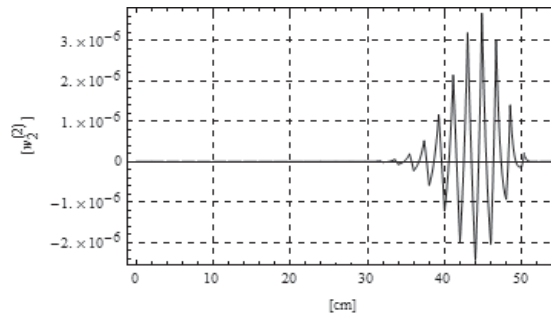
Fig. 10. Distribution of the displacement field  $\tilde{w}_2(\cdot)$  and  $w_2^{(2)}(\cdot)$  on boundary  $\Gamma_0^0$



Rys. 11. Rozkład pola przemieszczeń  $w_2^{(2)}(\cdot)$

Fig. 11. Distribution of the displacement field  $w_2^{(2)}(\cdot)$

Porównując rozwiązanie przedstawiające rozkład pola przemieszczenia  $\tilde{w}_2(\cdot)$  oraz rozwiązanie w postaci  $w_2^{(2)}$  w odległości  $2,5\eta$  od brzegu  $\Gamma_0^0$  i  $\Gamma_H^0$ , możemy wyznaczyć ich różnicę (rys. 12). Dla takiej przegrody wystąpi taka sama różnica względna zarówno na jednym, jak i na drugim brzegu.



Rys. 12. Różnica względna między rozkładem pola przemieszczenia  $\tilde{w}_2(\cdot)$  a rozwiązaniem w postaci  $w_2^{(2)}$  dla  $\zeta = 2,5\eta$

Fig. 12. The relative difference between distribution of  $\tilde{w}_2(\cdot)$  and  $w_2^{(2)}$  for  $\zeta = 2.5\eta$

## PODSUMOWANIE

Wprowadzenie do opisu kompozytu o poprzecznej lub podłużnej gradacji własności materiałowych modyfikacji w postaci uwzględnienia tzw. efektu warstwy brzegowej powoduje, że rozwiązania zmodyfikowanych równań spełniają warunki brzegowe na brzegach przecinających uwarstwienie. Analiza zagadnienia wykazała, że wpływ warstwy brzegowej na przemieszczenia szybko zanika.

Na zasięg warstwy brzegowej w przypadku analizowanych laminatów nie ma wpływu ani nasycenie frakcjami materiałowymi, ani liczba warstw, z jakich składa się kompozyt.

## PIŚMIENNICTWO

- Wągrowska M., Witkowska-Dobrev J., 2011. Zagadnienie efektu warstwy brzegowej w przegrodzie o podłużnej gradacji własności. *Acta Scientiarum Polonorum, Architectura* 10 (3), 3–13.
- Wągrowska M., Witkowska-Dobrev J., 2012. Zagadnienie efektu warstwy brzegowej w liniowo-sprężystej przegrodzie budowlanej o poprzecznej gradacji własności. *Acta Scientiarum Polonorum, Architectura* 11 (2), 3–10.
- Woźniak Cz., 2010. Asymptotic Modelling and Boundary-layer Effect for Functionally Graded Microlayered Composites. *Acta Scientiarum Polonorum, Architectura* 9 (2), 3–9.
- Woźniak Cz. et al., 2010. *Mathematical Modelling and Analysis in Continuum Mechanics of Microstructured Media*. Professor Margaret Woźniak pro Memoria. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice.

Woźniak Cz., Michałak B., Jędrzyiak J. (red.), 2008. Thermomechanics of Heterogeneous Solids and Structures. Tolerance Averaging Approach. Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź.

## **ANALYSIS FOR AREA OF BOUNDARY LAYER EFFECT IN COMPOSITES WITH LONGITUDINAL AND TRANSVERSAL GRADATION OF PROPERTIES**

**Summary.** The effect of boundary layer for multilayered wall with transversal and longitudinal gradation of effective properties was for stationary elastic problems was investigated. Every layer of considered wall was made of two isotropic, homogeneous elastic materials. The considerations were reduced to the plane strain problem. The adopted model was based on the method of asymptotic tolerance averaging. The influence of structure of composites for the area of boundary layer effect was discussed.

**Key words:** longitudinal gradation property, transverse gradation property, the asymptotic tolerance averaging, the effect of boundary layer

Zaakceptowano do druku – Accepted for print: 5.06.2014