

PIERWSZA CZĘSTOŚĆ DRGAŃ WŁASNYCH SŁUPÓW W KSZTAŁCIE WYDRAŻONEGO ŚCIEŻEGO STOŻKA

Jacek Jaworski

Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie

Streszczenie. W pracy wyprowadzono wzory na pierwszą częstość drgań własnych słupa w kształcie ściętego stożka i wydrążonego ściętego stożka (rury stożkowej). Przyjęto, że słup jest z materiału sprężystego, a jego masa jest rozłożona w sposób ciągły. Zastosowano metodę Rayleigha i przyjęto, że amplituda przemieszczeń osi drgającego pręta opisana jest funkcją trygonometryczną. Sposób wykorzystania wzorów pokazano na przykładach. Otrzymane wyniki porównano z rezultatami obliczeń z innych prac i obliczeń według normy PN-77/B-02011.

Słowa kluczowe: słup stalowy, okres drgań własnych, pierwsza częstość drgań własnych

WSTĘP

Znajomość pierwszej (najniższej) częstości drgań własnych giętych konstrukcji wieżowych, takich jak: wieże, słupy wsparcze, kominy, potrzebna jest zazwyczaj do określenia jej podatności na dynamiczne oddziaływanie porywów wiatru. Obliczenia takie można wykonać, analizując model konstrukcji w programach MES-owskich. Stosowane są także znane z mechaniki budowli obliczenia metodą energetyczną. Sposoby obliczania okresu drgań własnych podawane są czasami w normach do projektowania konstrukcji budowlanych.

ZAKRES I METODYKA BADAŃ

Przedmiotem analizy są słupy utwierdzone w podstawie i o swobodnym wierzchołku (wsporniki) z materiału sprężystego. Materiał jest jednorodny, moduł sprężystości podłużnej i gęstość materiału są stałe. Słupy mają kształt ściętego stożka pełnego i ściętych stożków wydrążonych (rur stożkowych), tak jak pokazano na rysunkach 1 i 2.

Zastosowano metodę Rayleigha, szczególny przypadek metody energetycznej, w której energia potencjalna ugięcia słupa wywołanego siłą przyłożoną poziomo do jego wierzchołka porównywana jest z największą energią kinetyczną drgających mas cienkich warstw przekroju porzecznego słupa. Przyjęto, że masy te wykonują drgania harmoniczne w płaszczyźnie prostopadłej do osi słupa, a amplituda tych drgań jest określona przez arbitralnie przyjętą funkcję. Od sposobu przyjęcia wielkości amplitud zależy dokładność metody. Przyjmowane powyżej założenia bliskie są założeniu małych przemieszczeń.

Masa pręta zastępowana jest zazwyczaj skończoną liczbą mas, a sposób ich doboru i rozmieszczenia ma istotny wpływ na pręcochłonność i dokładność obliczeń, przykłady takich obliczeń podano m.in. w pracy Dyląga i innych [2000]. Aby uzyskać dokładne rozwiązania analityczne, w niniejszej pracy przyjęto, że masa pręta jest rozłożona w sposób ciągły, a sumowanie energii poszczególnych mas składowych zastąpiono całkowaniem.

Zazwyczaj przyjmuje się kształt amplitudy wychylenia osi pręta taki sam jak osi ugiętej pod obciążeniem statycznym. Dla tak przyjętych założeń otrzymano we wcześniejszych pracach rozwiązania analityczne [Jaworski i in. 2009a] dla przypadku stożka ściętego pełnego i pewnego przypadku szczególnego rury stożkowej, kiedy tworzące stożka zewnętrznego i wewnętrznego przecinają się na osi podłużnej stożka w tym samym punkcie. W przypadku ogólnym rury stożkowej nie uzyskano rozwiązań analitycznych [Jaworski 2010], gdyż występują w nim całki z wyrażen typu: $x^p \ln(ax + b) \arctg(Ax + B)$ dla $p = 2, 3$ oraz $x^p \ln(ax^2 + bx + c) \arctg(Ax + B)$ dla $p = 0, 1, 2, 3$, dla których takie rozwiązania nie są znane.

W niniejszej pracy przyjęto, że kształt amplitudy wychylenia osi stożka podczas drgań słupa jest opisany funkcją trygonometryczną, której przebieg pokazano na rysunku 1:

$$y(x) = f_1 \left(1 - \cos \frac{\pi}{2H} x \right) P \quad (1)$$

gdzie: x, y – współrzędne,

H – wysokość słupa,

P – siła pozioma przyłożona do wierzchołka słupa,

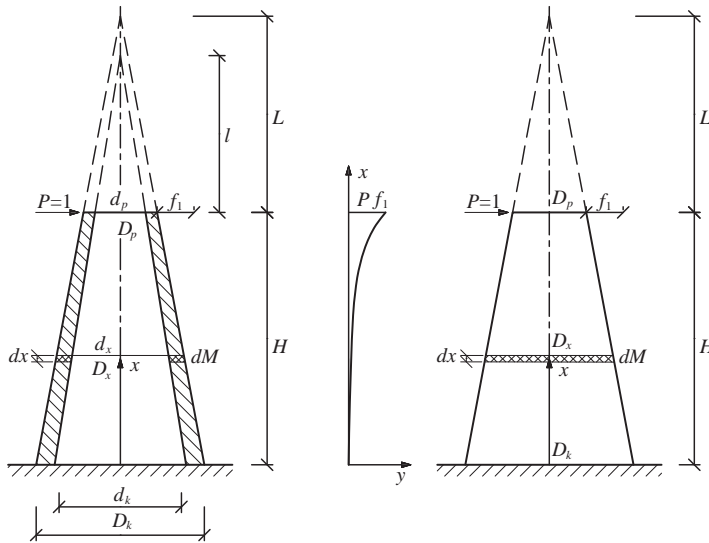
f_1 – przemieszczenie wierzchołka słupa pod działaniem siły $P = 1$.

Przyjęcie powyższej, prostej do całkowania funkcji pozwoliło na uzyskanie rozwiązań analitycznych postawionego zagadnienia. Wstępnie analizowano też przyjęcie amplitudy drgającej osi w kształcie paraboli, ale prowadziło to – w przypadku słupów w kształcie walca – do większych niedokładności rozwiązania.

Wyniki obliczeń wykonanych dla wybranego przykładu słupa porównano z rezultatami cytowanych powyżej prac i rozwiązaniami uzyskanymi według metody podanej w tablicy Z 2-2 normy PN-77/B-02011.

ŚLUP W KSZTAŁCIE RURY STOŻKOWEJ O ZMIENNEJ GRUBOŚCI ŚCIANKI

Jest to przypadek ogólny, kształt słupa i podstawowe wielkości pokazano na rysunku 1.



Rys. 1. Schemat do obliczeń okresu drgań własnych dla rury stożkowej i ściętego stożka oraz założony kształt amplitudy wychYLENIA osi słupa: x, y – osie współrzędnych, H – wysokość, L, l – odległości wierzchołka słupa od punktów przecięcia tworzących stożka zewnętrznego i wewnętrznego z osią słupa, $D_p, D_x, D_k, d_p, d_x, d_k$ – zewnętrzne i wewnętrzne średnice przy wierzchołku, dla współrzędnej x i przy podstawie, $P = 1$ – jednostkowa siła poprzeczna, f_1 – ugięcie wierzchołka słupa od siły jednostkowej, dx – elementarna długość, dM – elementarna masa

Fig. 1. Scheme for calculations of the natural period for tube shaped like a cone and for frustum of cone as well as the supposed form of amplitude of cone axis during the vibration: x, y – coordinate axis, H – height, L, l – distances between the head of column and points of intersection of generating lines of external and internal cones with a cone axis, $D_p, D_x, D_k, d_p, d_x, d_k$ – external and internal diameters at head, for coordinate x and at footing, $P = 1$ – unit transverse force, f_1 – deflection at the head of column caused by the unit force, dx – infinitesimal length, dM – infinitesimal mass, g – thickness of wall, t – horizontal projection of wall thickness

Wprowadzono następujące oznaczenia:

$$n = \frac{D_k}{D_p} \quad (2); \quad m = \frac{d_k}{d_p} \quad (3); \quad \alpha = \frac{d_p}{D_p} \quad (4)$$

i wyznaczono określone na rysunku 1 odległości L i l w funkcji wysokości słupa (H):

$$L = H \frac{D_p}{D_k - D_p} = \frac{H}{n - 1} \quad (5); \quad l = H \frac{d_p}{d_k - d_p} = \frac{H}{m - 1} \quad (6)$$

Zewnętrzną i wewnętrzną średnicę na wysokości określonej przez współrzędną x można wyrazić jako:

$$D_x = \frac{D_p}{L}(nL - x) \quad (7); \quad d_x = \frac{d_p}{l}(ml - x) \quad (8)$$

Masa M -elementarnej warstwy materiału o grubości dx i gęstości ρ , usytuowanej na wysokości określonej przez współrzędną x , jest określona wzorem:

$$\begin{aligned} dM &= \rho \frac{\pi}{4} (D_x^2 - d_x^2) dx = \\ &= \rho \frac{\pi D_p^2}{4H^2} \left[(n-1)^2 \left(\frac{Hn}{n-1} - x \right)^2 - \alpha^2 (m-1)^2 \left(\frac{Hm}{m-1} - x \right)^2 \right] dx \end{aligned} \quad (9)$$

a moment bezwładności (J) przekroju poprzecznego:

$$\begin{aligned} J(x) &= \frac{\pi}{64} (D_x^4 - d_x^4) = \\ &= \frac{\pi D_p^4}{64H^2} \left[(n-1)^4 \left(\frac{Hn}{n-1} - x \right)^4 - \alpha^4 (m-1)^4 \left(\frac{Hm}{m-1} - x \right)^4 \right] \end{aligned} \quad (10)$$

Energia potencjalna (E_p) związana z ugięciem statycznym słupa wynosi:

$$E_p = \frac{1}{2} P^2 f_1 \quad (11)$$

a energia kinetyczna (E_k):

$$E_k = \int \frac{M v^2(x) dM}{2} = \int \frac{M \omega^2 y^2(x) dM}{2} \quad (12)$$

gdzie: x, y – współrzędne,

M – masa słupa,

v – największa prędkość mas elementarnych warstw,

ω – częstość kołowa drgań.

Przyjmując kształt osi amplitudy drgań w postaci krzywej pokazanej na rysunku 1 i opisanej równaniem (1), otrzymuje się wyrażenie:

$$\begin{aligned} E_k &= \rho \frac{\pi D_p^2}{4H^2} \frac{\omega^2}{2} f_1^2 P^2 \int_0^H \left(1 - \cos \frac{\pi}{2H} x \right)^2 \left[(n-1)^4 \left(\frac{Hn}{n-1} - x \right)^4 - \alpha^4 (m-1)^4 \left(\frac{Hm}{m-1} - x \right)^4 \right] dx = \\ &= \rho \frac{\pi D_p^2}{4H^2} \frac{\omega^2}{2} f_1^2 P^2 \frac{H^3}{2\pi^3} F_2 \end{aligned} \quad (13)$$

gdzie:

$$F_2 = \pi^3 \left[(n^2 + n + 1) - \alpha^2 (m^2 + m + 1) \right] - 8\pi^2 (1 - \alpha^2) + 64 \left[(n-1)^2 - \alpha^2 (m-1)^2 \right] + \\ - 2\pi \left[(15n-1)(n-1) - \alpha^2 (15m-1)(m-1) \right] \quad (14)$$

Do obliczenia ugięcia wierzchołka słupa pod wpływem przyłożonej do niego poziomo siły jednostkowej metodą Maxwella-Mohra skorzystano ze sformułowania zagadnienia i schematu jego rozwiązania w pracy Jaworskiego i innych [2009a]. Używając tablic całek [Spiegel i Abellanas 1991], otrzymano następujące zależności:

$$f_1 = \int_0^H \frac{x^2 dx}{EJ(x)} = \frac{64H^4}{\pi ED_p^4} \int_0^H \frac{x^2 dx}{(n-1)^4 (L+x)^4 - \alpha^4 (m-1)^4 (l+x)^4} = \\ = \frac{64H^4}{\pi ED_p^4} \int_0^H \frac{1}{e} \left(\frac{A}{x+a} + \frac{B}{x+b} + \frac{Cx}{x^2+cx+d} + \frac{D}{x^2+cx+d} \right) x^2 dx = \frac{64H^4}{\pi ED_p^4} \frac{1}{e} F_1 \quad (15)$$

gdzie:

$$a = \frac{(n-1)L - \alpha(m-1)l}{(n-1) - \alpha(m-1)}; \quad b = \frac{(n-1)L + \alpha(m-1)l}{(n-1) + \alpha(m-1)}; \\ c = \frac{2L(n-1)^2 + 2l\alpha^2(m-1)^2}{(n-1)^2 + \alpha^2(m-1)^2}; \quad d = \frac{(n-1)^2 L^2 + \alpha^2(m-1)^2 l^2}{(n-1)^2 + \alpha^2(m-1)^2}; \\ A = \frac{-1}{(a-b)(a^2 - ac + d)}; \quad B = \frac{1}{(a-b)(b^2 - bc + d)}; \\ C = -A - B; \quad D = \frac{1}{ab} - A\frac{d}{a} - B\frac{d}{b}; \quad e = (n-1)^4 - \alpha^4(m-1)^4;$$

$$F_1 = H(D - aA - bB - cC) + a^2 A \ln\left(\frac{H}{a} + 1\right) + b^2 B \ln\left(\frac{H}{b} + 1\right) + 0,5 \left[(c^2 - d)C - cD \right] \times \\ \times \ln \frac{H^2 + Hc + d}{d} + \frac{c(3d - c^2)C + (c^2 - 2d)D}{\sqrt{4d - c^2}} \left(\arctan \frac{2H + c}{\sqrt{4d - c^2}} - \arctan \frac{c}{\sqrt{4d - c^2}} \right)$$

Z porównania energii potencjalnej i kinetycznej ($E_p = E_k$) otrzymuje się końcowe wzory na pierwszą częstość drgań (ω) i okres drgań (T):

$$\omega^2 = \frac{\pi^3 ED_p^2}{8\rho H^5 e F_1 F_2} \quad (17)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{4H^2 T}{D_p} \sqrt{\frac{2\rho H}{\pi E}} \sqrt{\frac{F_1 F_2}{e}} \quad (18)$$

W powyższych rozważaniach przyjęto następujące założenia:

- $D_k > d_k > 0$; $D_p > d_p > 0$; $D_k > D_p$; $d_k > d_p$; $L > l$; przekrój podstawy jest większy od przekroju wierzchołka; słupek o kształcie walca nie jest przypadkiem szczególnym tego rozwiązania; średnice przy wierzchołku słupa nie mogą być równe zeru,
- $D_k - D_p \neq d_k - d_p$, a więc $g \neq \text{const}$, czyli grubość ścianki nie może być stała, a skoro $L \neq l$ – co za tym idzie – $D_p d_k \neq D_k d_p$, więc $m \neq n$.

W kolejnych punktach pracy zostaną rozpatrzone słupki o kształtach niespełniających powyższych założeń, dlatego wzory dla tych słupków muszą być wyprowadzone oddzielnie.

ŚLUP W KSZTAŁCIE ŚCIĘTEGO STOŻKA

Podczas analizy pokazanego na rysunku 1 ściętego stożka pełnego, prowadzonej analogicznie jak w poprzednim punkcie, pozostają ważne związki (1), (4) i (6).

Masa elementarnego plastra o grubości dx usytuowanego na wysokości określonej przez współrzędną x jest określona wzorem:

$$dM = \rho \frac{\pi}{4} D_x^2 dx = \rho \frac{\pi D_p^2 (n-1)^2}{4H^2} \left(\frac{Hn}{n-1} - x \right)^2 dx \quad (19)$$

Z pracy Jaworskiego i innych [2009a] przyjęto wzór:

$$f_1 = \frac{64H^4}{\pi E D_p^4 (n-1)^4} \left[-\frac{1}{H+L} + \frac{L}{(H+L)^2} - \frac{L^2}{3(H+L)^3} + \frac{1}{3L} \right] = \frac{64H^3}{3\pi E D_p^4 n^3} \quad (20)$$

Energia kinetyczna może być wyrażona jako:

$$\begin{aligned} E_k &= \rho \frac{\pi D_p^2 (n-1)^2 \omega^2 f_1^2 P^2}{8H^2} \int_0^H \left(1 - \cos \frac{\pi}{2H} x \right)^2 \left(\frac{Hn}{n-1} - x \right)^2 dx = \\ &= \rho \frac{\pi D_p^2 (n-1)^2 \omega^2 f_1^2 P^2}{8H^2} \frac{H^3}{2\pi^3 (n-1)^2} F_3 \end{aligned} \quad (21)$$

gdzie:

$$F_3 = \pi^3 (n^2 + n + 1) - 8\pi^2 - 2\pi(15n-1)(n-1) + 64(n-1)^2 \quad (22)$$

Wzory na częstość i okres drgań przyjmują w tym przypadku postać:

$$\omega^2 = \frac{3\pi^3 E n^3 D_p^2}{8\rho H^4 F_3} \quad (23)$$

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{4H^2}{D_p} \sqrt{\frac{2\rho F_3}{3\pi E n^3}} = \\
 &= \frac{4H^2}{D_p} \sqrt{\frac{2\rho \left[\pi^3 (n^2 + n + 1) - 8\pi^2 - 2\pi(15n - 1)(n - 1) + 64(n - 1)^2 \right]}{3\pi E n^3}}
 \end{aligned} \quad (24)$$

ŚLUP W KSZTAŁCIE RURY STOŻKOWEJ, GDY $L = l$

Jeśli tworzące stożka zewnętrznego i wewnętrznego przecinają się w jednym punkcie na osi stożka, jak na rysunku 2a, czyli gdy $L = l$, to $m = n$ i spełniona jest zależność:

$$L = l = \frac{H}{n - 1} \quad (25)$$

wtedy masę elementarną i moment bezwładności można wyrazić jako:

$$dM = \rho \frac{\pi D_p^2 (n - 1)^2 (1 - \alpha^2)}{4H^2} \left(\frac{Hn}{n - 1} - x \right)^2 dx \quad (26)$$

$$J(x) = \frac{\pi D_p^4 (n - 1)^4 (1 - \alpha^4)}{4H^4} \left(\frac{Hn}{n - 1} - x \right)^4 dx \quad (27)$$

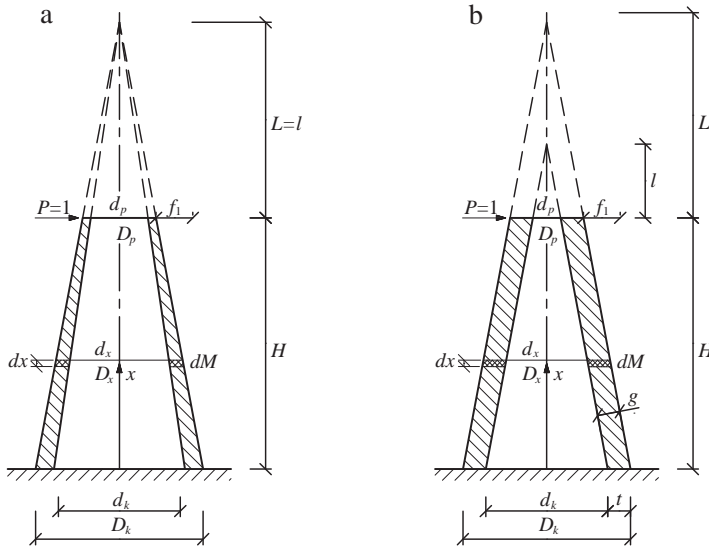
Jednostkowe ugięcie wierzchołka słupa wynosi:

$$\begin{aligned}
 f_1 &= \frac{64H^4}{\pi E D_p^4 (n - 1)^4 (1 - \alpha^4)} \left[-\frac{1}{H + L} + \frac{L}{(H + L)^2} - \frac{L^2}{3(H + L)^3} + \frac{1}{3L} \right] = \\
 &= \frac{64H^3}{3\pi E D_p^4 n^3 (1 - \alpha^4)}
 \end{aligned} \quad (28)$$

Wzory na pierwszą częstość i okres drgań własnych przyjmują postać:

$$\omega^2 = \frac{3\pi^3 E D_p^2 n^3 (1 + \alpha^2)}{8\rho H^4 \left[\pi^3 (n^2 + n + 1) - 8\pi^2 - 2\pi(15n - 1)(n - 1) + 64(n - 1)^2 \right]} \quad (29)$$

$$T = \frac{4H^2}{D_p} \sqrt{\frac{2\rho \left[\pi^3 (n^2 + n + 1) - 8\pi^2 - 2\pi(15n - 1)(n - 1) + 64(n - 1)^2 \right]}{3\pi E n^3 (1 + \alpha^2)}} \quad (30)$$



Rys. 2. Schematy do obliczeń okresu drgań własnych dla przypadków szczególnej rury stożkowej: a – gdy tworzące stożka zewnętrznego i wewnętrznego przecinają oś stożka w jednym punkcie, b – o stałej grubości ścianki; x – oś współrzędnych, H – wysokość, L , l – odległości wierzchołka słupa od punktów przecięcia tworzących stożka zewnętrznego i wewnętrznego z osią słupa, D_p , D_x , D_k , d_p , d_x , d_k – zewnętrzne i wewnętrzne średnice przy wierzchołku, dla współrzędnej x i przy podstawie, $P = 1$ – jednostkowa siła poprzeczna, f_1 – ugięcie wierzchołka słupa od siły jednostkowej, d_x – elementarna długość, dM – elementarna masa, g – grubość ścianki, t – rzut poziomy grubości ścianki

Fig. 2. Scheme for calculations of natural period in particular cases of tube shaped like a cone: a – when generating lines of external and internal cone are crossing the cone axis in the same point, b – with constant wall thickness; x – coordinate axis, H – height, L , l – distances between the head of column and points of intersection of generating lines of external and internal cones with a cone axis, D_p , D_x , D_k , d_p , d_x , d_k – external and internal diameters at head, for coordinate x and at footing, $P = 1$ – unit transverse force, f_1 – deflection at the head of column caused by the unit force, d_x – infinitesimal length, dM – infinitesimal mass, g – thickness of wall, t – horizontal projection of wall thickness

Można więc zauważyć, że:

$$T_{(30)} = \frac{T_{(24)}}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \quad (31)$$

Rozwiązanie dla stożka ściętego pełnego można też wykorzystać w przypadku ściętych ostrosłupów prawidłowych, jak to pokazano w pracy Jaworskiego i innych [2009a].

ŚLUP W KSZTAŁCIE RURY STOŻKOWEJ O STAŁEJ GRUBOŚCI ŚCIANKI

Posłużono się rzutem poziomym grubości ścianki (t), który jest funkcją grubości (g), jak wynika z rysunku 2b:

$$t = g \frac{\sqrt{4H^2 + (D_k - D_p)^2}}{2H} \quad (32)$$

Otrzymano zależności:

$$D_x = \frac{D_p}{L}(nL - x); \quad d_x = D_x - 2t \quad (33)$$

$$dM = \rho \frac{\pi}{4} (D_x^2 - d_x^2) dx = \rho \pi t \left[\frac{D_p(n-1)}{H} \left(\frac{Hn}{n-1} - x \right) - t \right] dx \quad (34)$$

$$f_1 = \frac{8H^3}{\pi E t^3 (D_k - D_p)^3} F_4 = \frac{8H^3}{\pi E t^3 D_p^3 (n-1)^3} F_4 \quad (35)$$

$$E_k = \rho \pi t \frac{\omega^2}{2} f_1^2 P^2 \int_0^H \left(1 - \cos \frac{\pi}{2H} x \right)^2 \left[\frac{D_p}{L} (nL - x) - t \right] dx = \frac{\rho t H \omega^2 f_1^2 P^2}{8\pi} F_5 \quad (36)$$

gdzie:

$$F_4 = (D_d - t)^2 + \ln \frac{nD_p - t}{D_p - t} - \frac{D_p}{2} (D_d - 2t) \ln \frac{(nD_d - t)^2 + t^2}{(D_d - t)^2 + t^2} +$$

$$- 2t(D_d - t) \left[\arctan \left(\frac{nD_p}{t} - 1 \right) - \arctan \left(\frac{D_p}{t} - 1 \right) \right] \quad (37)$$

$$F_5 = D_p \left[3\pi^2(n+1) - 16\pi - 28(n-1) \right] - 2\pi t(3\pi - 8) \quad (38)$$

Końcowe wzory na pierwszą częstość i okres drgań własnych mają postać:

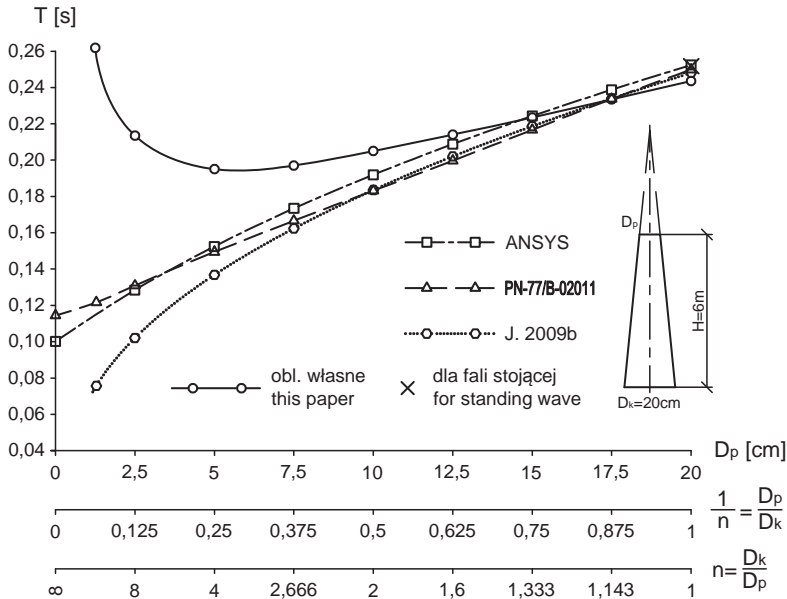
$$\omega^2 = \frac{\pi^3 E t^2 D_p^3 (n-1)^3}{2\rho H^4 F_3 F_5} \quad (39)$$

$$T = \frac{2H^2}{t} \sqrt{\frac{2\rho F_4 F_5}{E D_p^3 (n-1)^3}} \quad (40)$$

WYNIKI OBLICZEŃ

Obliczenia wykonano dla stalowych słupów wysokości $H = 6$ m, średnicy przy podstawie $D_k = 20$ cm i różnym stopniu nachylenia ścianek. Przyjęto moduł Younga $E = 205$ GPa i gęstość stali $\rho = 7850$ kg·m⁻³.

Na rysunku 3 pokazano zależność okresu drgań słupa w kształcie ściętego stożka (pełnego) od nachylenia ścianek stożka. Wyniki obliczeń własnych porównano z obliczeniami metodą elementów skończonych w programie ANSYS, według tablicy Z 2-2 normy PN-77/B-02011 i według metody energetycznej, przy założeniu, że kształt amplitudy osi drgającego stożka jest taki jak linia ugięcia statycznego po przyłożeniu do wierzchołka słupa siły poziomej. Wykorzystano tu wyniki pracy Jaworskiego i innych [2009b].



Rys. 3. Porównanie wyników obliczeń okresu drgań własnych stalowego słupa w kształcie ściętego stożka o różnym stopniu nachylenia ścianek: T – okres drgań, D_k – średnica przy podstawie słupa, D_p – średnica przy wierzchołku słupa, n – stosunek średnic zewnętrznych, H – wysokość słupa

Fig. 3. Comparison of calculation results of natural period of steel columns in form of frustum of cone with different inclination of generating line: T – period, D_k – diameter at column footing, D_p – diameter at column head, n – external diameters ratio, H – height

W zakresie małych zbieżności ścianek stożka wszystkie krzywe mają podobny przebieg, a różnice pomiędzy wartościami okresu drgań są niewielkie. Dla słupa w kształcie walca wyniki wszystkich obliczeń są bliskie rozwiązaniu równania drgań poprzecznych pręta, które określa tzw. fale stojące [np. Dyląg i in. 2000], z którego wynika dokładny wzór na okres drgań:

$$T = 1,787 \sqrt{\frac{MH^3}{EJ}} = 1,787 \frac{4H^2}{D} \sqrt{\frac{\rho}{E}} \quad (41)$$

Dla metody energetycznej i przy założeniu, że amplituda drgań osi pręta o stałym przekroju kołowym ma kształt linii ugięcia pod działaniem siły statycznej, okres drgań wyraża się jako:

$$T = \pi \sqrt{\frac{11}{35}} \sqrt{\frac{MH^3}{EJ}} = 1,7612 \frac{4H^2}{D} \sqrt{\frac{MH^3}{EJ}} \quad (42)$$

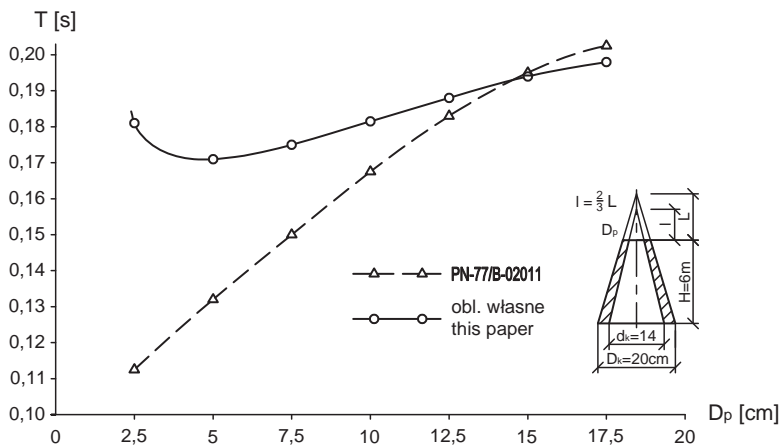
a przy założeniu, że jest ona opisana funkcją trygonometryczną jak we wzorze (1):

$$T = \sqrt{\frac{2\pi(3\pi - 8)}{3}} \sqrt{\frac{MH^3}{EJ}} = 1,7274 \sqrt{\frac{MH^3}{EJ}} \quad (43)$$

Różnice między wynikiem obliczenia okresu drgań słupa w kształcie walca według wzoru (41) a wynikami kolejnych obliczeń nie przekraczają: w programie ANSYS – 0,25%, według PN-77/B-02011 – 0,75%, według wzoru (42) – 1,5%, a według wzoru (42) – 3,4%.

W zakresie dużych zbieżności ścianek stożka różnice pomiędzy rozwiązaniem MES i według PN-77/B-02011 pozostają dla rozpatrywanego przykładu stosunkowo niewielkie (gdy $D_p = 0$, czyli dla stożka, nie przekraczają one 7%), natomiast wyniki obliczeń metodą energetyczną coraz bardziej od nich odbiegają wraz ze zwiększającą się zbieżnością stożka. Istotne znaczenie ma tu przyjęty kształt amplitudy osi drgającego stożka. Przy założeniu z pracy Jaworskiego i innych [2009b], gdy D_p dąży do zera, to krzywa $T = T(D_p)$ też dąży do zera, a przy założeniu z tej pracy, krzywa $T = T(D_p)$ dąży wtedy do nieskończoności.

Dla ogólnego przypadku rury stożkowej (stożka wydrążonego) porównano słupy o zróżnicowanych kątach nachylenia ścianki zewnętrznej (różnych wartościach D_p) i takiej budowie, że $l = 2/3L$ (rys. 4). Przy dużych kątach nachylenia stożka zewnętrznego

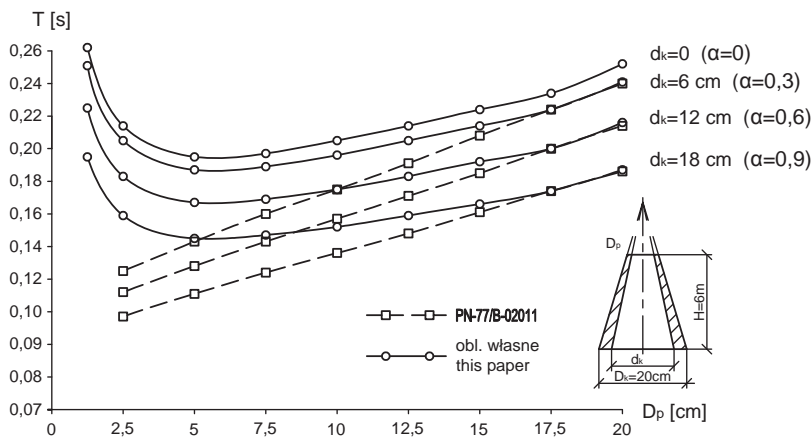


Rys. 4. Okres drgań własnych rur stożkowych, dla których $l = 2/3L$, o różnym stopniu nachylenia ścianek: T – okres drgań, D_k, d_k – zewnętrzne i wewnętrzne średnice przy podstawie słupa, D_p – średnica zewnętrzna przy wierzchołku, H – wysokość słupa, L, l – odległości wierzchołka słupa od punktów przecięcia tworzących stożka zewnętrznego i wewnętrznego z osią słupa

Fig. 4. Natural period of tubes shaped like a cone, when $l = 2/3L$, with different inclination of generating line: T – period, D_k, d_k – external and internal diameters at column footing, D_p – diameter at column head, H – height, L, l – distances between the head of column and points of intersection of generating lines of external and internal cones with a cone axis

(dla $D_p < 5$ cm, co odpowiada $n > 4$) wraz ze zmniejszaniem się D_p krzywa $T = T(D_p)$ gwałtownie rośnie. Porównanie z obliczeniami według PN-77/B-02011 pokazuje, że dla małych kątów nachylenia stożka (dla $D_p > 12,5$ cm, co odpowiada $n < 1,6$) wyniki niewiele się różnią, a przy dużych kątach nachylenia stożka wyniki różnią się znacznie.

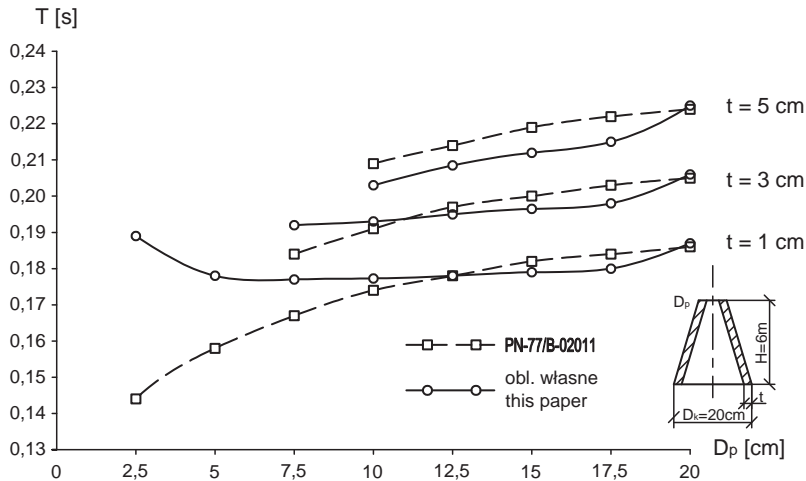
Dla szczególnego przypadku rury stożkowej, kiedy tworzące stożka zewnętrznego i wewnętrznego przecinają się w jednym punkcie na osi stożka ($l = L$), na rysunku 5 pokazano przebieg krzywych $T = T(D_p)$ dla rur o różnych grubościach ścianek. Rzut poziomy grubości ścianek przy podstawie wynosił odpowiednio: 1, 4, 7 i 10 cm, ten ostatni przypadek odpowiada stożkowi ściętemu pełnemu. Charakter krzywych $T = T(D_p)$ i porównanie z wynikami według PN-77/B-02011 są tu podobne jak w przypadku stożka ściętego pełnego.



Rys. 5. Okres drgań własnych rur stożkowych, dla których $l = L$, o różnym stopniu nachylenia ścianek i różnej grubości ścianek: T – okres drgań, D_p , d_p , D_k , d_k – zewnętrzne i wewnętrzne średnice przy wierzchołku i przy podstawie słupa, α – stosunek średnic przy wierzchołku słupa, H – wysokość słupa, L , l – odległości wierzchołka słupa od punktów przecięcia tworzących stożka zewnętrznego i wewnętrznego z osią słupa

Fig. 5. Natural period of tubes shaped like a cone, when $l = L$, with different inclination of generating line and different wall thicknesses: T – period, D_p , d_p , D_k , d_k – external and internal diameters at head and at footing, α – ratio of diameters at column head, H – height, L , l – distances between the head of column and points of intersection of external and internal cones with a cone axis

Wyniki dla rur stożkowych o stałej grubości ścianki pokazano na rysunku 6. Jest to istotny w praktyce przypadek rury stożkowej wykonanej z blachy. Uwzględniono trzy grubości ścianki (ich rzuty poziome (t) wynoszą odpowiednio 3 i 5 cm). Jeżeli nie jest spełniony warunek, że $D_p > 2t$, to zagadnienie traci sens fizyczny, brak więc wyników dla dużych kątów nachylenia tworzącej stożka przy $t = 3$ i 5 cm. Przebieg krzywych $T = T(D_p)$ jest podobny jak na sąsiednich rysunkach. Porównanie z wynikami według PN-77/B-02011 wskazuje na rosnącą różnicę wyników wraz ze zwiększającym się kątem nachylenia stożka (zmniejszającą się wartością D_p). Rury o mniejszej grubości ścianki charakteryzują się mniejszym okresem pierwszej częstoty drgań (T), widać to zarówno na rysunku 6, jak i 5.



Rys. 6. Okres drgań własnych rur stożkowych ze ściankami o stałej grubości, o różnym stopniu nachylenia ścianek: T – okres drgań, D_p , D_k – średnice zewnętrzne przy wierzchołku i przy podstawie słupa, H – wysokość słupa, t – rzut poziomy grubości ścianki

Fig. 6. Natural period of tubes shaped like a cone with walls of constant thickness, with different inclination of generating line: T – period, D_p , D_k – external diameters at head and at footing, H – height, t – horizontal projection of wall thickness

PODSUMOWANIE

Przy zastosowaniu do słupów wspornikowych w kształcie rur stożkowych metody energetycznej i założeniu, że kształt amplitudy wychylenia osi stożka podczas drgań słupa opisany jest funkcją trygonometryczną (1), otrzymano rozwiązanie analityczne na częstość i okres pierwszej postaci drgań własnych. Podano też wzory dla stożka pełnego, gdy $l = L$ i gdy $t = \text{const}$, przypadki te wymagają oddzielnego rozwiązania.

W zakresie małych kątów nachylenia tworzącej stożka (niewielkiej zbieżności rur stożkowych, dla $n < 1,6$) zgodność obliczeń własnych z wynikami według PN-77/B-02011 i metodą elementów skończonych jest dobra. Gdy rośnie kąt nachylenia tworzącej stożka (dla $n > 2$), różnice pomiędzy wynikami obliczeń różnymi metodami stają się coraz większe. Dla słupów o kształcie bliskim stożkowi (gdy $n > 8$) obliczony według wyprowadzonych wzorów okres drgań (T) gwałtownie rośnie i dąży do nieskończoności, gdy $n \rightarrow \infty$, a $D_p \rightarrow 0$.

Natomiast przy rozwiązaniu metodą energetyczną i założeniu, że kształt amplitudy wychylenia osi stożka pełnego podczas drgań słupa jest taki jak linia ugięcia statycznego po przyłożeniu do wierzchołka słupa siły poziomej, okres drgań (T) dla słupów o kształcie bliskim stożkowi wyraźnie maleje, dążąc do zera, gdy $n \rightarrow \infty$, a $D_p \rightarrow 0$.

PIŚMIENNICTWO

- Dyłał Z., Jakubowicz A., Orłoś Z., 2000. Wytrzymałość materiałów. T. 2. WNT, Warszawa.
- Jaworski J., 2010. O pewnej metodzie obliczania pierwszej częstości drgań własnych słupów stalowych w kształcie wydrążonego ściętego stożka. *Acta Scientiarum Polonorum, Architectura* 9 (3), 3–15.
- Jaworski J., Boniecka M., Nycz M., 2009a. Obliczanie pierwszej częstości drgań własnych słupów stalowych o zmiennym przekroju poprzecznym. Część I. Wyprowadzenie wzorów. *Acta Scientiarum Polonorum, Architectura* 8 (1–2), 3–20.
- Jaworski J., Boniecka M., Nycz M., 2009b. Obliczanie pierwszej częstości drgań własnych słupów stalowych o zmiennym przekroju poprzecznym. Część II. Wyniki. *Acta Scientiarum Polonorum, Architectura* 8 (3–4), 21–31.
- PN-77/B-02011 Obciążenia w obliczeniach statycznych. Obciążenia wiatrem.
- Spiegel M.R., Abellanas L., 1991. *Formulas y tablas de matematica aplicada*. McGraw-Hill / Intermamericana, Madryt.

FIRST NATURAL FREQUENCY OF COLUMNS IN FORM OF TUBES SHAPED LIKE A CONE

Abstract. Formulas for calculations of the first natural frequency of vibration for columns in a form of frustum of cone and tubes shaped like a cone are derived. Elastic material and continuous distribution of the column mass was assumed. Rayleigh's method was used and the form of amplitude of cone axis during the vibration was supposed to be described by a trigonometric function. The application of derived formulas was presented using some examples and results obtained are compared with those given in other papers and calculated according to Polish standard PN-77/B-02011.

Key words: steel column, post, natural period, first natural frequency

Zaakceptowano do druku – Accepted for print: 20.02. 2013