

MODEL ASYMPTOTYCZNY PRZEWODNICTWA CIEPLNEGO W OŚRODKACH WIELOSZKŁADNIKOWYCH O FUNKCYJNEJ GRADACJI WŁASNOŚCI MATERIAŁOWYCH

Vazgen Bagdasaryan, Wiesław Nagórko

Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie

Streszczenie. Przedmiotem rozważań są ośrodki niejednorodne złożone ze składników jednorodnych. Rozkład tych składników w ośrodku można opisać funkcjami wolnozmiennymi. W pracy skonstruowano model przewodnictwa cieplnego, w którym zamiast równania Fouriera o nieciągłych, skokowo zmieniających się współczynnikach występuje równanie o współczynnikach ciągłych i wolnozmiennych. Wpływ niejednorodności ośrodka na temperaturę opisano dodatkowymi funkcjami, które wyznaczono, znając temperaturę uśrednioną, ze wzorów podanych w sposób jawny. W szczególnym przypadku, ośrodka periodycznego, równanie przewodnictwa cieplnego ma znaną postać, ze stałymi współczynnikami. W pracy przedstawiono proste przykłady rozwiązań numerycznych.

Słowa kluczowe: równanie Fouriera, materiały typu FGM, uśrednianie tolerancyjne

WSTĘP

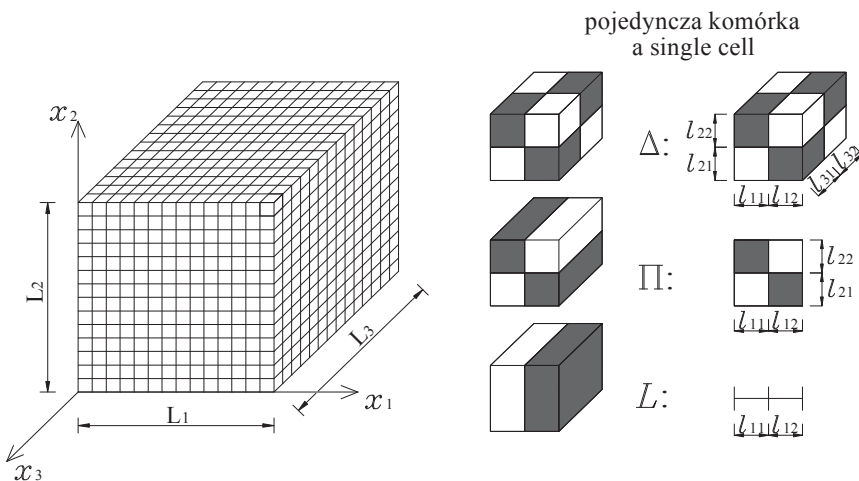
Praca poświęcona jest materiałom niejednorodnym, złożonym ze składników jednorodnych, a więc kompozytom. Rozważane kompozyty nie mają jednak struktury dowolnej, ale taką, w której można wydzielić powtarzające się elementy o zmieniających się własnościach termicznych w sposób funkcyjny.

Z różnych metod homogenizacyjnych, jakie mogą tu być zastosowane do modelowania, wybrano metodę uśredniania tolerancyjnego [Woźniak i Wierzbicki 2000, Woźniak i in., red. 2008].

W pracy przedstawiono równania uśrednione przewodnictwa cieplnego w ośrodkach dwuskładnikowych typu szachownica, materiałach zbrojonych prętami oraz laminatach.

OSRODEK WIELOSKLADNIKOWY TYPU FGM

Konfiguracją ośrodka będzie obszar $\Omega \subset R^3$, $\Omega = (0, L_1) \times (0, L_2) \times (0, L_3)$. Będziemy rozważać materiały złożone z połączonych składników będących prostopadłościanami o wymiarach l_k , $k = 1, 2, 3$. Wymiary l_k są ustalone, czyli l_k , $k = 1, 2, 3$ są liczbami oraz $L_1 = n_1 l_1$, $L_2 = n_2 l_2$, $L_3 = n_3 l_3$, gdzie n_k , $k = 1, 2, 3$ są liczbami naturalnymi takimi, że $l_k \ll L_k$, $k = 1, 2, 3$. Oznacza to, że prostopadłościanów w rozpatrywanym ośrodku jest dużo, $\frac{1}{n_k} \ll 1$, $k = 1, 2, 3$ (rys. 1a).



Rys. 1. Konfiguracja przewodnika: a – schemat całego przewodnika, b – pojedyncza komórka
Fig. 1. Conductor's configuration: a – whole conductor's diagram, b – a single cell

Będziemy rozważać także ośrodki złożone z połączonych belek o wymiarach przekroju l_α , $\alpha = 1, 2$ i długości L_3 bądź połączonych warstw o grubości l_1 i pozostałych wymiarach L_2, L_3 (rys. 1b).

Oznaczmy środki prostopadłościanów o wymiarach l_k , przez (x_1^i, x_2^i, x_3^i) , $i = 1, 2, \dots, n_1 \cdot n_2 \cdot n_3$. Wtedy każdy z tych prostopadłościanów można zapisać jako zbiór:

$$\Delta^i \subset R^3, \Delta^i = (x_1^i - \frac{l_1}{2}, x_1^i + \frac{l_1}{2}) \times (x_2^i - \frac{l_2}{2}, x_2^i + \frac{l_2}{2}) \times (x_3^i - \frac{l_3}{2}, x_3^i + \frac{l_3}{2}) \quad (1)$$

Dla ośrodka złożonego z belek elementem powtarzającym się jest prostokąt, który można zapisać:

$$\Pi^i \subset R^2, \Pi^i = (x_1^i - \frac{l_1}{2}, x_1^i + \frac{l_1}{2}) \times (x_2^i - \frac{l_2}{2}, x_2^i + \frac{l_2}{2}) \quad (2)$$

gdzie: (x_1^i, x_2^i) , $i = 1, 2, \dots, n_1 \cdot n_2$ są jego środkami.

Z kolei dla laminatu powtarzającym się elementem jest odcinek o środku x_1^i w postaci:

$$\Lambda^i \subset R, \Lambda^i = (x_1^i - \frac{l_1}{2}, x_1^i + \frac{l_1}{2}) \quad (3)$$

gdzie $i = 1, 2, \dots, n_1$.

Założmy dalej, że każdy z obszarów $\Delta^i, \Pi^i, \Lambda^i$ można podzielić na składniki płaszczynami równoległymi do odpowiednich osi współrzędnych oraz przechodzącymi przez punkty podziału krawędzi elementów Δ^i, Π^i lub Λ^i tak, że punkty te definiują odcinki o długości l_{1a}, l_{2b}, l_{3c} , $a = 1, 2, \dots, a_o, b = 1, 2, \dots, b_o, c = 1, 2, \dots, c_o$. Zachodzi wtedy:

$$l_1 = \sum_{a=1}^{a_o} l_{1a}, \quad l_2 = \sum_{b=1}^{b_o} l_{2b}, \quad l_3 = \sum_{c=1}^{c_o} l_{3c} \quad (4)$$

Prostopadłościany o wymiarach l_{1a}, l_{2b}, l_{3c} , prostokąty l_{1a}, l_{2b} i odcinki o długości l_{1a} oznaczymy odpowiednio przez: $\Delta_{abc}, \Pi_{ab}, \Lambda_a$.

Jeżeli wymiary obszarów $\Delta_{abc}, \Pi_{ab}, \Lambda_a$ są takie same w każdym obszarze, to mamy do czynienia z ośrodkiem periodycznym. Elementem reprezentatywnym albo komórką periodyczności jest wtedy $\Delta = (0, l_1) \times (0, l_2) \times (0, l_3)$ lub analogicznie $\Pi = (0, l_1) \times (0, l_2)$ i $\Lambda = (0, l_1)$ – rysunek 1b.

Dla ośrodków periodycznych można zdefiniować komórkę periodyczności w punkcie $(x_1, x_2, x_3) \in \Omega$ takim, że $(x_1 - \frac{l_1}{2}, x_1 + \frac{l_1}{2}) \in (0, l_1)$, $(x_2 - \frac{l_2}{2}, x_2 + \frac{l_2}{2}) \in (0, l_2)$, $(x_3 - \frac{l_3}{2}, x_3 + \frac{l_3}{2}) \in (0, l_3)$ w postaci:

$$\Delta(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - \frac{l_1}{2}, x_1 + \frac{l_1}{2}) \times (x_2 - \frac{l_2}{2}, x_2 + \frac{l_2}{2}) \times (x_3 - \frac{l_3}{2}, x_3 + \frac{l_3}{2})$$

$$\Pi(x_1, x_2) = (x_1 - \frac{l_1}{2}, x_1 + \frac{l_1}{2}) \times (x_2 - \frac{l_2}{2}, x_2 + \frac{l_2}{2})$$

$$\Lambda(x_1) = (x_1 - \frac{l_1}{2}, x_1 + \frac{l_1}{2})$$

W pracy rozważać będziemy ośrodki nieperiodyczne, czyli takie, dla których liczby l_{1a}, l_{2a}, l_{3a} mogą być różne w różnych elementach $\Delta^i, \Pi^i, \Lambda^i$, spełniające jednak warunki (4).

O składnikach $\Delta_{abc}, \Pi_{ab}, \Lambda_a$ założymy, że są jednorodne. Oznacza to, że własności materiałowe ośrodka: gęstość masy (ρ), ciepło właściwe (c), składowe tensora prze-

wodnictwa cieplnego $K = (K_{kl})$, $k, l = 1, 2, 3$ są w Δ_{abc} , Π_{ab} , Λ_a stałe. I tak dla Δ_{abc} mamy:

$$\begin{aligned} \rho(x_1, x_2, x_3) \Big|_{(x_1, x_2, x_3) \in \Delta_{abc}} &\equiv \rho_{abc} \\ c(x_1, x_2, x_3) \Big|_{(x_1, x_2, x_3) \in \Delta_{abc}} &\equiv c_{abc} \\ K_{kl}(x_1, x_2, x_3) \Big|_{(x_1, x_2, x_3) \in \Delta_{abc}} &\equiv K_{kl}^{abc} \end{aligned} \quad (5)$$

Podobnie jest dla Π_{ab} i Λ_a .

Jeżeli istnieją co najmniej dwa elementy Δ_{abc} , $\Delta_{a'b'c'}$, dla których zachodzi przynajmniej jeden z warunków $\rho_{abc} \neq \rho_{a'b'c'}$, $c_{abc} \neq c_{a'b'c'}$, $K^{abc} \neq K^{a'b'c'}$, analogicznie dla Π_{ab} , $\Pi_{a'b'}$, $\rho_{ab} \neq \rho_{a'b'}$, $c_{ab} \neq c_{a'b'}$, $K^{ab} \neq K^{a'b'}$ oraz dla Λ_a , $\Lambda_{a'}$, $\rho_a \neq \rho_{a'}$, $c_a \neq c_{a'}$, $K^a \neq K^{a'}$, to taki ośrodek nazwiemy wieloskładnikowym.

Oznaczmy przez η_{abc}^i nasycenie składnikiem Δ_{abc} komórki Δ^i :

$$\eta_{abc}^i \equiv \frac{|\Delta_{abc}^i|}{l_1 l_2 l_3} \quad (6)$$

gdzie $|\Delta_{abc}^i|$ jest objętością składnika Δ_{abc} w prostopadłościanie Δ^i . Oczywiście dla każdego $i = 1, 2, \dots, n_1 \cdot n_2 \cdot n_3$ zachodzi równość:

$$\sum_{a=1}^{a_0} \sum_{b=1}^{b_0} \sum_{c=1}^{c_0} \eta_{abc}^i = 1 \quad (7)$$

Podobnie definiujemy η_{ab}^i oraz η_a^i .

Na niejednorodność ośrodka narzucimy ograniczenia w postaci założenia, że funkcje η_{abc}^i , η_{ab}^i , η_a^i , określone na dyskretnym zbiorze punktów (x_1^i, x_2^i, x_3^i) , (x_1^i, x_2^i) , lub x_1^i , mają ciągłe i różniczkowalne ekstrapolacje do funkcji określonych w całym obszarze Ω . Oznaczmy je przez φ . Tak więc:

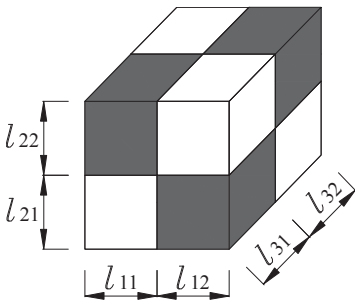
$$\begin{aligned} \varphi_{abc}(x_1, x_2, x_3) \Big|_{(x_1, x_2, x_3) = (x_1^i, x_2^i, x_3^i)} &\equiv \eta_{abc}^i \\ \varphi_{ab}(x_1, x_2) \Big|_{(x_1, x_2) = (x_1^i, x_2^i)} &\equiv \eta_{ab}^i \\ \varphi_a(x_1) \Big|_{x_1 = x_1^i} &\equiv \eta_a^i \end{aligned} \quad (8)$$

Ośrodki opisane relacjami (1) – (8) nazywać będziemy ośrodkami wieloskładnikowymi o funkcyjnej gradacji własności materiałowych.

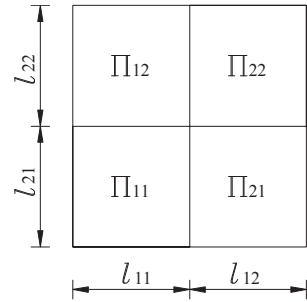
Tak zdefiniowane ośrodki powinny także spełniać dodatkowe warunki narzucone na strukturę niejednorodności w komórce, czyli wzajemne rozmieszczenie składników w komórce [Jikov i in. 1994].

OŚRODKI DWUSKŁADNIKOWE

Jednym z najprostszych przykładów ciał wieloskładnikowych są kompozyty dwuskładnikowe. Rozpatrzmy przypadek ciała, w którym element Δ złożony jest z ośmiu prostopadłościów jednorodnych, po cztery dla obu materiałów, naprzemiennie rozłożonych. Składniki te mają wymiary: $l_{1\alpha}, l_{2\beta}, l_{3\gamma}, \alpha, \beta, \gamma = 1, 2$ (rys. 2). Rozpatrzmy również ciało, w którym element Π złożony jest z czterech części $\Pi_{ab}, a, b = 1, 2$ o wymiarach $l_{1\alpha}, l_{2\beta}, \alpha, \beta = 1, 2$ (rys. 3).



Rys. 2. Schemat pojedynczej komórki – 3D
 Fig. 2. A single cell diagram – 3D



Rys. 3. Schemat pojedynczej komórki – 2D
 Fig. 3. A single cell diagram – 2D

Jeżeli założymy, że elementy Π_{ab} są zbudowane z dwu różnych materiałów, to mamy do czynienia z ośrodkiem dwuskładnikowym typu szachownica (rys. 4a), zbrojonym (rys. 4b) lub laminatem (rys. 4c).



Rys. 4. Przykłady rozkładu materiałów w komórce: a – przewodnik typu szachownica, b – przewodnik zbrojony, c – laminat
 Fig. 4. Examples of material distribution in a cell: a – chess-type conductor, b – reinforced conductor, c – laminate

W przypadku a) i b) mamy do czynienia z niejednorodnością w dwu kierunkach, w przypadku zaś c) – z niejednorodnością w jednym kierunku [Nagórko 2010].

PRZEWODZENIE CIEPŁA W OŚRODKACH WIELOSKŁADNIKOWYCH

Temperaturę zdefiniujemy jako funkcję skalarną miejsca w przewodniku oraz czasu $\theta = \theta(x_1, x_2, x_3, t)$, $(x_1, x_2, x_3) \in \Omega$, $t \in \langle t_0, t_1 \rangle$, co zapiszemy w postaci $\theta: \Omega \times \langle t_0, t_1 \rangle \rightarrow R$.

Model Fouriera przewodnictwa cieplnego opisany jest relacją pomiędzy strumieniem ciepła o składowych $q_k = q_k(x_1, x_2, x_3, t)$ a gradientem temperatury $\theta_{,k}$, $k = 1, 2, 3$ postaci:

$$q_k = -K_{kl}\theta_{,l} \quad (9)$$

gdzie: K_{kl} są składowymi tensora przewodnictwa cieplnego, a $\theta_{,l} \equiv \frac{\partial \theta}{\partial x_l}$. Składowe K_{kl} są w ogólnym przypadku funkcjami: $K_{kl}: \Omega \rightarrow R$, $k, l = 1, 2, 3$.

Kolejną relacją w modelu Fouriera jest równanie bilansu energii postaci:

$$q_{k,k} + c\dot{\theta} = f \quad (10)$$

gdzie $c = c(x_1, x_2, x_3)$, $(x_1, x_2, x_3) \in \Omega$ jest ciepłem właściwym, a $f = f(x_1, x_2, x_3, t)$, $t \in \langle t_0, t_1 \rangle$ – wydajnością źródeł ciepła.

Ciepło właściwe jest wielkością skalarną określoną w obszarze Ω ; ($c: \Omega \rightarrow R$). Wydajność źródła ciepła również jest wielkością skalarną, ale określoną w obszarze Ω oraz w zadanym przedziale czasowym ($f: \Omega \times \langle t_0, t_1 \rangle \rightarrow R$). Podstawiając zależność (9) do (10), otrzymamy równanie przewodnictwa cieplnego w postaci:

$$c\dot{\theta} - (K_{kl}\theta_{,l})_{,k} = f \quad (11)$$

Równanie przewodnictwa ciepła (11) jest równaniem różniczkowym liniowym o zmieniających się skokowo współczynnikach. Dla takiego przypadku można zbudować model prostszy, w którym współczynniki będą ciągłe i wolnozmiennie.

Model prostszy otrzymamy, stosując technikę uśredniania tolerancyjnego [Woźniak i Wierzbicki 2000, Woźniak i in., red. 2008]. Zgodnie z tą techniką zakładamy mikro-makro dekompozycję pola temperatury $\theta(x_1, x_2, x_3, t)$, która w przypadku ośrodka o elementach Δ przyjmie postać:

$$\theta(x_1, x_2, x_3, t) = \mathcal{G}(x_1, x_2, x_3, t) + h^A(x_1, x_2, x_3) \cdot \psi^A(x_1, x_2, x_3, t) \quad (12)$$

gdzie: $A = 1, 2, \dots, M$, a funkcje \mathcal{G} , ψ_A są funkcjami wolnozmiennymi, co zapisujemy $\mathcal{G}, \psi_A \in SV_\varepsilon^1(\Delta)$. Funkcje h^A , występujące w związku (12), są danymi, Δ -periodycznymi, oscylującymi funkcjami kształtu. Funkcjami poszukiwanymi są \mathcal{G} oraz ψ_A . Funkcję \mathcal{G} należy interpretować jako temperaturę uśrednioną, a funkcje ψ_A , nazywane fluktuacjami, uwzględniają wpływ niejednorodności przewodnika na rozkład temperatury.

Zapiszmy teraz równanie (11) w postaci:

$$\left[\frac{\partial P}{\partial(\theta_{,k})} \right]_{,k} - \frac{1}{\tau} \frac{\partial P}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial P}{\partial \theta} = 0 \quad (13)$$

gdzie

$$P = \frac{1}{2} (\tau c \dot{\theta}^2 + K_{kl} \theta_{,k} \theta_{,l}) + f \theta \quad (14)$$

oraz τ są parametrami.

Równania na \mathcal{G} i ψ^A w technice uśredniania tolerancyjnego otrzymuje się w postaci:

$$\left[\frac{\partial \langle P \rangle}{\partial(\mathcal{G}_{,k})} \right]_{,k} - \frac{1}{\tau} \frac{\partial \langle P \rangle}{\partial \dot{\mathcal{G}}} - \frac{\partial \langle P \rangle}{\partial \mathcal{G}} = 0 \quad (15)_1$$

$$\left[\frac{\partial \langle P \rangle}{\partial(\psi^A_{,k})} \right]_{,k} - \frac{1}{\tau} \frac{\partial \langle P \rangle}{\partial \dot{\psi}^A} - \frac{\partial \langle P \rangle}{\partial \psi^A} = 0 \quad (15)_2$$

gdzie $\langle P \rangle$ jest funkcjonalem otrzymanym z funkcjonala (14) przez podstawienie dekompozycji (12) oraz uśrednienie:

$$\langle P \rangle \equiv \frac{1}{|\Delta|} \int_{\Delta} P dx_1 dx_2 dx_3 \quad (16)$$

W przypadku materiałów o strukturze z elementami \square lub Δ postępujemy analogicznie, przyjmując w związku (12) funkcje kształtu zależne odpowiednio od (x_1, x_2) lub x_1 .

LAMINATY DWUSKŁADNIKOWE O FUNKCYJNEJ GRADACJI WŁASNOŚCI

Rozpatrzmy, za Nagórko [2010], przewodnik złożony z dwóch różnych materiałów jednorodnych. Wprowadźmy układ współrzędnych tak, by oś $x_1 = x$ była prostopadła do lamin. Przyjmijmy $L_1 = L$ oraz $\lambda_1 = \lambda$. Materiały rozmieszczone są naprzemiennie. Jeden z nich będzie opisany stałymi K', c', ρ' , a drugi K'', c'', ρ'' .

Oznaczmy środek komórki $L^i, i = 1, 2, \dots, n_1$ jako:

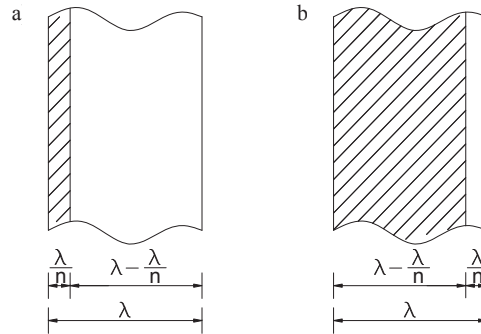
$$x^i = (i-1)\lambda + \frac{\lambda}{2} \quad (17)$$

gdzie $i = 1, 2, \dots, n_1$.

Założmy, że zmienność warstw w poszczególnych komórkach nie będzie dowolna, ale opisana następującymi funkcjami nasycenia:

$$\varphi_1(x^i) = \frac{i}{n}, \quad \varphi_2(x^i) = \frac{n-i}{n} \quad (18)$$

Funkcje (18) są funkcjami dyskretnymi – zostały określone w środkach komórek. Funkcja φ_1 określa, ile jest w komórce materiału pierwszego, a funkcja φ_2 – ile drugiego. I tak w komórce pierwszej materiał pierwszy zajmuje $\frac{1}{n}$, a drugi $\frac{n-1}{n}$ długości komórki, a w ostatniej odwrotnie – pierwszy $\frac{n-1}{n}$, a drugi $\frac{1}{n}$ długości komórki. Przy takim opisie długości poszczególnych lamin wynoszą $l_{11} = \frac{\lambda}{n}$ oraz $l_{12} = \lambda - \frac{\lambda}{n}$ (rys. 5).



Rys. 5. Schemat rozkładu materiałów w komórce: a – pierwszej, b – ostatniej
Fig. 5. Diagram of material's distribution in a cell: a – the first one, b – the last one

Taki rozkład materiałów pozwala na liniową ekstrapolację funkcji (18) do funkcji:

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{n} + \frac{n-2}{n \cdot L} \cdot x, \quad \varphi_2(x) = \frac{n-1}{n} - \frac{n-2}{n \cdot L} \cdot x \quad (19)$$

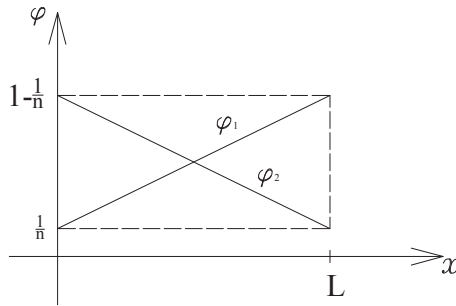
Wykresy tych funkcji przedstawiono na rysunku 6.

Rozpatrzmy i -tą komórkę $\Lambda^i, i = 1, 2, \dots, n_1$, która jest przedziałem ograniczonym punktami $x_{i-1} = (i-1)\lambda$ i $x_i = i\lambda$.

Zgodnie z zasadą mikro-makro dekompozycji (12) temperaturę (θ) przedstawimy w postaci:

$$\theta(x) = \mathcal{G}(x) + h(x)\psi(x) \quad (20)$$

gdzie: $t \geq 0$ i $\mathcal{G}(\cdot) \in SV_{\delta}^1((0, L)) \subset H^1((0, L))$ $\psi(\cdot) \in SV_{\delta}^1((0, L)) \subset H^o((0, L))$.



Rys. 6. Wykresy ekstrapolacji funkcji nasycenia
 Fig. 6. Extrapolation of saturation functions

Dla tak opisanego laminatu zastosujemy lokalnie technikę uśredniania tolerancyjnego. Załóżmy, że komórek jest tyle, iż sąsiednie komórki niewiele się różnią z punktu widzenia nasycenia materiałami – można je uznać za takie same. Możemy więc wyliczyć dla nich wartości uśrednione ciepła właściwego (c) i współczynnika przewodności cieplnej (K).

Ciepło właściwe i współczynnik przewodności cieplnej w i -tej komórce opisują funkcje:

$$c(x) = \begin{cases} c' & x \in (x_{i-1}, x_{i-1} + \frac{i}{n} \lambda) \\ c'' & x \in (x_{i-1} + \frac{i}{n} \lambda, x_i - \frac{n-i}{n} \lambda) \end{cases} \tag{21}$$

$$K(x) = \begin{cases} K' & x \in (x_{i-1}, x_{i-1} + \frac{i}{n} \lambda) \\ K'' & x \in (x_{i-1} + \frac{i}{n} \lambda, x_i - \frac{n-i}{n} \lambda) \end{cases}$$

gdzie $x \in L^i$.

Powyższe funkcje po uśrednieniu przyjmą postać:

$$\begin{aligned} \langle c \rangle(x) &= c' \varphi_1(x) + c'' \varphi_2(x) \\ \langle K \rangle(x) &= K' \varphi_1(x) + K'' \varphi_2(x) \end{aligned} \tag{22}$$

Przyjmijmy funkcję kształtu (lokalnie dla komórki L^i) w postaci funkcji przedziałami liniowej, z tym że te przedziały określoności będą się zmieniać zgodnie z przyjętymi funkcjami nasycenia (19).

I tak dla $x \in \Lambda^i$, $i = 1, 2, \dots, n_1$ przyjmujemy:

$$h(x) = \begin{cases} \frac{\lambda}{\frac{i}{n}\lambda - \lambda} x + \frac{\lambda^2}{2(\frac{i}{n}\lambda - \lambda)} & \text{dla } x \in \langle -\frac{\lambda}{2}, -\frac{1}{2}\frac{i}{n}\lambda \rangle \\ \frac{\lambda}{\frac{i}{n}\lambda} x & \text{dla } x \in \langle -\frac{1}{2}\frac{i}{n}\lambda, \frac{1}{2}\frac{i}{n}\lambda \rangle \\ \frac{\lambda}{\frac{i}{n}\lambda - \lambda} x - \frac{\lambda^2}{2(\frac{i}{n}\lambda - \lambda)} & \text{dla } x \in \langle \frac{1}{2}\frac{i}{n}\lambda, \frac{\lambda}{2} \rangle \end{cases} \quad (23)$$

Wykorzystując zapis (23), otrzymano:

$$\langle K \partial h \rangle(x) = K' - K'', \quad \langle K(\partial h)^2 \rangle(x) = \frac{K'\varphi_2(x) + K''\varphi_1(x)}{\varphi_1(x)\varphi_2(x)}$$

Podstawiając zależność (20) oraz wyliczone wielkości do uśrednionego funkcjonału (14), równanie (15)₂ można zapisać w postaci:

$$\psi = -\frac{\varphi_1\varphi_2(K' - K'')}{K'\varphi_2 + K''\varphi_1} \partial \mathcal{G} \quad (24)$$

a równanie (15)₁ po podstawieniu zależności (23) przyjmie postać:

$$\langle c \rangle \dot{\mathcal{G}} + \partial \langle K^{eff} \rangle \partial \mathcal{G} + \langle K \rangle \bar{\nabla}^2 \mathcal{G} = 0 \quad (25)$$

gdzie:

$$K^{eff} = \frac{1}{\frac{\varphi_1}{K'} + \frac{\varphi_2}{K''}} = \frac{K'K''}{K''\varphi_1 + K'\varphi_2} \quad (26)$$

W równaniu (25) wprowadzono oznaczenia $\bar{\nabla}^2 \mathcal{G} = (\partial_2^2 \mathcal{G} + \partial_3^2 \mathcal{G})$ oraz $\partial_2 \equiv \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x_2}$, $\partial_3 \equiv \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x_3}$.

Wielkość (26) nazywamy współczynnikiem efektywnym przewodnictwa cieplnego. Wyępujące w równaniu (26) uśrednione współczynniki nie są stałe, lecz wolnozmiennie.

PRZYKŁAD ROZWIĄZANIA ZAMKNIĘTEGO

Jako przykład rozpatrzmy jednowymiarowe, stacjonarne zagadnienie przewodzenia ciepła, bez źródeł ciepła. Załóżmy, że brzeg przewodnika $x = 0$ jest poddany tempera-

turze 0° , a temperatura otoczenia wynosi 18° . Przewodnikiem będzie laminat opisany w punkcie 4. Równanie przewodzenia ciepła dla tak sformułowanego problemu ma postać:

$$\partial(\langle K^{eff} \rangle \partial \vartheta) = 0 \tag{27}$$

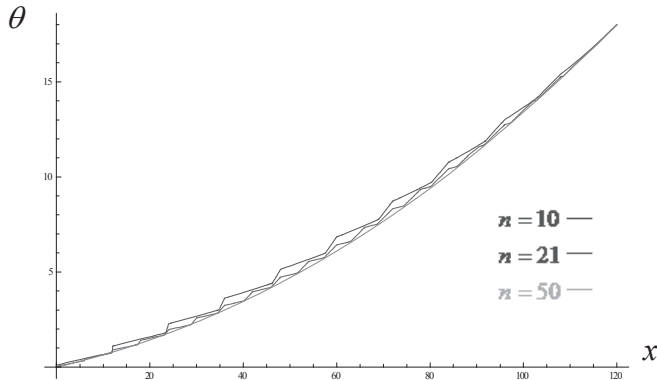
z warunkiem $\vartheta(0) = 0^\circ$.

Poszukiwaną funkcję temperatury uśrednionej otrzymamy poprzez dwukrotne całkowanie równania (27):

$$\vartheta = \frac{C_1}{K'K''} \left[K'x + \frac{K'' - K'}{n}x + \frac{(K'' - K')(n-2)}{2nL}x^2 \right] + C_2 \tag{28}$$

Stałe C_1 i C_2 wyznaczamy z warunków brzegowych $\vartheta(0) = 0^\circ$ i $\vartheta(L) = 18^\circ$, stąd $C_2 = 0$ i $C_1 = \frac{18K'K''}{K'L + \frac{K'' - K'}{n}L + \frac{(K'' - K')(n-2)}{2n}L}$.

W celu zilustrowania tego rozwiązania numerycznie założono, że długość przewodnika wynosi $L = 120$ cm, a komórki składają się z warstw styropianu ($K' = 0,042 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$) oraz betonu komórkowego ($K'' = 0,210 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$).



Rys. 7. Rozkład makrotemperatury w przewodniku dla różnej liczby komórek
 Fig. 7. Distribution of macrotemperature in the conductor for a different number of cells

Na rysunku 7 przedstawiono rozkład temperatury (θ) w przewodniku dla $n = 10$, $n = 21$, $n = 50$, gdzie jest liczbą komórek w przewodniku.

W przypadku gdy laminat jest periodyczny, równanie (27) ma postać:

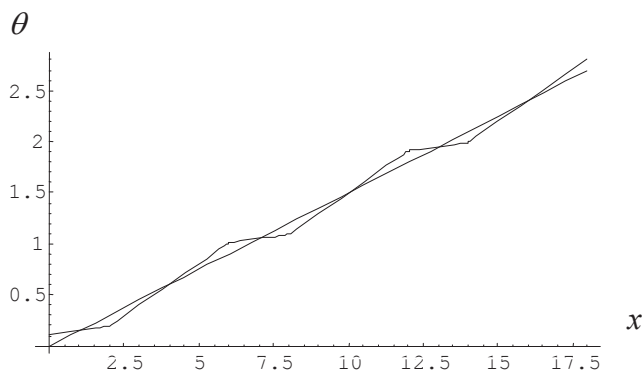
$$\partial^2 \vartheta = 0 \tag{29}$$

którego rozwiązaniem jest funkcja liniowa:

$$\vartheta = C_1 x + C_2 \quad (30)$$

gdzie: $C_1 = \frac{3^\circ}{20 \text{ cm}}$, $C_2 = 0$.

Na rysunku 8 przedstawiono rozkład temperatury (θ) w przewodniku periodycznym o długości 120 cm, złożonym z 20 komórek, dla $x_1 \in \langle 0, 18 \rangle$.



Rys. 8. Rozkład makrotemperatury w przewodniku periodycznym
Fig. 8. Distribution of macrotemperature in the periodic conductor

Wykres makrotemperatury dla laminatu dwuskładnikowego o zmieniających się funkcynie własnościach termicznych (rys. 7) nie jest liniowy i zależy od parametru. Występuje więc tutaj efekt skali. W przypadku ośrodka periodycznego temperatura uśredniona jest liniowa, a makrotemperatura zależy od struktury niejednorodności przewodnika (rys. 8).

PODSUMOWANIE

W klasycznym modelu przewodzenia ciepła opisanym równaniem Fouriera na małych przedziałach określoności funkcji dla rozważanych przewodników występują współczynniki nieciągłe, skokowo zmienne. Przedstawiony model, opisany równaniem na uśrednioną temperaturę, ma współczynniki ciągłe i wolnozmiennie. Po wyznaczeniu temperatury uśrednionej łatwo znajduje się (przez dwukrotne różniczkowanie) funkcje opisujące wpływ struktury niejednorodnej na temperaturę całkowitą. Skonstruowany model wydaje się być wygodnym narzędziem do badania przewodnictwa ciepła w materiałach wieloskładnikowych.

PIŚMIENNICTWO

- Jikov V.V., Kozlov C.M., Oleinik O.A., 1994. Homogenization of differential operators and integral functionals. Springer Verlag, Berlin – Heidelberg.
- Nagórko W., 2010. Przewodnictwo cieplne w ośrodku o funkcyjnej gradacji własności termicznych. XLIX Sympozjum „Modelowanie w mechanice”, Wiśła.
- Woźniak C., Wierzbicki E., 2000. Averaging techniques in thermomechanics of composite solids. Tolerance averaging versus homogenization. Wydawnictwo Politechniki Częstochowskiej, Częstochowa.
- Woźniak C., Michałak B., Jędrzyński J. (red.), 2008. Thermomechanics of microheterogeneous solids and structures. Tolerance averaging approach. Politechnika Łódzka, Łódź.

MODELLING OF HEAT CONDUCTION IN MULTICOMPONENT SOLIDS WITH FUNCTIONALLY GRADED THERMAL PROPERTIES

Abstract. The subject of the paper are composite conductors which consist of homogeneous components. The distribution of the components in the conductor can be described with the use of slowly varying functions. The work consists in forming a model of heat conduction in which the Fourier equation with discontinuous highly oscillating coefficients was substituted with an equation with continuous and slowly varying coefficients. The influence of the conductor on the temperature is described with additional functions which determined knowing the averaging temperature from the closed form formulas. In the special case of a periodic conductors the equation of heat conduction contains constant coefficients. The paper presents simple examples of numerical solutions.

Key words: Fourier's law, functionally graded materials, tolerance averaging

Zaakceptowano do druku – Accepted for print: 22.07.2013