

ZAGADNIENIE WESTERGAARDA – WERYFIKACJA I MODELOWANIE METODĄ ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

Wojciech Gilewski, Roman Nagórski, Marta Sitek

Politechnika Warszawska w Warszawie

Streszczenie. W pracy podano weryfikację wzorów analitycznych [Westergaard 1926, 1933, 1948, Ioannides 1985, 1992], tzw. zagadnienia Westergaarda (płyta o średniej grubości, spoczywająca na sprężystym podłożu, poddana obciążeniu koła pojazdu), za pomocą metody elementów skończonych [Zienkiewicz i Taylor 2000]. Rozważano następujące aspekty zagadnienia: założenia i zdefiniowanie problemu, kalibrację modelu numerycznego, porównanie modelu MES i wzorów analitycznych oraz propozycję poprawnych rozwiązań do projektowania nawierzchni betonowych.

Słowa kluczowe: płyta, sprężyste podłoże, zagadnienie Westergaarda

WSTĘP

Badania dotyczące określenia stanu przemieszczeń i naprężeń w płytach betonowych posadowionych na sprężystym podłożu datuje się na początek lat dwudziestych XX wieku. Badania te były związane z projektowaniem i budową nawierzchni lotnisk wojskowych w USA. Najistotniejsze wyniki przedstawione zostały w cyklu prac H.M. Westergaarda, zapoczątkowanych artykułem napisanym w języku duńskim z 1923 roku, opublikowanym po angielsku w 1926 roku. Wyniki Westergaarda były weryfikowane na poligonach w USA. Modyfikowane wzory analityczne opisywane były m.in. w jego pracach z 1933 i 1948 roku [Szydło 2004]). W późniejszych latach wzory otrzymane przez Westergaarda były modyfikowane m.in. przez Ioannidesa i innych [1985], Ioannidesa i Korovesisa [1992] oraz Fwa i innych [1996]. Wybrane wzory podaje Szydło [2004]. W późniejszych latach pojawiły się prace, w których wykorzystywano metodę różnic skończonych [Ioannides 1988] oraz metodę elementów skończonych [Huang 1974, Advanced pavement... 1997]. Brakuje jednak w literaturze opracowania, w którym można by znaleźć kompleksowe porównanie rozwiązań analitycznych i numerycznych.

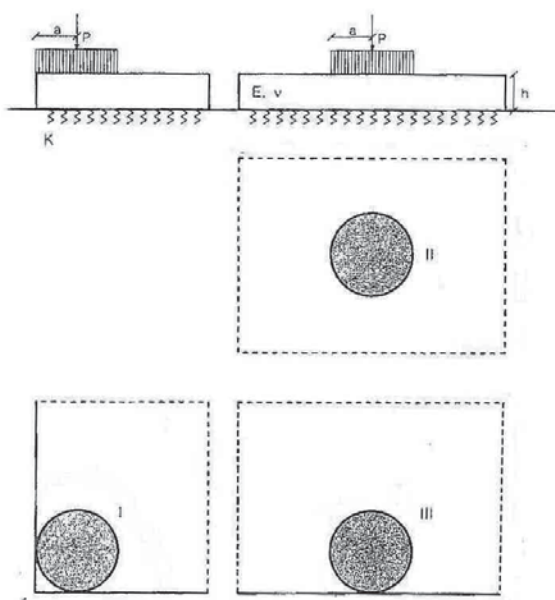
Adres do korespondencji – Corresponding author: Wojciech Gilewski, Politechnika Warszawska, Wydział Inżynierii Lądowej, al. Armii Ludowej 16, 00-637 Warszawa, e-mail: w.gilewski@il.pw.edu.pl

METODYKA ROZWIĄZANIA ZAGADNIENIA

Przez zagadnienie Westergaarda rozumiemy problem wyznaczenia ugięć i naprężeń w płycie sprężystej spoczywającej na sprężystym podłożu Winklera w następujących trzech przypadkach (przedstawionych schematycznie na rys. 1):

- I – płyty w kształcie ćwiartki płaszczyzny obciążonej w narożu,
- II – płyty nieograniczonej we wszystkich kierunkach obciążonej w ustalonym miejscu,
- III – płyty w kształcie półpłaszczyzny obciążonej przy krawędzi.

Obciążenie jest rozłożone równomiernie na powierzchni kołowej. Krawędzie brzo-
we są swobodne.



Rys. 1. Schematy zagadnienia Westergaarda (na podstawie Szydło 2004)

Fig. 1. Schemes of Westergaard problem (based on Szydło 2004)

Rozwiązanie tego zagadnienia jest wykorzystywane przy projektowaniu (wymiarowaniu) konstrukcji sztywnej (betonowej) nawierzchni drogowej lub lotniskowej [Szydło 2004]. Przyjęte obciążenie modeluje oddziaływanie na nawierzchnię standardowego (miarodajnego) koła pojazdu.

Rozwiązanie analityczne wyżej sformułowanego zagadnienia pochodzi właśnie od Westergaarda [1926, 1933, 1948], ale było także otrzymane (przy zastosowaniu różnych założeń upraszczających i metod rozwiązania) przez innych autorów. Przyjęcie kołowego kształtu powierzchni obciążenia oraz jego równomierny rozkład na tej powierzchni jest dość powszechne i w dużym stopniu wynika z uwarunkowań zastosowanych metod ana-

litycznych rozwiązania problemu deformacji nawierzchni obciążonej kołem pojazdu (nie tylko w zagadnieniu Westergaarda).

W niniejszej pracy przedstawiono rozwiązanie zagadnienia H.M. Westergaarda przy zastosowaniu metody elementów skończonych (MES) [Zienkiewicz i Taylor 2000]. Cele pracy są następujące:

- skalibrowanie modelu skończenie elementowego zagadnienia, by uzyskiwane wyniki można było uważać za dostatecznie dokładne,
- weryfikacja poprawności rozwiązania Westergaarda (i innych autorów),
- zaproponowanie praktycznie użytecznej korekty rozwiązania Westergaarda.

Przyjęto następujące założenia modelu obliczeniowego zagadnienia:

1. Model matematyczny płyty o średniej grubości (Hencky’ego-Boole’a) na sprężystym podłożu typu Winklera.
2. Płyta sprężysta, jednorodna, izotropowa, o stałej grubości.
3. Analiza w zakresie małych deformacji.

Dotatkowo w modelu MES zaproponowano rozkład obciążenia na powierzchni prostokątnej o bokach długości 24,4 cm i 31,8 cm. Wymiary te odpowiadają powierzchni obciążenia równomiernego, równoważnego oddziaływaniu standardowego koła samochodowego przy normatywnym nacisku na oś równym 100 kN i ciśnieniu na nawierzchnię równym 650 kPa. Inne parametry i dane liczbowe do obliczeń zestawiono w tabeli 1.

Tabela 1. Dane i parametry liczbowe przyjęte w obliczeniach

Table 1. Data and numerical parameters in calculations

Parametr Parameter	Symbol Symbol	Wartość lub zakres Value or range
Grubość płyty Thickness of plate	H	0,20–0,50 m
Rozmiar płyty (długość x szerokość) Size of plate (length x width) realny – real obliczeniowy – computational	$l \times b$	4,0 × 4,0 m (lotniskowa – airport) 6,0 × 3,5–4,0 m (drogowa – road) od 10 × 10 do 19 × 19 m
Moduł Younga (w betonowej nawierzchni drogowej i nawierzchni lotniskowej) Young modulus (in concrete road surface and airport surface)	E	30 GPa
Współczynnik Poissona Poisson ratio	ν	0,167
Gęstość masy Mass density	ρ	2500 kg·m ⁻³
Współczynnik sprężystości podłoża Coefficient of elastic foundation	k	10, 30, 60, 100 MN·m ⁻³

Dane materiałowe płyty odpowiadają stosunkowo sztywnej płycie betonowej. Współczynnik sprężystego podłoża przyjęto w zakresie odpowiadającym normowym podłożom – od miękkiego do sztywnego, zgodnie z podanymi w opracowaniu Szydło [2004].

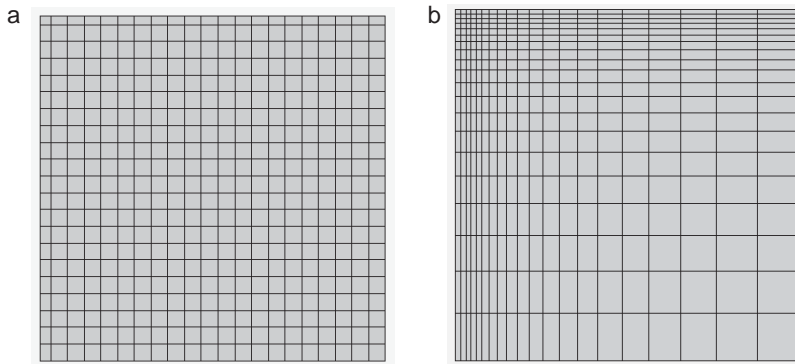
KALIBRACJA MODELU MES

Obliczenia metodą elementów skończonych wykonano w programie Abaqus/Standard (A/S) [ABAQUS 2010].

Obliczenia wstępne. Analiza zbieżności. Wybór elementu skończonego

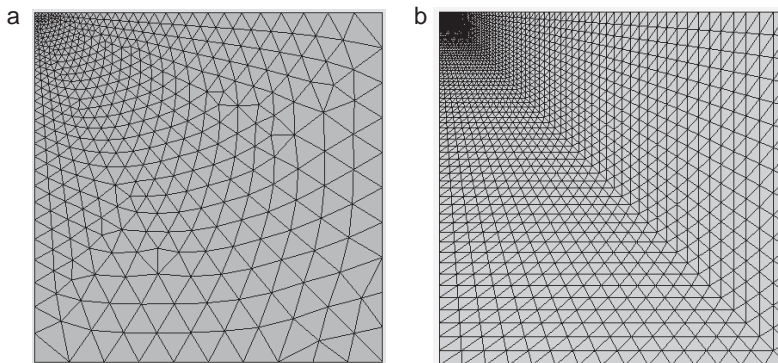
Obliczenia wstępne MES wykonano za pomocą czterech elementów skończonych: S4R, S4R5, S4 i S3. W systemie ABAQUS są to elementy skończone powłokowe o zastosowaniu ogólnym. Szczegółowe informacje na temat tych elementów znaleźć można w ABAQUS [2010]. W niniejszej pracy były one wykorzystywane w stanie płytowym.

Zbieżność rozwiązania MES badano przy różnych siatkach podziału na elementy skończone płyty o wymiarach 10×10 m. Stosowano siatki regularne i nieregularne, o stosunku wymiarów największych do wymiarów najmniejszych elementów skończonych, jak $10 : 1$. Punktem odniesienia do doboru wymiarów siatki był obszar przyłożenia obciążenia. Przykładowe siatki podziału przedstawiono na rysunkach 2 i 3.



Rys. 2. Siatka prostokątna: a – regularna, b – nieregularna (proporcje $10 : 1$)

Fig. 2. Regular (a) and irregular (b) rectangular FE mesh



Rys. 3. Siatka trójkątna: a – pierwszego typu, b – drugiego typu

Fig. 3. Triangular FE mesh: a – of 1st type, b – of 2nd type

Przy wymiarach płyty 10×10 m zadowalającą zbieżność uzyskano przy siatce podziału 80×80 elementów skończonych. Przy takiej siatce nie zaobserwowano też istotnych różnic w wynikach uzyskanych za pomocą różnych elementów skończonych.

Na podstawie wykonanych analiz numerycznych zdecydowano wybrać do dalszych obliczeń element skończony S4R, jako najbardziej ekonomiczny. Jako najbardziej właściwą i wiarygodną siatkę podziału przy wymiarach 10×10 m uznano siatkę nierównomierną 80×80 elementów. Przy większych wymiarach analizowanych płyt należy stosować siatki proporcjonalnie zagęszczone.

Dobór wymiarów płyty w celu uzyskania braku wrażliwości wyników na warunki brzegowe

Rozważane w zagadnieniu Westergaarda płyty spoczywają swobodnie na sprężystym podłożu i są nieograniczone. Natomiast do modelowania elementami skończonymi należy przyjąć obszar płyty o skończonych wymiarach. Aby uwiarygodnić otrzymany wyniki, sprawdzono, przy jakich wymiarach płyty wyniki są nieczułe na warunki brzegowe na krawędziach odległych od obciążenia. Na nieobciążonych krawędziach płyt uwzględniano: warunki brzegu swobodnego, utwierdzenie, swobodne podparcie, przegubowe podparcie i warunek symetrii. Obliczenia wykonano dla dwóch skrajnych sztywności sprężystego podłoża: $k = 10 \cdot 10^6 \text{ N}\cdot\text{m}^{-3}$ oraz $k = 100 \cdot 10^6 \text{ N}\cdot\text{m}^{-3}$.

Uzyskane wyniki wskazują na nieczułość rozwiązania na warunki brzegowe w rozważanym zakresie parametrów sprężystego podłoża, przy następujących wymiarach:

- dla obciążenia w narożu 10×10 m,
- dla obciążenia w środku boku 19×19 m,
- dla obciążenia w środku płyty 17×17 m.

Zaproponowane wymiary dotyczą płyty posadowionej na najbardziej podatnym podłożu. Przy podłożach mniej podatnych wymiary te mogłyby być mniejsze, lecz w dalszych obliczeniach przyjmowano najbardziej „bezpieczne” wymiary.

NUMERYCZNY MODEL ZAGADNIENIA WESTERGAARDA

Porównanie wyników obliczeń metodą elementów skończonych z wynikami analitycznymi podawanymi przez kilku autorów wskazuje, że najpełniejsze i w zasadzie poprawne są modele zaproponowane przez H.M. Westergaarda i Ioannidesa.

Porównanie wyników obliczeń MES z wynikami Westergaarda [1926, 1933, 1948] i Ioannidesa [1985, 1988, 1992]

W tabelach 2, 3 i 4 zestawiono dla porównania i weryfikacji wyniki obliczeń MES i rozwiązań analitycznych (przez „Westergaard”, „Westergaard 1”, „Westergaard 2”, „Ioannides” oznaczono umownie wyniki otrzymane przy użyciu wzorów analitycznych podanych przez tych autorów). Przy założeniu, że rozwiązania numeryczne są dokładne w ramach przyjętej teorii, podano błędy procentowe rozwiązań analitycznych.

Tabela 2. Obciążenie w narożu

Table 2. Corner load

Wyszczególnienie Specification	$k \cdot 10^6 \text{ N}\cdot\text{m}^{-3}$	Westergaard	Ioannides	MES FEM
$W_{\max} \cdot 10^3 \text{ M}$	10	3,268 (-13,11%)	3,644 (-3,11%)	3,761
	30	1,783 (-14,48%)	2,003 (-3,93%)	2,085
	100	0,894 (-16,68%)	1,016 (-5,31%)	1,073
$\sigma_{rr \max} \cdot 10^{-6} \text{ N}\cdot\text{m}^{-2}$	10	2,389 (-9,33%)	2,443 (-7,29%)	2,635
	30	2,145 (-10,81%)	2,158 (-10,27%)	2,405
	100	1,827 (-13,16%)	1,722 (-15,78%)	2,104

Tabela 3. Obciążenie na krawędzi

Table 3. Midside load

Wyszczególnienie Specification	$k \cdot 10^6 \text{ N}\cdot\text{m}^{-3}$	Westergaard 1	Westergaard 2	MES FEM
$W_{\max} \cdot 10^3 \text{ M}$	10	1,518 (+7,13%)	1,350 (-4,73%)	1,417
	30	0,877 (+9,63%)	0,750 (-6,25%)	0,800
	100	0,480 (+14,01%)	0,387 (-8,08%)	0,421
$\sigma_{rr \max} \cdot 10^{-6} \text{ N}\cdot\text{m}^{-2}$	10	2,891 (-15,37%)	3,625 (+6,12%)	3,416
	30	2,547 (-14,10%)	3,170 (+6,91%)	2,965
	100	2,170 (-3,55%)	2,682 (+19,20%)	2,250

Tabela 4. Obciążenie w środku

Table 4. Central load

Wyszczególnienie Specification	$k \cdot 10^6 \text{ N}\cdot\text{m}^{-3}$	Westergaard 1	Westergaard 2	MES FEM
$W_{\max} \cdot 10^3 \text{ M}$	10	4,317 (-1,84%)	–	4,398
	30	2,479 (-2,86%)	–	2,552
	100	1,344 (-4,55%)	–	1,408
$\sigma_{rr \max} \cdot 10^{-6} \text{ N}\cdot\text{m}^{-2}$	10	1,902 (+2,70%)	1,718 (-7,24%)	1,852
	30	1,710 (+3,01%)	1,526 (-8,38%)	1,660
	100	1,500 (+3,45%)	1,317 (-9,17%)	1,450

Wyniki obliczeń analitycznych przemieszczeń są najbliższe wynikom MES przy obciążeniu w środku, najdalsze zaś przy obciążeniu w narożu. Różnice w wynikach obliczeń naprężeń są porównywalne, lecz najbardziej regularne i zbliżone do wyników MES przy obciążeniu w środku.

Numeryczne rozwiązanie zagadnienia Westergaarda

W tabelach 5, 6 i 7 zestawiono wyniki obliczeń MES, które stanowią użyteczną praktycznie korektę rozwiązań analitycznych podawanych w literaturze.

Tabela 5. Obciążenie w narożu
Table 5. Corner load

Wyszczególnienie Specification	$k \cdot 10^6 \text{ N}\cdot\text{m}^{-3}$	$h = 0,2 \text{ m}$	$h = 0,3 \text{ m}$	$h = 0,4 \text{ m}$	$h = 0,5 \text{ m}$
$W_{\max} \cdot 10^3 \text{ M}$	10	3,761	2,141	1,428	1,047
	30	2,085	1,204	0,810	0,593
	60	1,426	0,834	0,564	0,415
	100	1,073	0,634	0,432	0,319
$\sigma_{rr \max} \cdot 10^{-6} \text{ N}\cdot\text{m}^{-2}$	10	2,635	1,313	0,799	0,542
	30	2,405	1,230	0,758	0,519
	60	2,234	1,167	0,727	0,500
	100	2,104	1,116	0,701	0,485

Tabela 6. Obciążenie na krawędzi
Table 6. Midside load

Wyszczególnienie Specification	$k \cdot 10^6 \text{ N}\cdot\text{m}^{-3}$	$h = 0,2 \text{ m}$	$h = 0,3 \text{ m}$	$h = 0,4 \text{ m}$	$h = 0,5 \text{ m}$
$W_{\max} \cdot 10^3 \text{ M}$	10	1,417	0,795	0,529	0,388
	30	0,801	0,454	0,302	0,221
	60	0,557	0,319	0,213	0,156
	100	0,425	0,245	0,165	0,121
$\sigma_{rr \max} \cdot 10^{-6} \text{ N}\cdot\text{m}^{-2}$	10	3,416	1,661	0,989	0,657
	30	2,965	1,460	0,876	0,584
	60	2,647	1,333	0,805	0,539
	100	2,482	1,241	0,752	0,505

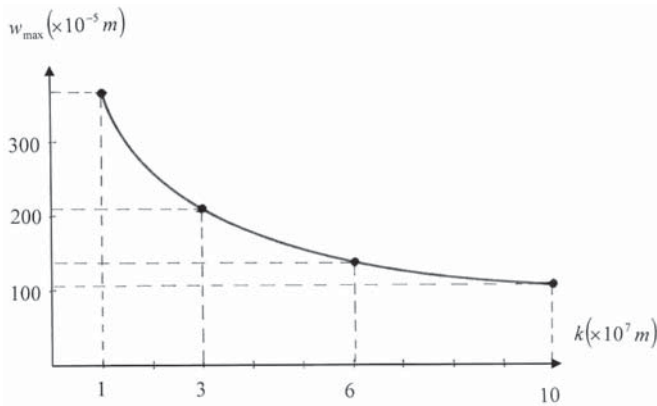
Tablica 7. Obciążenie w środku
Table 7. Central load

Wyszczególnienie Specification	$k \cdot 10^6 \text{ N}\cdot\text{m}^{-3}$	$h = 0,2 \text{ m}$	$h = 0,3 \text{ m}$	$h = 0,4 \text{ m}$	$h = 0,5 \text{ m}$
$W_{\max} \cdot 10^3 \text{ M}$	10	0,440	0,243	0,161	0,118
	30	0,255	0,141	0,093	0,068
	60	0,181	0,101	0,067	0,049
	100	0,141	0,079	0,052	0,038
$\sigma_{rr \max} \cdot 10^{-6} \text{ N}\cdot\text{m}^{-2}$	10	1,852	0,907	0,548	0,370
	30	1,660	0,822	0,500	0,338
	60	1,519	0,768	0,469	0,319
	100	1,450	0,728	0,447	0,304

ZJAWISKO WYPIĘTRZENIA PŁYTY

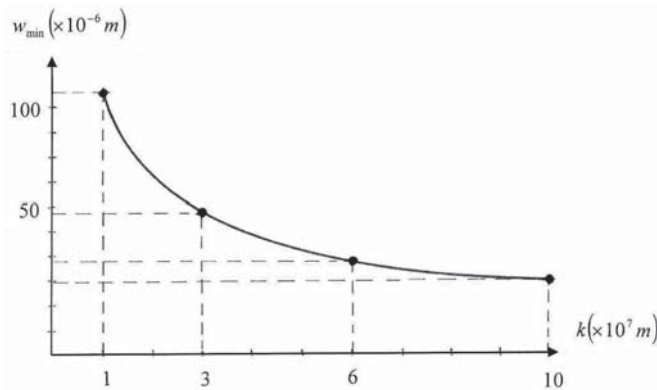
W obliczeniach MES zaobserwowano zjawisko „względnego wypiętrzania” płyty przez sprężyste podłoże, tj. przemieszczenia o zwrocie przeciwnym do zwrotu obciążenia je wywołującego – zjawisko nieopisywane przez Westergaarda. Skala tego wypiętrzania nie jest duża – przemieszczenia skierowane do góry są co najmniej o rząd wielkości

mniejsze od przemieszczeń do dołu (rys. 4 i 5) i w praktycznych przypadkach są niwelowane przez osiadanie sprężyste podłoża spowodowane ciężarem własnym płyty. Wraz ze zmianą sztywności podłoża w stosunku do sztywności płyty można zaobserwować zmiany położenia i rozmiaru obszarów względnych ujemnych ugięć, przy zachowaniu kształtu zbliżonego odpowiednio do elipsy, „fasoli” i okręgu (w zależności od schematu zagadnienia). Największe obszary względnego wypiętrzenia obserwujemy przy podłożu podatnym. Wraz ze wzrostem sztywności podłoża obszary wypiętrzenia płyt maleją i przesuwają się w kierunku obciążenia.



Rys. 4. Zależność maksymalnych ugięć (w kierunku zgodnym z obciążeniem) od sztywności podłoża – obciążenie płyty w narożu

Fig. 4. Relation between maximal deflection (in the direction of load) on the foundation rigidity – corner load

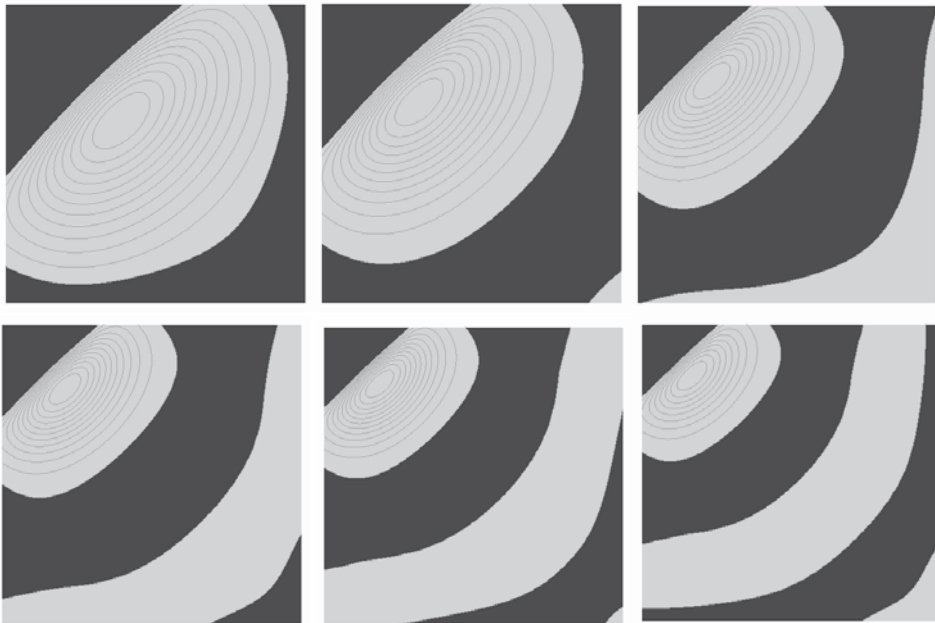


Rys. 5. Zależność minimalnych ugięć (w kierunku przeciwnym do obciążenia) od sztywności podłoża – obciążenie płyty w narożu

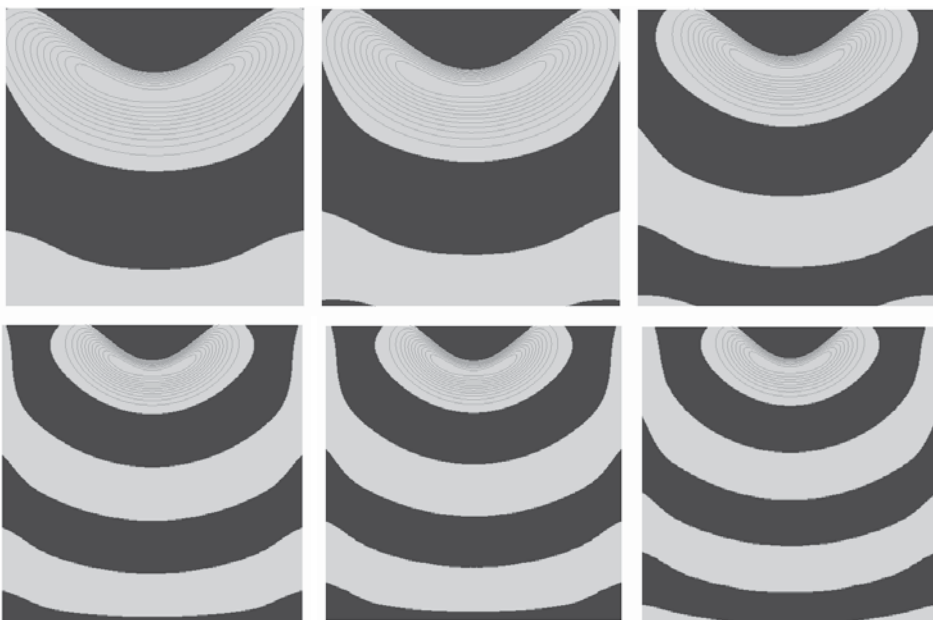
Fig. 5. Relation between minimal deflection (in the direction opposite to load) on the foundation rigidity – corner load

Na rysunkach 6–8 przedstawiono szczegółowe plany warstwiczne rozkładu wypiętrzeń płyt przy różnych parametrach podłoża. Kolorem czarnym oznaczone są przemieszczenia dodatnie (ugięcia do dołu – zgodnie z kierunkiem działania obciążenia). Warto zwrócić uwagę na „falowanie” powierzchni ugięcia w miarę oddalania się od miejsca działania obciążenia, szczególnie wyraźne zwłaszcza przy sztywnych podłożach. Zakres parametrów w analizie rozszerzono, w porównaniu ze standardowymi parametrami (por. [Szydło 2004], o podłożu bardzo podatne ($k = 5 \cdot 10^6$) i bardzo sztywne ($k = 150 \cdot 10^6$).

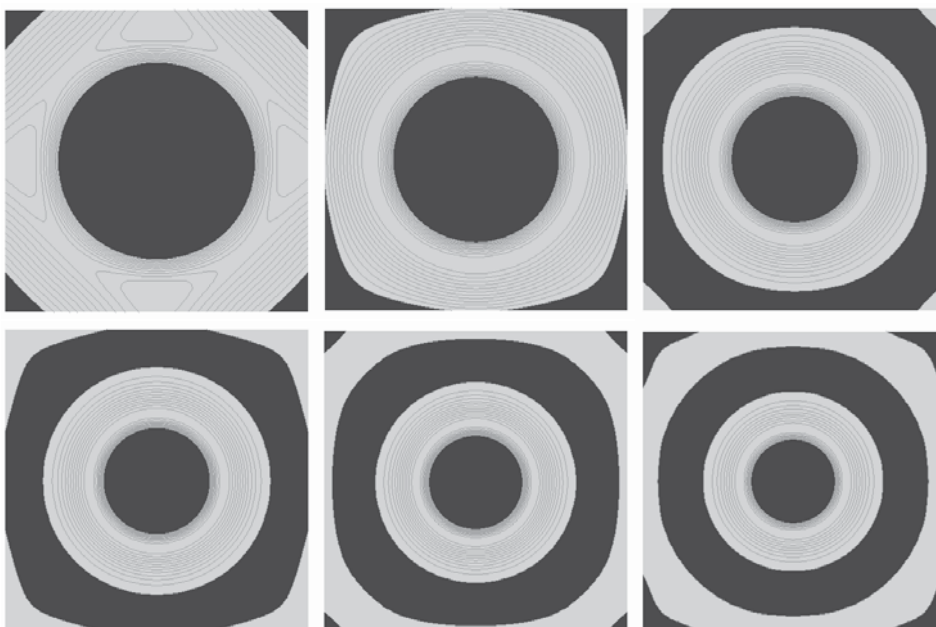
Model Winklera sprężystego podłoża jest modelem dwustronnym – w przypadku odrywania płyty od podłoża należy wziąć pod uwagę model jednostronny. Autorzy przeanalizowali takie modele. Wyniki otrzymane w modelu podłoża jednostronnego wskazują na niewielki wzrost przemieszczeń w części wypiętrzenia w porównaniu z modelem podłoża dwustronnego, przy niemal identycznych wynikach dominujących przemieszczeń w kierunku zgodnym z działaniem obciążenia. Należy sądzić, iż jest tak dlatego, że przemieszczenia w części wypiętrzenia są co najmniej o rząd wielkości mniejsze od przemieszczeń dominujących. Przeprowadzona analiza wskazuje, że można z powodzeniem stosować model dwustronny, bez większego wpływu na wyniki obliczeń wykorzystywane do projektowania.



Rys. 6. Obciążenie w narożu – $k = 5 \cdot 10^6, 10 \cdot 10^6, 30 \cdot 10^6, 60 \cdot 10^6, 100 \cdot 10^6$ i $150 \cdot 10^6$
 Fig. 6. Corner load – $k = 5 \cdot 10^6, 10 \cdot 10^6, 30 \cdot 10^6, 60 \cdot 10^6, 100 \cdot 10^6$ and $150 \cdot 10^6$



Rys. 7. Obciążenie na krawędzi – $k = 5 \cdot 10^6, 10 \cdot 10^6, 30 \cdot 10^6, 60 \cdot 10^6, 100 \cdot 10^6$ i $150 \cdot 10^6$
 Fig. 7. Midside load – $k = 5 \cdot 10^6, 10 \cdot 10^6, 30 \cdot 10^6, 60 \cdot 10^6, 100 \cdot 10^6$ and $150 \cdot 10^6$



Rys. 8. Obciążenie w środku – $k = 5 \cdot 10^6, 10 \cdot 10^6, 30 \cdot 10^6, 60 \cdot 10^6, 100 \cdot 10^6$ i $150 \cdot 10^6$
 Fig. 8. Central load – $k = 5 \cdot 10^6, 10 \cdot 10^6, 30 \cdot 10^6, 60 \cdot 10^6, 100 \cdot 10^6$ and $150 \cdot 10^6$

PODSUMOWANIE

W pracy potwierdzono użyteczność metody elementów skończonych do rozwiązania zagadnienia Westergaarda, istotnego między innymi przy wymiarowaniu nawierzchni drogowych z betonu cementowego. Dokonano ustalenia optymalnych parametrów MES (rodzaj elementu skończonego, siatka podziału i wymiar obszaru płyty modelowanego elementami skończonymi – kalibracja modelu skończenie elementowego), zapewniających praktycznie wystarczającą dokładność wyników obliczeń. Jednakowe wyniki numeryczne uzyskano przy użyciu czterech różnych elementów skończonych programu ABAQUS – uznano zatem, że rozwiązanie MES jest dokładne w ramach przyjętych założeń. Zweryfikowano klasyczne (analityczne) rozwiązania Westergaarda, a następnie zestawiono tabelarycznie wartości ekstremalnych ugięć i naprężeń dla różnych wariantów obciążenia płyty, jej grubości i sztywności podłoża, pomocne przy wymiarowaniu sztywnych nawierzchni drogowych i specjalnych.

PIŚMIENNICTWO

- ABAQUS – Theory Manual, 2010.
- Advanced pavement design: Finite element modeling for rigid pavement joints. Report I: Background Investigation, 1997. U.S. Department of Transportation, Federal Aviation Administration, Washington.
- Fwa T.F., Shi X.P., Tan S.A., 1996. Analysis of concrete pavements by rectangular thickplate model. *Journal of Transportation Engineering* 122, 2, 146–154.
- Huang Y.H., 1974. Finite element analysis of slabs on elastic solids. *Journal of Transportation Engineering* 100, 2, 124–141.
- Ioannides A.M., 1988. Finite difference solution of plate on elastic solid. *Journal of Transportation Engineering* 114, 1, 57–75.
- Ioannides A.M., Korovesis G.T., 1992. Analysis and design of doweled slab-on-grade pavement systems. *Journal of Transportation Engineering* 118, 6, 745–768.
- Ioannides A.M., Thompson M.R., Barenberg E.J., 1985. Westergaard solution reconsidered, *Transportation Research Record* 1043, Washington, DC.
- Szydło A., 2004. Nawierzchnie drogowe z betonu cementowego. Teoria, Wymiarowanie, Realizacja. Polski Cement, Kraków.
- Westergaard H.M., 1926. Stresses in concrete pavements computed by theoretical analysis. *Public Roads* 7, 2, 25–35.
- Westergaard H.M., 1933. Analytical tools for judging results of structural tests of concrete pavements. *Public Roads* 14, 10, 129–151.
- Westergaard H.M., 1948. New formulas for stresses in concrete pavements of airfields. *Transactions of ASCE* 113, 425–444.
- Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., 2000. *The Finite Element Method. Vol. 1: The Basis*. Butterworth – Heinemann, Oxford.

WESTERGAARD PROBLEM – VERIFICATION AND FINITE ELEMENT MODELING

Abstract. The present paper is dedicated to verification the analytical formulae of so called Westergaard problem (moderately thick plate resting on elastic foundation, subjected to standard load by vehicle wheel) by the finite element method. The following aspects were

considered: assumptions and definition of the problem, calibration of the FEM model, comparison of the FEM and analytical solutions, proposition of the correct solutions useful for practical design of concrete pavements.

Key words: plate, elastic foundation, Westergaard problem

Zaakceptowano do druku – Accepted for print: 20.09.2011