

## **ZASTOSOWANIE ŚCIAGÓW I PRZYPÓR SPOSOBEM NA REDYSTRYBUCJĘ PRZEMIESZCZEŃ I MOMENTÓW ZGINAJĄCYCH W MONOLITYCZNYCH ZBIORNIKACH PROSTOPADŁOŚCIENNYCH**

Wiesław Buczkowski

Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu

**Streszczenie.** W pracy przedstawiono wyniki obliczeń statycznych zbiornika prostopadłościennego uzyskane metodą numeryczną – metodą wariacyjnego ujęcia różnic skończonych. W obliczeniach uwzględniono przestrzenny charakter pracy statycznej oraz współpracę konstrukcji z podłożem sprężystym. W dalszej części pokazano, w jaki sposób można doprowadzić do przegrupowania przemieszczeń ścian oraz momentów zginających w poszczególnych partiach zbiornika. Przedstawiono to na przykładzie zastosowania ściągu spinającego przeciwległe ściany oraz przez zastosowanie przypór podpierających dłuższe ściany w środku ich rozpiętości.

**Słowa kluczowe:** zbiorniki prostopadłościenne, przestrzenna praca statyczna, metoda różnic skończonych

### **WSTĘP**

Zbiorniki prostopadłościenne o konstrukcji żelbetowej są szeroko stosowane w przemyśle, oczyszczalniach ścieków, stacjach uzdatniania wody itp. Ze względu na to, iż od tego typu konstrukcji wymaga się szczelności, wykonuje się je przeważnie jako monolityczne. Zbiorniki prostopadłościenne o monolitycznej konstrukcji charakteryzują się przestrzenną pracą statyczną, co oznacza, że obciążenie jednego fragmentu konstrukcji wywołuje przemieszczenia i siły wewnętrzne w całej konstrukcji, również w obszarach bezpośrednio nieobciążonych. Takie konstrukcje są bardzo wrażliwe na wszelkiego rodzaju uproszczenia obliczeniowe, w związku z czym nie powinno się ich obliczać metodami, które nie uwzględniają ich przestrzennej pracy statycznej [Buczkowski 1992, 1998]. Niestety w praktyce projektowej do rozwiązywania problemów statyki zbiorni-

ków prostopadłościennych nadal często stosowane są metody uproszczone. Jedną z nich polega na traktowaniu zbiornika jako złożonego z pojedynczych płyt dwukierunkowo zginanych. Opis tej metody podają liczni autorzy [Gawroński 1953, Kłós i in. 1961, Dąbrowski i in. 1982, Stachowicz i Ziobroń 1986, Kobiak i Stachurski 1991, Grabiec 1999]. Dla każdej z płyt składowych z odpowiednich tablic podanych w literaturze [Ulickij i in. 1959, Timoshenko i Woinowsky-Krieger 1963, Stiglat/Wippel 1973, Bareś 1979] dla przyjętego schematu statycznego i typu obciążenia określa się momenty zginające.

Obliczone w ten sposób momenty podporowe (krawędziowe) należy następnie wyrównać, na przykład metodą Crossa lub według wskazówek podanych w pracy zbiorowej pod redakcją Mitzela [1966].

Drugą, powszechnie stosowaną metodą, jest metoda Crämera, której szczegółowy opis można znaleźć w licznych pracach, między innymi Crämera [1952], Kłosia i innych [1961], Stachowicza i Ziobronia [1986], Kobiaka i Stachurskiego [1991] oraz Grabca [1999]. W metodzie tej zbiornik rozpatruje się jako przestrzenny układ ramowy. Istota metody polega na takim rozdzieleniu obciążenia działającego na myślowo wycięte ramy, poziomą i pionową, aby ich ugięcia w miejscu wzajemnego przecięcia były identyczne.

Inne metody, które można nazwać obliczaniem według modeli jednowymiarowych, dotyczą zbiorników niskich oraz wysokich. Dla zbiorników niskich i dużych w planie obliczenia przeprowadza się jak dla murów oporowych, natomiast dla zbiorników wysokich wycina się myślowo poziome ramy zamknięte i dla nich wykonuje obliczenia. W obydwu ostatnich metodach należy dodatkowo uwzględnić zaburzenia przy krawędziach – pionowej i poziomej.

Zadną z wymienionych powyżej metod nie uwzględnia przestrzennego charakteru pracy konstrukcji, jak również nie daje możliwości określenia wpływu zmian stosunków grubości poszczególnych ścian i dna na pracę całego ustroju. Wpływ taki, jak wykazali Buczkowski i inni [1981], istnieje. W metodzie Crämera, poza innymi powszechnie znanymi mankamentami, nie można określić momentów zginających w ustroju, na przykład od obciążenia równomiernego działającego na dno. W celu podkreślenia trudności występujących przy obliczaniu zbiorników prostopadłościennych, jako ustrojów przestrzennych, zacytowano fragmenty zaczerpnięte z dwóch najbardziej liczących się w kraju monografii dotyczących tego zagadnienia. W podręczniku Kobiaka i Stachurskiego „Konstrukcje żelbetowe” [1991] czytamy: „Ścisłe analityczne ujęcie pracy zbiorników prostokątnych o monolitycznym połączeniu ścian bocznych z dnem jest zagadnieniem dość trudnym. Stosowane powszechnie metody obliczeń statycznych oparte są na założeniach, które tylko w przybliżeniu odpowiadają rzeczywistym warunkom pracy zbiornika. Zbiorniki prostokątne pracują jako układy przestrzenne, tak więc np. nie można rozpatrywać ścian pionowych czy płyty dennej w oderwaniu od pozostałych części układu, gdyż nie odpowiada to rzeczywistej pracy konstrukcji. Spotykane niekiedy traktowanie układu jako zespołu poziomych ram płaskich, nieuwzględniające wpływu połączenia ścian pionowych, z dnem, również nie obrazuje rzeczywistego przebiegu momentów zginających ani sił podłużnych (w poszczególnych elementach konstrukcji), powstałych od działających na zbiornik obciążeń. Najbardziej właściwe jest analityczne ujmowanie pracy zbiornika prostokątnego wg teorii sprężystości. Punktem wyjścia jest tu ogólne równanie różniczkowe powierzchni środkowej ugięcia płyty (...). Zbiornik jest więc traktowany jako układ płyt, w którym wzajemne ich oddziaływanie czyni zadość warunkom cią-

głości”. Natomiast Dąbrowski, Stachurski i Zieliński w pracy „Konstrukcje betonowe” [1982] piszą: „Niektóre schematy zbiorników zostały obliczone wg tej podanej wyżej zasady i przystosowane do praktycznego użycia. Dla wielu przypadków takich rozwiązań jednak nie ma, a obliczenia tych zbiorników w oparciu o podaną wyżej metodę nie są zbyt skomplikowane dla celów praktycznych. Jest to głównym powodem opracowania wielu metod przybliżonych obliczania zarówno momentów zginających, jak i sił podłużnych występujących w ściankach tych zbiorników”.

Pierwsze próby obliczeniowego ujęcia przestrzennej pracy statycznej dla niektórych schematów zbiorników prostokątnych przeprowadził Mitzel [1952], a otrzymane wyniki przedstawił w postaci wykresów. Również w pracy Bittnera [1965] znaleźć można rozwiązania dla zbiorników prostopadłościennych z uwzględnieniem ich przestrzennego charakteru.

Rozwiązania zaprezentowane w niniejszej pracy powstały w wyniku zastosowania metody różnic skończonych w ujęciu wariacyjnym do rozwiązania równania różniczkowego powierzchni zginanych płyt (ścian i dna zbiornika) z uwzględnieniem warunków ciągłości, a więc w całkowitej zgodności z sugestiami podanymi przez Kobiaka i Stachurskiego [1991]. Takie podejście do zagadnienia było możliwe dzięki rozwojowi metod numerycznych. W ostatnich latach bardzo intensywnie rozwinęła się metoda elementów skończonych (MES). Powstało kilka programów, którymi można również rozwiązać zbiorniki prostopadłościenne. Równoległe z metodą elementów skończonych rozwijana jest stosowana już wcześniej metoda różnic skończonych (MRS). I właśnie tę metodę zastosowano w rozwiązaniach przykładów zamieszczonych w niniejszej pracy.

Metoda różnic skończonych w ujęciu wariacyjnym jest na tyle uniwersalna, że pozwala na uwzględnienie przestrzennego charakteru pracy nawet złożonych ustrojów, nie wyłączając obciążeń temperaturą. Metoda ta była wielokrotnie stosowana w praktyce przy obliczaniu powłok, płyt oraz ustrojów skrzyniowych. Jako przykłady mogą służyć prace Wildego [1966], Mikołajczaka i innych [1976], Czwojdziańskiego i innych [1985], Buczkowskiego i Mikołajczaka [1985], Buczkowskiego i Czwojdziańskiego [1988, 1989]. W powyższych pracach zastosowanie metody różnic skończonych dawało zawsze bardzo dobre wyniki.

## METODA OBLICZENIOWA

Metoda wariacyjnego ujęcia różnic skończonych polega na wyznaczeniu równań różnicowych wychodzących z warunku na minimum energii sprężystej nagromadzonej w rozpatrywanym, odkształcanym ustroju oraz na późniejszym rozwiązaniu tak otrzymanego układu równań.

Energia odkształcenia sprężystego elementów konstrukcji określona jest funkcjonalem [Kączkowski 1968], którego uproszczoną postać pokazano poniżej:

$$V = \frac{D}{2} \iint_A \left\{ (\nabla^2 w)^2 - 2(1-\nu) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] - \right. \quad (1)$$

$$\left. - 2(1+\nu) \frac{\alpha_t \cdot \Delta T}{h} \left( \nabla^2 w + \frac{\alpha_t \cdot \Delta T}{h} \right) \right\} dA - \iint_A q w dA + \frac{1}{2} \iint_A K w^2 dA$$

gdzie:  $w$  – ugięcie płyty,

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \text{ – sztywność płyty na zginanie,}$$

$h$  – grubość płyty,

$q$  – obciążenie prostopadle do powierzchni środkowej płyty,

$\nu$  – liczba Poissona,

$\Delta T = T_w - T_z$  – różnica temperatury między wewnętrzną a zewnętrzną powierzchnią ścian zbiornika,

$E$  – moduł sprężystości materiału ścian zbiorników,

$\alpha_t$  – współczynnik odkształcalności termicznej,

$K$  – współczynnik podatności podłoża sprężystego typu Winklera,

$A$  – obszar płyty.

Przystępując do konkretnych obliczeń, obszary ścian i dna obliczanego ustroju należy podzielić siatką linii na elementarne podobszary. Na krawędziach zbiorników łączących poszczególne ściany przyjęto, że ugięcia są zerowe, a kąty obrotu z lewej i prawej strony krawędzi są identyczne. Całkowane wyrażenia (1), odnoszące się do całego obszaru, zamienia się na sumy po elementarnych podobszarach. Pochodne ugięcia w funkcjonale (1) zastępuje się odpowiednimi ilorazami różnicowymi. Po wykonaniu powyższego energia odkształcenia sprężystego jest zapisana w postaci sumy ugięć w punktach podziału płyty.

Układ liniowych równań algebraicznych na wyznaczenie ugięć w węzłach przyjętej siatki podziału otrzymuje się z warunku na minimum funkcjonału (1):

$$\frac{\partial V}{\partial w_k} = 0 \quad \text{dla każdego } w_k$$

Po rozwiązaniu tak otrzymanego układu równań otrzymuje się ugięcia we wszystkich węzłach siatki podziału, a po podstawieniu ich do wzorów znanych z teorii płyt można w dowolnych punktach siatki wyznaczyć siły wewnętrzne. Zastosowaną metodę obliczeniową opisano tutaj bardzo skrótowo, gdyż szczegółowy jej opis można znaleźć w literaturze technicznej [Wilde 1966, Mikołajczak i in. 1976].

Metoda ta, oprócz uwzględnienia przestrzennej pracy ustroju, rzeczywistych danych geometrycznych i materiałowych oraz współpracy konstrukcji z podłożem winklerowskim, daje także możliwość oszacowania sił wewnętrznych w zbiornikach ze ścianami spiętymi ściągamymi czy podpartych z zewnątrz przyporami. Wprowadzenie do konstrukcji zbiorników ściągow i przypór daje możliwość uzyskania znacznie mniejszych przemieszczeń i momentów zginających, a to z kolei daje możliwość wykonania zbiorników o stosunkowo cienkich ścianach, co zdecydowanie spowoduje zmniejszenie wartości momentów zginających wywołanych różnicą temperatury, gdyż wielkość tych momentów jest wprost proporcjonalna do kwadratu grubości płyty.

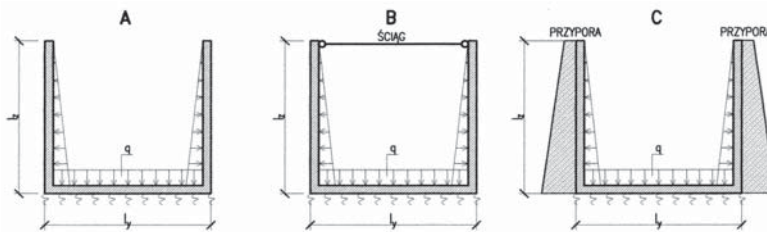
## PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

Obliczenia przykładowe wykonano dla zbiornika prostopadłościennego, stojącego na gruncie. Wymiary osiowe zbiornika wynosiły: długość –  $l_x = 12$  m, szerokość –  $l_y = 6$  m, wysokość –  $l_z = 4,5$  m. Poza tym przyjęto: grubości ścian i dna identyczne – 0,3 m, moduł sprężystości dla betonu klasy C30/37 –  $E = 32$  GPa, współczynnik Poissona dla uproszczenia obliczeń –  $\nu = 0$ , moduł podatności podłoża –  $K = 50\,000$  kN·m<sup>-3</sup> (jak dla piasku szczelnie ubitego). Siatkę podziału poszczególnych ścian założono o oczkach kwadratowych –  $s = 0,75$  m. Przy takim podziale dla ćwiartki zbiornika (uwzględniono dwupłaszczyznową symetrię) otrzymano do rozwiązania układ równań o 104 niewiadomych. Jako obciążenie przyjęto parcie hydrostatyczne działające na ściany i dno o wielkości  $q = 45$  kN·m<sup>-2</sup>.

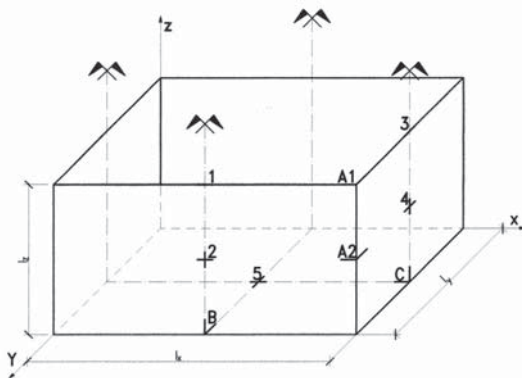
Obliczenia wykonano dla:

- zbiornika bez żadnych wzmocnień (wersja A),
- zbiornika, w którym górne krawędzie dłuższych ścian w środku ich rozpiętości spięto ściągiem (wersja B),
- zbiornika, w którym zastosowano przypory umieszczone po zewnętrznej stronie dłuższych ścian, w środku ich rozpiętości, przy czym przypory te potraktowano jako idealne podpory liniowe (wersja C).

Przekroje poprzeczne zbiorników dla poszczególnych wersji pokazano na rysunku 1. Natomiast na rysunku 2 zaznaczono punkty, dla których w tabeli 1 zestawiono wartości ugięć i momentów zginających.



Rys. 1. Przekroje poprzeczne dla poszczególnych wersji oraz schematy obciążeń  
Fig. 1. Cross sections for individual options and schemes of loadings



Rys. 2. Numeracja punktów, dla których w tabeli 1 zestawiono uzyskane wartości ugięć i momentów zginających

Fig. 2. Numeration of points for which values of deflections and bending moments are given in Table 1

Tabela 1. Zestawienie wartości ugięć i momentów zginających  
 Table 1. Juxtaposition of value of displacement and bending moments

Wyszczególnienie Specification	Zbiornik bez wzmocnień (wersja A) Tank without reinforcements (version A)	Zbiornik ze ściągiem (wersja B) Tank with pulling (version B)	Zbiornik z przyporami (wersja C) Tank with supports (version C)
Ugięcia [mm]			
Displacement	4,804	0	0
$w_1$	2,535	0,765	0
$w_2$	-0,059	0,483	0,534
$w_3$	1,591	0,477	0,506
$w_4$	0,619	0,752	0,828
$w_5$			
Momenty zginające [kN·m <sup>-1</sup> ] Bending moments			
$M_{x1}$	37,453	-51,482	-27,955
$M_{x2}$	13,235	-3,866	-30,285
$M_{z2}$	11,994	29,235	0
$M_{y3}$	8,653	15,078	15,795
$M_{y4}$	9,549	12,7488	13,005
$M_{z4}$	10,368	10,573	10,829
$M_{x5}$	-0,881	0,230	1,178
$M_{y5}$	22,630	19,866	18,202
$M_{A1}$	-57,549	-28,634	-28,390
$M_{A2}$	-42,688	-35,072	-32,614
$M_B$	-89,293	-55,923	-33,626
$M_C$	-36,198	-43,187	-44,326

## PODSUMOWANIE

W pracy pokazano zastosowanie metody różnic skończonych do wykonywania obliczeń statycznych monolitycznych zbiorników prostopadłościennych. Metoda pozwala na uwzględnienie przestrzennej pracy statycznej ustroju, rzeczywistych wymiarów zbiornika, danych materiałowych uzależnionych od klasy betonu, współpracy konstrukcji z podłożem sprężystym, rzeczywistych obciążeń działających na ściany i dno zbiornika, w tym także obciążeń temperaturą. Pokazano również, że w prosty sposób można uwzględnić zastosowanie w konstrukcji ściągow czy przypór i oszacować ich wpływ na rozkład i wielkość sił przekrojowych. Odpowiednio rozmieszczając na przykład ściągi, można doprowadzić do zmniejszenia ugięć i momentów zginających oraz odpowiedniego ich przegrupowania.

## PIŚMIENNICTWO

- Bareš R., 1979. Berechnungstafeln für Platten und Wandscheiben. Bauverlag, Wiesbaden – Berlin.  
 Bittner E., 1965. Platten und Behälter. Springer-Verlag, Wien – New York.  
 Buczkowski W., 1992. Potencjalne źródła błędów w projektowaniu zbiorników prostopadłościennych. Mat. konf. „Żelbetowe i sprężone zbiorniki”, Wrocław – Szklarska Poręba.

- Buczowski W., 1998. Obliczenia statyczne w zbiorniku prostopadłościennym przy uwzględnieniu przestrzennej pracy statycznej ustroju oraz współpracy konstrukcji z podłożem winklerowskim. *Gospodarka Wodna* 4.
- Buczowski W., Czwojdzinski Z., 1988. Racjonalne kształtowanie konstrukcji skrzyniowych w procesie technologicznego projektowania obiektów. *Bud. Przem.* 2.
- Buczowski W., Czwojdzinski Z., 1989. Obliczenia statyczne konstrukcji skrzyniowych przy zastosowaniu programu ZBOT. *Bud. Przem.* (w druku).
- Buczowski W., Mikołajczak H., 1985. Zastosowanie metody różnic skończonych do obliczeń statycznych nietypowych zbiorników prostopadłościennych. *Mat. II Konf. Nauk.-Techn. „Projektowanie i technologia realizacji zbiorników”*, Kraków.
- Buczowski W., Mikołajczak H., Czwojdzinski Z., 1981. Wpływ sztywności dna na pracę statyczną ustrojów skrzyniowych. *Inż. Bud.* 5.
- Crämer H., 1952. *Statische Berechnung Kasten förmiger Behälter. Beton und Stahlbetonabau* 4.
- Czwojdzinski Z., Staszewski R., Buczowski W., 1985. Fundamenty skrzyniowe i rusztowe dla obiektów budowlanych wznoszonych na terenach szkód górniczych. *Probl. Proj.* 2.
- Dąbrowski K., Stachurski W., Zieliński J., 1982. *Konstrukcje betonowe*. Arkady, Warszawa.
- Gawroński S., 1953. *Prostokątne płytowe zbiorniki żelbetowe*. *Bud. Przem.* 5.
- Grabiec K., 1999. *Żelbetowe konstrukcje cienkościenne*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa – Poznań.
- Kączkowski Z., 1968. *Płyty. Obliczenia statyczne*. Arkady, Warszawa.
- Kłóś C., Mitzel A., Suwalski J., 1961. *Zbiorniki na cieczę*. Arkady, Warszawa.
- Kobiak J., Stachurski W., 1991. *Konstrukcje żelbetowe. T. 4*. Arkady, Warszawa.
- Mikołajczak H., Buczowski W., Czwojdzinski Z., 1976. Analiza statyczna monolitycznych skrzyń prostokątnych. *Inż. Bud.* 4.
- Mitzel A., 1952. *Silosy i zbiorniki*. PWN, Wrocław.
- Mitzel A., 1966. *Budownictwo betonowe. T. 13. Zbiorniki, zasobniki, silosy, kominy, maszty*. Arkady, Warszawa.
- Stachowicz A., Ziobroń W., 1986. *Podziemne zbiorniki wodociągowe*. Arkady, Warszawa.
- Stiglat/Wippel, 1973: *Platten*. Verlag Ernst und Sohn, Berlin.
- Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S., 1963. *Teoria płyt i powłok*. Arkady, Warszawa.
- Ullickij J.J. i inni, 1959. *Żelazobetonowe konstrukcje*. Gosudarstwennoje Izdatielstwo Tiejchniczeskoj Literatury, Kijew.
- Wilde P., 1966. Wariacyjne ujęcie różnic skończonych w teorii powłok. *Mat. XII Konf. Nauk. Komit. Nauki PZITB i Komit. Inż. PAN*, Krynica.

## APPLICATION OF BOW-STRINGS AND BUTTRESSES TAKING INTO CONSIDERATION REDISTRIBUTION OF DISPLACEMENTS AND BENDING MOMENTS IN MONOLITHIC RECTANGULAR TANKS

**Abstract.** The paper presents static calculation results of a rectangular tank obtained by numerical method in a variation approach to finite differences. Spatial character of static work and collaboration between the structure and elastic foundation was taken into account. Moreover, the possible way of rearrangement of wall displacements and bending moments in individual parts of the tank was shown. It was presented on the base of an example when the bow-strings fastened the opposite walls and the buttresses supported the longer walls in the middle of their span.

**Key words:** rectangular tanks, spatial static work, finite-difference method

Zaakceptowano do druku – Accepted for print: 13.01.2012