ACTA SCIENTIARUM POLONORUM Architectura 6 (4) 2007, 23–32

MODELOWANIE MATEMATYCZNE MATERIAŁÓW Z FUNKCJONALNĄ GRADACJĄ WŁASNOŚCI EFEKTYWNYCH – WYNIKI BADAŃ I PERSPEKTYWY ROZWOJOWE W POLSCE

Czesław Woźniak[1], Wiesław Nagórko[2]
[1]Politechnika Częstochowska
[2]Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie

Streszczenie. Zagadnienia teorii i praktyki inżynierskiej materiałów z funkcjonalną gradacją własności efektywnych (ang. functionally graded materials, dalej FGM) należą do jednego z głównych trendów rozwojowych współczesnej mechaniki materiałów. FGM są najczęściej traktowane jako mikroniejednorodne dwufazowe kompozyty o takim rozkładzie średnich frakcji obu faz, który na poziomie makroskopowym zapewnia łagodne przejście od jednej fazy (w pewnej części elementu konstrukcyjnego) do drugiej (w innej części). Zagadnienia modelowania matematycznego FGM, podobnie jak problematyka modelowania kompozytów, są formułowane w ścisłym powiązaniu mikromechaniki (tj. strukturalnego opisu materiału) oraz makromechaniki (opisu własności efektywnych). Tym samym metody matematyczne formułowania makroskopowych modeli FGM rozwijane współcześnie na świecie adaptują zwykle znane w mechanice metody modelowania kompozytów, natomiast koncepcję matematyczną homogenizacji zastępuje się koncepcją homogenizacji lokalnej (na poziomie makroskopowym). W ostatnich dwu dekadach rozwijane są w Polsce pewne nieasymptotyczne metody modelowania kompozytów i materiałów typu FGM, korzystające z tzw. tolerancyjnego uśredniania równań różniczkowych cząstkowych o nieciągłych i silnie oscylujących współczynnikach funkcyjnych. Podejście to wykorzystywane było ostatnio przez grupę pracowników w Politechnice Częstochowskiej, Politechnice Łódzkiej, Politechnice Śląskiej, Politechnice Wrocławskiej oraz w Szkole Głównej Gospodarstwa Wiejskiego. W ramach tych badań wykazano, że metoda tolerancyjnego uśredniania pewnych operatorów różniczkowych o nieciągłych i silnie oscylujących współczynnikach funkcyjnych w pełni daje się adaptować do modelowania matematycznego materiałów typu FGM o deterministycznej mikrostrukturze. Celem artykułu jest przedstawienie zwięzłego opisu wyników zaproponowanej metody tolerancyjnego modelowania zarówno dla mikrostruktur periodycznych, jak i dla mikrostruktur materiałów typu FGM.

Adres do korespondencji – Corresponding author: Wiesław Nagórko, Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego, Wydział Inżynierii i Kształtowania Środowiska, Zakład Mechaniki i Konstrukcji Budowlanych, ul. Nowoursynowska 159, 02-776 Warszawa, e-mail: wieslaw_nagorko@sggw.pl

Słowa kluczowe: modelowanie kompozytów, materiały typu FGM, tolerancyjne uśrednianie

WSTĘP

Ogólna koncepcja ośrodka materialnego z funkcjonalną gradacją własności efektywnych została sformułowana i była rozwijana w drugiej połowie ubiegłego wieku, zwłaszcza przez badaczy japońskich. Koncepcja FGM polega na uniknięciu bezpośredniego połączenia dwu materiałów o zdecydowanie różnych własnościach makroskopowych poprzez wprowadzenie pewnej pośredniej warstwy materiałowej, której własności zmieniają się łagodnie, gdy przechodzi się od jednego materiału do drugiego. Tym samym unika się powstania koncentracji naprężeń na styku pomiędzy materiałami o zdecydowanie różnych własnościach, czego następstwem może być powstanie defektów materiałowych i awaria konstrukcji. Przykładem takiego bezpośredniego łączenia materiałów może być na przykład bezpośrednie powiązanie osłony termicznej pojazdu kosmicznego z jego częścią nośną. Realizacja koncepcji ośrodka typu FGM jest dokonywana na poziomie mikrostrukturalnym, przy czym stopień „nasycenia" ośrodka FGM przez poszczególne składniki materiału zmienia się w sposób ciągły. Sytuacja ta jest podobna do przypadku materiału kompozytowego, brak tu jednakże możliwości wyróżnienia pewnego elementu reprezentatywnego. Tym samym uśrednianie własności ośrodka typu FGM przeprowadzać należy nie względem elementu reprezentatywnego (jak w przypadku kompozytu), lecz w sposób lokalny.

Dotychczasowe metody modelownia matematycznego ośrodków typu FGM korzystają najczęściej z metod asymptotycznych, będąc pewnym uogólnieniem znanej dobrze koncepcji homogenizacji. W przypadku materiałów o mikrostrukturze deterministycznej własności ośrodka typu FGM są opisywane za pomocą funkcji lokalnie periodycznych [Bensoussan i in. 1978]. Na tej drodze uogólnia się teorię homogenizacji asymptotycznej, zastępując ją homogenizacją lokalną, i w rezultacie otrzymuje się moduły efektywne ośrodka mikroniejednorodnego nie jako stałe, lecz jako funkcje dostatecznie gładkie.

Literatura dotycząca modelowania matematycznego ośrodków typu FGM jest bardzo obszerna i nie będzie tutaj omawiana [Suresh i Mortensen 1998]. Niemniej jednak znane metody modelowania są w większym bądź mniejszym stopniu zastąpieniem różnych wariantów metody homogenizacji (w tym homogenizacji asymptotycznej) na homogenizację lokalną, prowadzącą do koncepcji materiału makroniejednorodnego o łagodnie zmiennych własnościach.

Metoda homogenizacji, służąca do modelowania matematycznego na przykład kompozytów mikroperiodycznych, nie jest oczywiście jedyną metodą modelowania. W ciągu ostatnich dziesięcioleci zaproponowano i rozwijano w Polsce alternatywną metodę formułowania modeli matematycznych materiałów i konstrukcji o strukturze mikroperiodycznej. Metoda ta, zwana metodą tolerancyjnego uśredniania, umożliwia badanie pewnych zjawisk mikrostrukturalnych, które nie dają się opisać w ramach podejścia homogenizacyjnego. Wymienić tu można na przykład zagadnienia typu warstwy początkowej lub warstwy brzegowej, a także efekty mikrodynamiczne zaniedbywane w ramach teorii homogenizacji. Przegląd prac z tego zakresu można znaleźć w monografii Woźniak i Wierzbicki [2000]. W tejże monografii zauważono także, że metoda tolerancyjnego uśredniania może być uogólniona z ośrodków o mikrostrukturze periodycznej na mikrostruktury lokalnie mikroperiodyczne. Termin „ośrodek lokalnie mikroperiodyczny" należy rozumieć jako ośrodek, którego mikrostrukturę można lokalnie aproksymować mikrostrukturą periodyczną.

UŚREDNIANIE TOLERANCYJNE OŚRODKÓW TYPU FGM

Podstawowym pojęciem metody uśredniania tolerancyjnego jest tolerancja rozumiana formalnie jako pewna relacja binarna, symetryczna i zwrotna, lecz nie przechodnia. Pojęcie to było wykorzystane przez Zeemanna [1965] do formułowania tzw. topologii mózgu, a następnie przez Ficherę [1992] przy omawianiu fizycznej interpretacji parabolicznego równania przewodnictwa cieplnego. W tym drugim przypadku wyjaśniona została sprawa pozornego paradoksu nieskończonej prędkości rozchodzenia się ciepła. Matematyczne pojęcie tolerancji zostało wykorzystane następnie do formułowania modeli matematycznych struktur mikroperiodycznych – należy tu wymienić prace Cz. Woźniaka, E. Barona, J. Jędrysiaka, W. Nagórki, K. Mazur-Śniady, E. Wierzbickiego, M. Woźniak, z których większość była cytowana w monografii Woźniaka i Wierzbickiego [2000].

W przeciwieństwie do metody homogenizacji asymptotycznej, gdzie formalnie przechodzi się do zera z parametrem mikrostruktury (średnicą komórki periodyczności), w modelowaniu tolerancyjnym parametr mikrostruktury jest stały, zgodnie z jego fizycznym charakterem. Podstawowym pojęciem jest „funkcja wolnozmienna na komórce periodyczności", tj. funkcja, którą wraz z jej pochodnymi można uznać za stałą w obrębie dowolnej komórki. Uśrednienie tolerancyjne to uśrednienie, w ramach którego funkcje wolnozmienne można wyłączyć z operatora uśredniania, uznając, że operacja ta wykonywana jest z pewną tolerancją. W rezultacie uśrednione równania termomechaniki ośrodków mikroperiodycznych mogą zawierać stałe efektywne – współczynniki zależne także od wielkości parametru mikrostruktury (w przeciwieństwie do współczynników równań w homogenizacji asymptotycznej). Tym samym równania otrzymane metodą tolerancyjnego uśredniania mają ogólniejszy charakter niż równania teorii homogenizacji. Warto także zaznaczyć, że dokonując formalnego przejścia z parametrem mikrostruktury do zera, z równań modelu tolerancyjnego otrzymuje się pewne warianty homogenizacji asymptotycznej jako przypadki szczególne. Należy także nadmienić, że zastosowanie metody tolerancyjnego uśredniania do rozwiązywania zagadnień inżynierskich umożliwia weryfikację fizyczną otrzymanych wyników. Można bowiem sprawdzić, czy otrzymane z rozwiązania niewiadome funkcje są wolno zmienne w ramach pewnej aprobowanej tolerancji.

Jak już zaznaczono powyżej, opis tej metody oraz liczne rozwiązania zagadnień szczególnych, dotyczące struktur mikroperiodycznych można znaleźć w monografii Woźniak i Wierzbicki [2000], a także w cytowanych tam pracach.

Uogólnienie metody tolerancyjnego uśredniania ze struktur mikroperiodycznych na ośrodki deterministyczne typu FGM wymaga uogólnienia pojęcia funkcji lokalnie mikroperiodycznej bez stosowania przejść granicznych z parametrem mikrostruktury do zera. Zamiast tego niefizycznego przejścia wykorzystuje się tutaj koncepcję funkcji lokalnie mikroperiodycznej w ramach pewnej tolerancji. Z fizycznego punktu widzenia funkcja lokalnie periodyczna, o dziedzinie zawężonej do dowolnej komórki, jest tolerancyjnie nierozróżnialna od pewnej funkcji mikroperiodycznej. Tolerancyjne uśrednianie równań mikrostrukturalnych ośrodków typu FGM przebiega podobnie jak w przypadku struktur mikroperiodycznych. Wykazuje się jednak, że współczynniki funkcyjne otrzymanych równań modelu są funkcjami wolnozmiennymi w ramach określonej tolerancji. Liczba niewiadomych w równaniach modelu, jak również liczba równań jest większa niż liczba równań w modelu homogenizacji asymptotycznej. Oprócz uśrednionych pól temperatury i przemieszczeń pojawiają się bowiem nowe niewiadome nazwane amplitudami fluktuacji odpowiednio pól temperatury i przemieszczeń. Te ostatnie wprowadza się do rozważań, przedstawiając a priori temperaturę i pole przemieszczeń jako sumę odpowiednio uśrednionych pól temperatury i przemieszczeń oraz niezależnych fluktuacji tych pól na poziomie mikrostrukturalnym.

Powyższe fluktuacje przedstawia się jako sumy iloczynów amplitud fluktuacji i odpowiednich tzw. funkcji kształtu. Tym samym modele tolerancyjne można formułować z różną dokładnością, wprowadzając do rozważań większą bądź mniejszą liczbę funkcji kształtu. Przy przejściu z parametrem mikrostruktury do zera w ramach modelu tolerancyjnego amplitudy fluktuacji dadzą się wyrazić poprzez gradienty uśrednionych pól temperatury i przemieszczeń, otrzymując tzw. przybliżenie homogenizacyjne. Przy modelowaniu tolerancyjnym ośrodków typu FGM otrzymujemy wprawdzie równania różniczkowe o współczynnikach funkcyjnych, lecz wolnozmiennych w ramach określonej tolerancji. Podobnie jak w przypadku modelowania ośrodków mikroperiodycznych otrzymane rozwiązania należy zweryfikować pod względem fizycznym, tj. sprawdzić, czy otrzymane funkcje wolnozmienne są wyrażone w ramach aprobowanej przez nas tolerancji. Zarysowana powyżej ogólna koncepcja modelowania tolerancyjnego zostanie zobrazowana na przypadku szczególnym równania niestacjonarnego przewodnictwa cieplnego:

$$c\dot{\theta} - \nabla\left(K\nabla\theta\right) = 0 \tag{1}$$

gdzie θ jest polem temperatury, natomiast c i K są odpowiednio ciepłem właściwym i tensorem przewodnictwa ciepła, które przyjmują stałe wartości: c_1, c_2, K_1, K_2, odpowiednio w poszczególnych składnikach ośrodka typu FGM, będąc funkcjami Δ-periodycznymi, gdzie Δ jest jedno-, dwu- lub trójwymiarową komórką ośrodka. Zgodnie z techniką uśredniania tolerancyjnego należy dokonać rozkładu:

$$\theta = \vartheta + \lambda\varphi^A\psi^A \tag{2}$$

gdzie $A = 1, 2, ..., N$ oraz λ jest średnicą komórki Δ, tj. parametrem wielkości mikrostruktury. Obowiązuje konwencja sumacyjna, przy czym ψ^A są funkcjami wolnozmiennymi w komórce $\Delta(x)$ o środku w punkcie x. Oznaczając przez $< f > (x)$ średnią po komórce $\Delta(x)$, otrzymuje się:

$$< f\vartheta > (x) \approx \; < f > \vartheta(x), \qquad < f\nabla(\varphi^A\psi^A) > (x) \approx \; < f\nabla\varphi^A > \psi^A \tag{3}$$

Podstawiając wzór (2) do równania (1), otrzymuje się:

$$< L\vartheta > \ = \ 0, \quad < \varphi^A L\vartheta > \ = \ 0 \tag{4}$$

Uwzględniając wzór (3), równania (4) przyjmą postać:

$$< c > \dot{\vartheta} - \nabla(< K > \nabla\vartheta + < \nabla\varphi^A K > \psi^A) = 0$$

$$\lambda^2 < c\varphi^A\varphi^B > \dot{\psi}^B + < \nabla\varphi^A K \nabla\varphi^B > \psi^B + < \nabla\varphi^A K > \nabla\vartheta = 0 \tag{5}$$

W bardziej ogólnym przypadku drugie z równań (5) zawiera również składniki postaci $\lambda^2\bar{\nabla}(< K\varphi^A\varphi^B > \bar{\nabla}\vartheta)$, gdzie $\bar{\nabla}$ jest gradientem funkcji w kierunku normalnym do obszaru Δ. W równaniach (5) widać wyraźnie zależność współczynników równań od średnicy λ komórki Δ. Dla uproszczenia założono tutaj, że w rozpatrywanym ośrodku typu FGM komórkę $\Delta(x)$ o środku w dowolnym punkcie x otrzymuje się przez translację $\Delta(x) = x + \Delta$. Łatwo zauważyć, że pomijając w równaniach (5) składniki zależne od λ, można wyrugować amplitudy fluktuacji ψ^A, otrzymując model typu homogenizacyjnego z lokalnym modułem efektywnym:

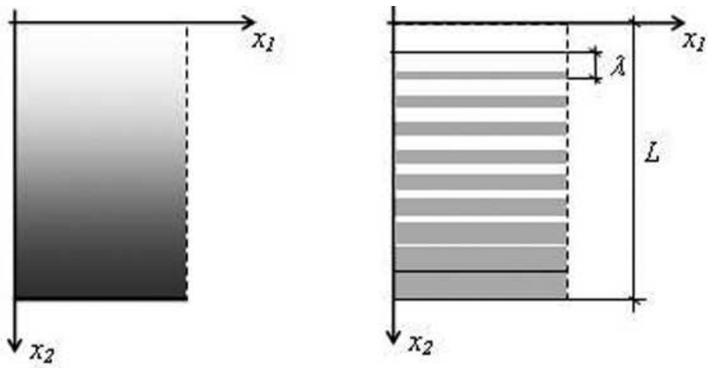
$$K^{eff} = \ < K > - < \nabla\varphi^A K >< \nabla\varphi^A K \nabla\varphi^B >^{-1} < K \nabla\varphi^B > \tag{6}$$

gdzie obowiązuje sumowanie podług A i B. Rozwiązanie zagadnienia brzegowo-początkowego dla równań (5) prowadzi do funkcji ϑ, ψ^A, jako funkcji wolno zmiennych w ramach tolerancji (3). Zaakceptowanie tej tolerancji zależy od wymaganej dokładności obliczeń. Niezależnie od uśrednionych tolerancyjnie równań (5) oraz modelu typu homogenizacyjnego, w którym formuła (2) przedstawia przybliżone rozwiązania zagadnienia lokalnie periodycznego, w następujących pracach wprowadzono także modele typu warstwy brzegowej i początkowej: Łaciński 2006, 2007, Michalak i Woźniak 2006, Rychlewska i Woźniak 2006, Szymczyk i Woźniak 2006, Łacińska i Wierzbicki 2007. W pracach tych równania dla amplitud ψ^A (równania efektu brzegowego lub początkowego) są niezależne od uśrednionego pola .

ZASTOSOWANIA W MECHANICE MATERIAŁÓW

Główna uwaga zastosowania techniki tolerancyjnego uśredniania do materiałów typu FGM koncentrowała się na ośrodkach o dwuskładnikowej strukturze warstwowej. Mamy tu do czynienia najczęściej z warstwami o tej samej grubości λ, przy czym każda z warstw składa się z dwóch jednorodnych lamin o grubościach λ_1 i λ_2, przy czym λ_1 i λ_2 nie są stałe, lecz istnieją gładkie funkcje monotoniczne $\lambda_1(x)$, $\lambda_2(x)$, $x \in < 0, L >$, które są funkcjami wolnozmiennymi w każdym przedziale długości λ. Strukturę taką można nazwać strukturą warstwową typu FGM; fragment takiej struktury przedstawiono na rysunku 1.

Zagadnienia niestacjonarnego przewodnictwa ciepła oraz zagadnienia elastodynamiki takich struktur były rozpatrywane w pracach: Łacińskiego [2006], Nagórki i Piwowar-

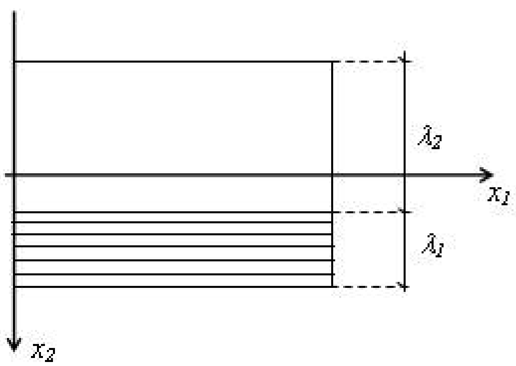


Rys. 1. Ośrodek o dwuskładnikowej strukturze warstwowej
Fig. 1. Fragment of FGM on the macro- and microstructural level

skiego [2006], Rychlewskiej [2006], Rychlewskiej i Woźniaka [2006], Szymczyk [2007], gdzie między innymi rozpatrywano pewne zagadnienia optymalizacji.

W pracach Łacińskiego [2007] oraz Szymczyk i Woźniaka [2006] rozpatrywano także modele tolerancyjne typu warstwy brzegowej i warstwy początkowej, a w pracach Woźniak [1995], oraz Woźniaka i in. [2005] zagadnienia uwzględniające wpływ interlaminarnych mikrodefektów na elastodynamikę takiego ośrodka.

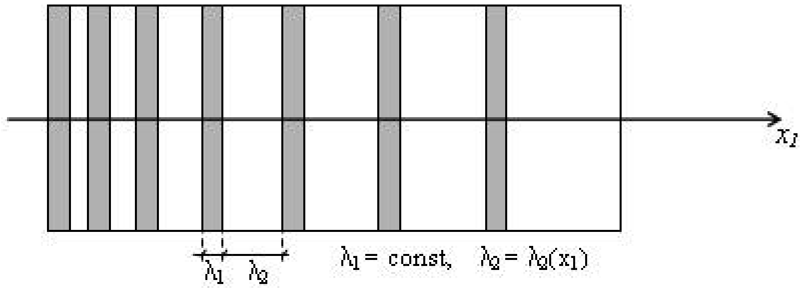
Osobnym zagadnieniem była analiza ośrodków typu FGM o tzw. słabej poprzecznej niejednorodności. Fragment takiego ośrodka na poziomie mikrostrukturalnym przedstawiono na rysunku 2.



Rys. 2. Ośrodek o słabej poprzecznej niejednorodności
Fig. 2. Medium with slightly transversally nonhomogenity

Przedstawiono tam wybraną warstwę takiego ośrodka, w której dolna lamina jest zbrojona cienkimi włóknami równoległymi do osi x_1, natomiast osnowa obu lamin jest taka sama. Łatwo zauważyć, że własności obu lamin wzdłuż osi x_1 są praktycznie takie same (włókna zbrojenia nie odgrywają tu istotnej roli), natomiast zdecydowanie różne w kierunku x_2. W pracach tych dokonano także porównań wyników otrzymanych z modelowania tolerancyjnego z wynikami numerycznymi otrzymanymi przez całkowanie równań różniczkowych termomechaniki na poziomie mikrostrukturalnym. Współczynniki tych ostatnich równań są nieciągłe, silnie oscylujące i lokalnie periodyczne.

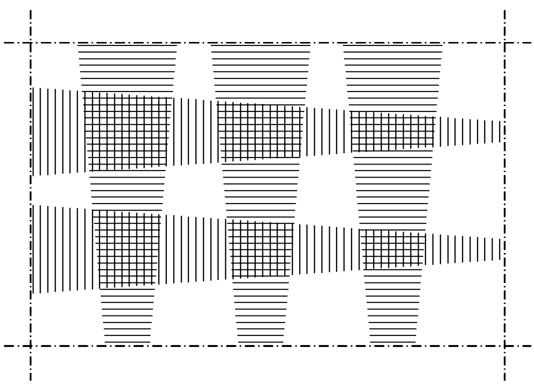
Oprócz ośrodków typu FGM o strukturze warstwowej były również rozpatrywane ośrodki, w których grubości warstw są zmienne w sposób przedstawiony na rysunku 3.



Rys. 3. Ośrodek periodyczny w kierunku osi x_2
Fig. 3. Medium periodic in the direction of the x_2-axis

Mamy tu do czynienia z ośrodkiem periodycznym w kierunku osi x_2 o własnościach efektywnych wolno zmieniających się w kierunku osi x_1. Wybrane zagadnienia tego rodzaju struktur były rozpatrywane przez Michalaka i Woźniak [2006]. Przewodnictwo cieplne oraz własności lepkosprężyste takich ośrodków były analizowane w pracach: Łacińskiego [2006], Rychlewskiej [2006], i Szymczyk [2007]. Zarówno przy zastosowaniu ogólnego modelu tolerancyjnego, jak i przy zastosowaniu wersji uproszczonej tego modelu (modele efektu początkowego i brzegowego) i przybliżenia typu homogenizacyjnego, w ośrodkach typu FGM, przedstawionych na rysunkach 2 i 3, mamy do czynienia z własnościami efektywnymi zmieniającymi się w kierunku osi x_1 natomiast stałymi w kierunku osi x_2.

Nieco inną sytuację przedstawiono na rysunku 4, gdzie mamy do czynienia z fragmentem ośrodka typu FGM, który jest zbrojony dwiema rodzinami cienkich, krótkich włókien, równoległych odpowiednio do osi x_1 i x_2.



Rys. 4. Ośrodek zbrojony dwiema rodzinami włókien
Fig. 4. Scheme of reinforcement in the cross-section

W zależności od struktury takiego ośrodka gradacja własności efektywnych może zachodzić w dowolnym kierunku na płaszczyźnie Ox_1x_2. Zagadnieniami przewodnictwa ciepła w takich ośrodkach zajmował się Nagórko [2007], natomiast zagadnieniami elastodynamiki Rychlewska [2007] i Szymczyk [2007].

ZASTOSOWANIA W MECHANICE KONSTRUKCJI

Struktury typu FGM można również stosować w zagadnieniach belek płyt i powłok. Punktem wyjścia rozważań na poziomie mikrostrukturalnym są 1-D (w przypadku belek) bądź 2-D (w przypadku płyt i powłok) modele matematyczne takich struktur, mające lokalnie periodyczne silnie oscylujące i nieciągłe współczynniki funkcyjne. Ogólne podejście do uśredniania tolerancyjnego tych równań zostało omówione w rozdziale „Uśrednianie tolerancyjne...” i zobrazowane przykładem niestacjonarnego przepływu ciepła.

Zagadnienia drgań harmonicznych oraz zagadnienia wartości własnych były analizowane przez Mazur-Śniady [2007]. Ta sama autorka zajmowała się problemami ruchomych obciążeń na belkach zarówno w ujęciu deterministycznym, jak i stochastycznym. Zagadnienia drgań cienkich płyt w ramach modelu Kirchhoffa oraz problemy stateczności takich płyt były rozpatrywane przez Jędrysiaka i in. [2005], Jędrysiaka [2007], Jędrysiaka i Radzikowską [2007]. Stateczność i drgania płyt typu FGM o średniej grubości to tematyka aktualnych prac Barona [2007]. W pracach Michalaka [1998, 1999] analizowano a cienkie płyty periodycznie pofałdowane, a w pracach Tomczyk [2006, 2007] uwaga autorki koncentrowała się na cienkich powłokach walcowych.

Należy zaznaczyć, że większość opublikowanych wyników z tego zakresu dotyczy struktur mikroperiodycznych. Natomiast bieżące badania koncentrują się na ośrodkach typu FGM.

PODSUMOWANIE

Jak dotychczas, główna uwaga dotycząca zastosowania metody tolerancyjnego uśredniania równań różniczkowych zarówno do mechaniki ciała stałego, jak i do mechaniki konstrukcji koncentrowała się na strukturach mikroperiodycznych. Obecnie prowadzone są badania w Politechnice Częstochowskiej, Politechnice Łódzkiej, Politechnice Śląskiej, Politechnice Wrocławskiej oraz w Szkole Głównej Gospodarstwa Wiejskiego. Badania te dotyczą przede wszystkim ośrodków typu FGM. Główny nacisk położony jest na te zagadnienia, które nie dadzą się analizować w ramach przybliżenia homogenizacyjnego, m.in. są to zagadnienia wpływu mikrozaburzeń początkowych pola temperatury i przemieszczenia na przebieg procesu termomechanicznego, jak również wpływu odpowiednich zaburzeń brzegowych na przebieg tego procesu. Badania prowadzone są w ramach teorii zlinearyzowanych, natomiast perspektywy dalszych badań mają dotyczyć zagadnień quasi-liniowych oraz problemów optymalizacyjnych w ośrodkach typu FGM przy zastosowaniu metody uśredniania tolerancyjnego. W przygotowaniu znajduje się obecnie obszerna monografia dotycząca metody tolerancyjnego uśredniania w zagadnieniach mechaniki materiałów i mechaniki konstrukcji. Uwzględniane są tu zarówno ośrodki o strukturze mikroperiodycznej, jak i o strukturze typu FGM.

PIŚMIENNICTWO

Baron E., 2007. Nieasymptotyczne modelowanie średniej grubości płyt z funkcjonalną gradacją własności (FGM). I Kongres Mechaniki Polskiej, Warszawa.

Bensoussan A., Lions J.L., Papanicolau G., 1978. Asymptotic Analysis for Periodic Structures. North – Holland, Amsterdam.

Fichera G., 1992. Is the Fourier theory of heat propagation paradoxical? Rendiconti del Circolo Mathematico de Palermo.

Jędrysiak J., 2007. Model tolerancyjny zagadnień dynamicznych nieperiodycznie laminowanej warstwy (FGM). I Kongres Mechaniki Polskiej, Warszawa.

Jędrysiak J., Radzikowska A., 2007. On the modelling of heat conduction in a non-periodically laminated layer. Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 45, 2.

Jędrysiak J., Rychlewska J., Woźniak Cz., 2005. Microstructural 2D-models in functionally graded laminated plates. In: Shell Structures: Theory and Applications. Taylor & Francis Group, London, 119–125.

Łacińska L., Wierzbicki E., 2007. Wpływ początkowych i brzegowych zaburzeń stanu przemieszczenia na dynamikę laminatów typu FGM. I Kongres Mechaniki Polskiej, Warszawa.

Łaciński Ł., 2006. Modelling and analysis of the heat conduction in functionally graded laminates. PhD thesis.

Łaciński Ł., 2007. Modelowanie zjawisk warstwy brzegowej w przewodnictwie ciepła laminatów typu FGM. I Kongres Mechaniki Polskiej, Warszawa.

Mazur-Śniady K., 2007. Dynamika belek zginanych typu FGM. I Kongres Mechaniki Polskiej, Warszawa.

Michalak B., 1998. Stability of elastic slightly wrinkled plates. Acta Mech. 130, 111–119.

Michalak B., 1999. Stability of slightly wrinkled plates interacting with an elastic subsoil. Engin. Trans. 47, 269–283.

Michalak B., Woźniak M., 2006. On the heat conduction in certain functionally graded composites. In: Selected Topics in the Mechanics of Inhomogeneous Media. Eds. Cz. Woźniak, R. Świtka, M. Kuczma. Wydaw. Uniwersytetu Zielonogórskiego, Zielona Góra, 229–238.

Nagórko W., 2007. Przewodnictwo cieplne w materiałach wzmocnionych siatką włókien z funkcjonalną gradacją własności. I Kongres Mechaniki Polskiej, Warszawa.

Nagórko W., Piwowarski M., 2006: On the heat conduction in periodically nonhomogeneous solids. In: Selected Topics in the Mechanics of Inhomogeneous Media. Eds. Cz. Woźniak, R. Świtka, M. Kuczma. Wydaw. Uniwersytetu Zielonogórskiego, Zielona Góra, 241–254.

Rychlewska J., 2006a. On the modelling and optimization of functionally graded laminates. Journal of Theoretical and Applied Mechanics 44, 4, 783–795.

Rychlewska J., 2006b. Discrete and continuum modelling in elastodynamics of functionally graded laminates. In: Selected Topics in the Mechanics of Inhomogeneous Media. Eds. Cz. Woźniak, R. Świtka, M. Kuczma, Wydaw. Uniwersytetu Zielonogórskiego, Zielona Góra, 27–37.

Rychlewska J., 2007. Zagadnienia warstwy brzegowej w elastodynamics laminatów typu FGM. I Kongres Mechaniki Polskiej, Warszawa.

Rychlewska J., Woźniak Cz., 2006. Boundary layer phenomena in elastodynamics of functionally graded laminates. Archives of Mechanics 58, 4–5, 1–14.

Rychlewska J., Woźniak Cz., Woźniak M., 2006. Modelling of functionally graded laminated revisited, EJPAU 9(2) (http://www.ejpau.media.pl).

Suresh S., Mortensen A., 1998. Fundamentals of functionally graded materials. The University Press, Cambridge.

Szymczyk J., 2007. Modelowanie zagadnień elastodynamiki w laminatach typu FGM o słabej poprzecznej niejednorodności. I Kongres Mechaniki Polskiej, Warszawa.

Szymczyk J., Woźniak Cz., 2006a. Continuum modelling of laminates with a slowly graded microstructure. Archives of Mechanics 58, 4–5.
Szymczyk J., Woźniak Cz., 2006b. A contribution to the modelling of periodically laminated elastic solids, EJPAU 9(1) 22 (http://www.ejpau.media.pl).
Tomczyk B., 2006. On the effect of period length on dynamic stability of thin biperiodic cylindrical shells, EJPAU 9(3), 11 (http://www.ejpau.media.pl).
Tomczyk B., 2007. Dynamiczna stateczność cienkich uniperiodycznych powłok walcowych. I Kongres Mechaniki Polskiej, Warszawa.
Woźniak Cz., Wierzbicki E., 2000. Averaging Techniques in Thermomechanics of Composite Solids. Wydaw. Politechniki Częstochowskiej, Częstochowa.
Woźniak Cz., Rychlewska J., Wierzbicki E., 2005. Modelling and analysis of functionally graded laminated shells. In: Shell Structures: Theory and Applications. Taylor & Francis Group, London, 187–191.
Woźniak M., 1995. On the dynamic behavior of micro-damaged stratified media. Int. J. Fract. 73, 223–232.
Zeemann E.C., 1965. The topology of the brain. In: Biology and Medicine. Medical Research Council, 227–292.

MATHEMATICAL MODELLING OF FUNCTIONALLY GRADED MATERIALS IN POLAND

Abstract. The lecture contains a general revues of results in the mathematical modelling of FGM and structures obtained in Poland. The main attention is posed on the application of the new nonasymptotic method of micro-macro-modelling. This method is based on the tolerance averaging technique of differential operators with discontinuous and highly oscillating local periodic coefficients which for microperiodic materials was developed in Woźniak and Wierzbicki [2000].

Key words: functionally graded materials, FGM, averaging techniques

Zaakceptowano do druku – Accepted for print: 4.12.2007