

PLYTY PROSTOKĄTNE O SKOKOWO ZMIENNEJ GRUBOŚCI OBCIĄŻONE TEMPERATURĄ

Anna Szymczak-Graczyk

Akademia Rolnicza w Poznaniu

Streszczenie. W artykule przedstawiono wyniki analizy pracy statycznej płyt prostokątnych o skokowo zmiennej grubości, o trzech krawędziach utwierdzonych i z jedną swobodną, obciążonych temperaturą. Wpływ obciążenia temperaturą często nieuwzględniany w obliczeniach prowadzi do dużych błędów projektowych, a tym samym do pojawienia się problemów eksploatacyjnych elementów konstrukcji. Poza analizą numeryczną wykonano badania modelowe analizowanej płyty, których wyniki zamieszczono w niniejszej pracy.

Słowa kluczowe: płyty prostokątne, zmienna grubość płyt, obciążenie temperaturą, metoda różnic skończonych

WSTĘP

Płyty prostokątne o trzech krawędziach utwierdzonych i jednej swobodnej są konstrukcjami często spotykanymi w praktyce inżynierskiej. Typowym przykładem ich występowania mogą być zbiorniki prostopadłościowe. Poza obciążeniem ścian parciem gruntu czy wody zbiorniki często narażone są na obciążenie temperaturą wynikające np. z wypełnienia gorącą cieczą lub w wyniku oddziaływań klimatycznych. W pracy pokazano jak duży jest wpływ obciążenia temperaturą na generowanie sił wewnętrznych w porównaniu do tych wywoływanych pozostałymi obciążeniami. Płyty prostokątne o stałej sztywności obciążone temperaturą zostały w literaturze opisane między innymi przez: Thrana [1954, 1957], Nowackiego [1960], Buczkowskiego [1990], Mikołajczaka i Buczkowskiego [1998], Kączkowskiego [2000], natomiast o płytach o zmiennej sztywności informacje w literaturze przedmiotu znaleźć można na przykład u Thrana [1957].

Również w kilku pracach Buczkowskiego [1992, 1993] oraz Buczkowski i in. [2006] przedstawiono rozwiązania i omówiono problemy występujące w ścianach prostopadłościowych zbiorników poddanych działaniu temperatury.

OBLICZENIA STATYCZNE

Do analizy pracy statycznej płyt o zmiennej grubości, obciążonych również temperaturą, wykorzystano metodę różnic skończonych w ujęciu wariacyjnym. Funkcjonał zaczerpnięty z pracy Kączkowskiego [2000], opisujący energię odkształcenia sprężystego oraz energię potencjalną wynikającą z działania obciążenia dla płyt przedstawia się następująco:

$$V = \frac{D}{2} \iint_A \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right. \\ \left. + 2(1+\nu) \frac{\alpha_t \Delta T}{h} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\alpha_t \Delta T}{h} \right) \right\} dA - \iint_A q w dA \quad (1)$$

gdzie: w – ugięcie płyty,

ν – współczynnik Poissona,

D – sztywność płyty na zginanie przedstawiająca się następującym wzorem:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2)$$

ΔT – różnica temperatury pomiędzy dolną a górną powierzchnią płyty określona zależnością:

$$\Delta T = T_d - T_g$$

α_t – współczynnik rozszerzalności termicznej,

h – grubość płyty,

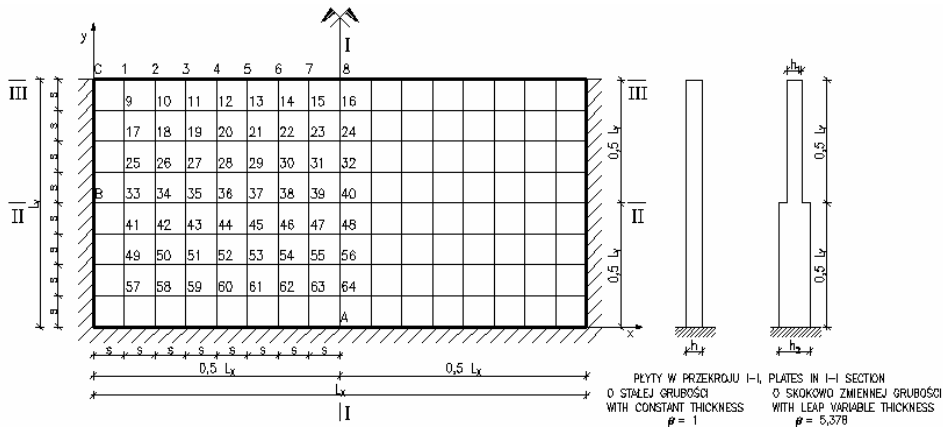
E – moduł sprężystości materiału płyty,

A – powierzchnia środkowa płyty,

q – obciążenie prostopadłe do środkowej powierzchni płyty.

Przed przystąpieniem do poszukiwania rozwiązań metodą różnic skończonych analizowaną płytę należy podzielić dyskretną siatką linii na elementarne podobszary. Aby z wykorzystaniem funkcjonału (1) doprowadzić do otrzymania układu równań liniowych algebraicznych, należy wstawić na miejsce pochodnych odpowiednie ilorazy różnicowe i skorzystać z warunku, że dla układu będącego w stanie statecznej równowagi jego energia osiąga minimum, a jednocześnie całkowanie po powierzchni zastąpić sumowaniem po elementarnych podobszarach. Równania metody różnic skończonych otrzymano, korzystając z pracy Gołasia [1972]. Przydatność metody różnic skończonych do sprawdzenia wpływów termicznych wykazano na przykładzie płyty o stałej sztywności oraz dla płyty o skokowo zmiennej sztywności.

Przyjęte do obliczeń płyty wraz z siatką podziału oraz przekrojami w osi symetrii pokazano na rysunku 1.



Rys. 1. Analizowana płyta z przyjętą siatką podziału, numeracją oraz lokalizacją przekrojów
 Fig. 1. Analysed plate with numbers of points and localization of sections

Do analizy przyjęto:

– płytę o stałej grubości h , oraz płytę o grubości w górnej części h_1 , a w dolnej h_2 , przy czym założono, że stosunek sztywności dolnej części D_2 do sztywności górnej części D_1 określony jest współczynnikiem $\beta = D_2/D_1$, natomiast w miejscu skokowej zmiany grubości przyjęto sztywność określoną jako $D_{12} = 0,5 (D_1 + D_2)$,

– obliczenia wykonano dla współczynnika Poissona $\nu = 0$ oraz dla trzech rodzajów obciążeń: równomiernie rozłożonego na całej płycie, hydrostatycznego oraz różnicą temperatur ΔT identyczną na całej płycie.

Po zbudowaniu układu równań przemieszczeniowych i jego rozwiązaniu otrzymano ugięcia we wszystkich węzłach przyjętej siatki podziału. Na podstawie uzyskanych ugięć obliczono momenty zginające zgodnie ze wzorami:

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\alpha_t \Delta T}{h} \right) \tag{5}$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\alpha_t \Delta T}{h} \right) \tag{5}$$

W tabeli 1 zestawiono otrzymane wartości ugięć i momentów dla wybranych punktów poszczególnych płyt od obciążeń: stałego, hydrostatycznego oraz temperatury. Przedstawione rozwiązanie dotyczy płyty o schemacie pokazanym na rysunku 1, o stosunku wymiarów $l_x : l_y = 2 : 1$, o stosunku grubości $h_2 : h_1 = 1,75 : 1$, co daje $\beta = D_2 / D_1 = (h_2 / h_1)^3 = 5,378$. Przyjęty do obliczeń współczynnik β wynikał z wymiarów płyty modelu, który został wykorzystany do weryfikacji otrzymanych rozwiązań.

Analizując wyniki zawarte w tabeli 1, można stwierdzić, że dla płyt prostokątnych o trzech krawędziach zamocowanych i czwartej swobodnej o grubości $h = \text{const}$, największa wartość momentu zginającego M_x wywołanego obciążeniem temperaturą wystę-

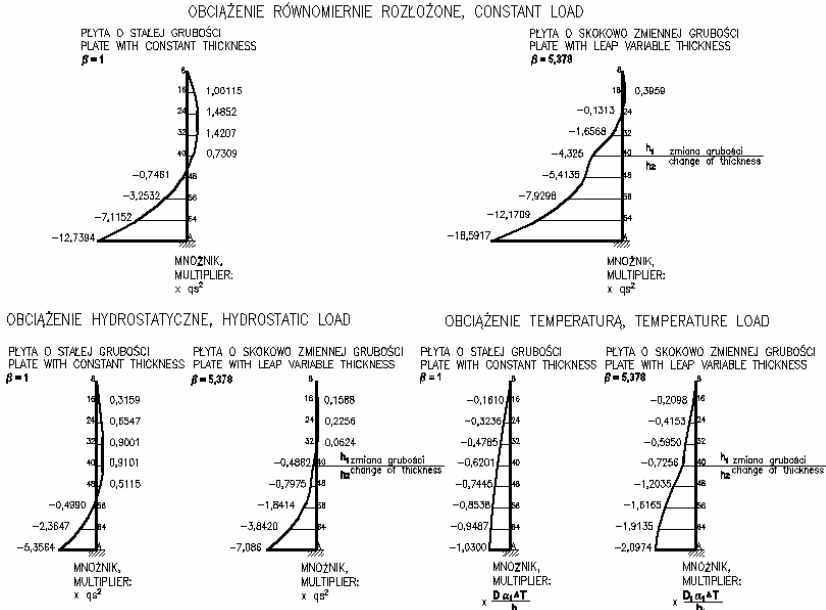
Tabela 1. Porównanie momentów i ugięć dla płyty o stałej sztywności oraz o skokowo zmiennej sztywności

Table 1. Comparison of bending moments and displacement for constant and leap variable plate thickness

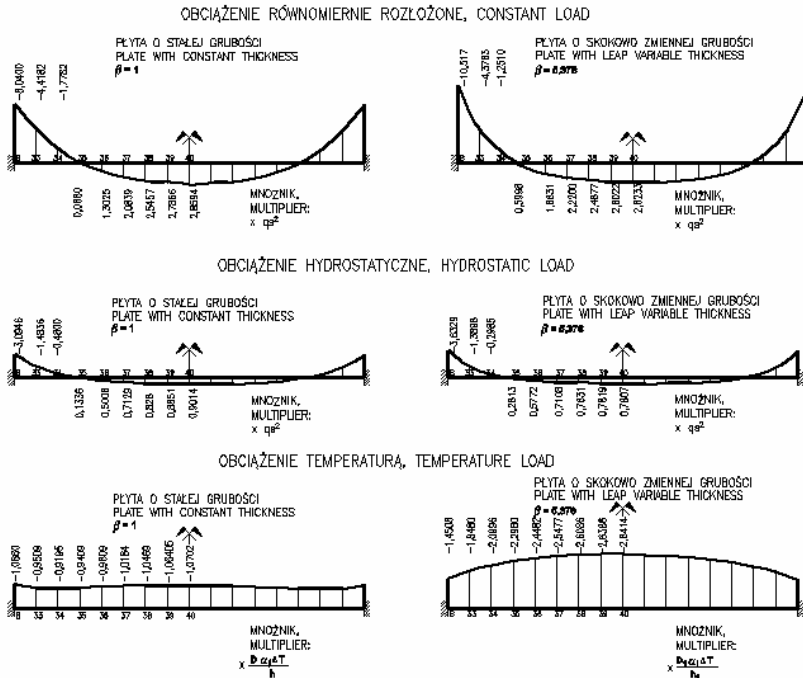
	Płyta o stałej sztywności Plate with constant thickness D = const			Płyta o skokowo zmiennej sztywności Plate with leap variable thickness $\beta = D_2 / D_1 = 5,378$		
	obciążenie stałe constant load	obciążenie hydrostatyczne hydrstatic load	obciążenie temperaturą temperature load	obciążenie stałe constant load	obciążenie hydrostatyczne hydrstatic load	obciążenie temperaturą temperature load
	mnożnik multiplier qs^2	mnożnik multiplier qs^2	mnożnik multiplier $D\alpha_r\Delta T / h$	mnożnik multiplier qs^2	mnożnik multiplier qs^2	mnożnik multiplier $D\alpha_r\Delta T / h$
Porównywalna wielkość Comparision of values	Wartości momentów Values of bending moments					
M_X^8	5,9722	1,6894	-1,3274	2,5006	0,6350	-1,4472
M_X^{A0}	2,9400	0,9014	-1,0702	2,6233	0,7807	-2,6414
M_X^C	-17,6386	-4,2918	1,0004	-10,1336	-2,1460	1,5866
M_X^B	-8,0400	-3,0946	-1,0860	-10,5167	-3,6329	-1,4508
M_Y^{A0}	0,7394	0,9101	-0,6201	-4,3250	-0,4882	-0,7256
M_Y^A	-12,7394	-5,3564	-1,0300	-18,5917	-7,0860	-2,0974
	Wartości ugięć Values of displacement					
	obciążenie stałe constant load	obciążenie hydrostatyczne hydrstatic load	obciążenie temperaturą temperature load	obciążenie stałe constant load	obciążenie hydrostatyczne hydrstatic load	obciążenie temperaturą temperature load
	mnożnik multiplier qs^4 / D	mnożnik multiplier qs^4 / D	mnożnik multiplier $\alpha_r\Delta Ts^2 / h$	mnożnik multiplier qs^4 / D_1	mnożnik multiplier qs^4 / D_1	mnożnik multiplier $\alpha_r\Delta Ts^2 / h_1$
w_4	68,4871	18,1098	-5,1564	34,5641	8,0595	-7,2372
w_8	112,8461	30,4490	-7,6697	53,8112	12,8823	-10,7558
w_{36}	32,8230	11,4664	-0,1957	11,3090	3,6848	-1,1279
w_{40}	54,0769	18,2934	-0,6418	17,6589	5,6115	-1,8940

puje w środku rozpiętości krawędzi swobodnej. Natomiast w przypadku płyty o skokowo zmiennej grubości największa wartość momentu zginającego M_x występuje w obszarze płyty w środku rozpiętości w przekroju, gdzie następuje zmiana grubości płyty.

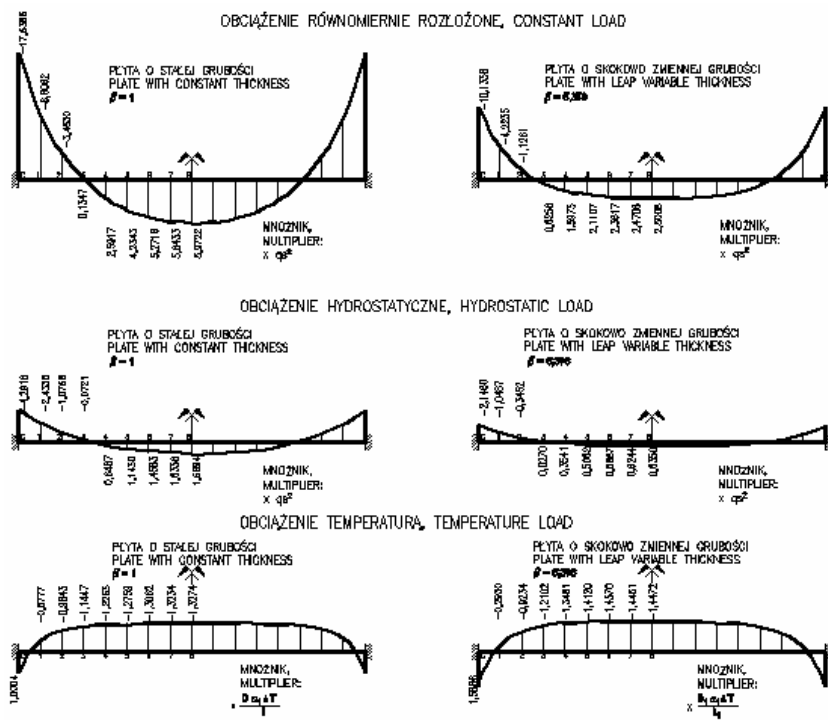
Dla lepszego zobrazowania pracy statycznej analizowanych płyt wykonano wykresy momentów zginających M_x oraz M_y dla płyty o stałej grubości oraz dla płyty o skokowo zmiennej grubości w zaznaczonych na rysunku 1 przekrojach. Wykresy te pokazano na rysunkach 2, 3 i 4.



Rys. 2. Wykresy momentów zginających M_y dla analizowanych płyt w przekroju I-I
 Fig. 2. Diagram of bending moments M_y in section I-I



Rys. 3. Wykresy momentów zginających M_x dla analizowanych płyt w przekroju II-II
 Fig. 3. Diagram of bending moments M_x in section II-II

Rys. 4. Wykresy momentów zginających M_x dla analizowanych płyt w przekroju III-IIIFig. 4. Diagram of bending moments M_x in section III-III

BADANIA MODELOWE

Poza przedstawioną powyżej analizą rachunkową przeprowadzono również badania modelowe dla płyty o skokowo zmiennej grubości. Model zbudowany został ze szkła organicznego. Pomiedzy ramami z kątowników stalowych umieszczono płytę o grubości: w górnej części $h_1 = 10,73$ mm, natomiast w dolnej części $h_2 = 18,80$ mm, co daje stosunek grubości $h_2 : h_1 = 1,75 : 1$ i $\beta = D_2 / D_1 = (h_2 / h_1)^3 = 5,378$, jak dla rozwiązania analitycznego. Płyta miała trzy krawędzie utwierdzone w stalowych ramkach z kątowników oraz czwartą krawędź swobodną. Zmiana grubości płyty następowała w połowie jej wysokości. Wymiary płyty w świetle ramki były następujące: $L_X = 48$ cm, $L_Y = 18$ cm. W celu wyznaczenia modułu sprężystości szkła organicznego wykonano badania na beleczce przygotowanej z tego samego arkusza co badana płyta. Wymiary beleczki wynosiły: długość 500 mm, szerokość 27,58 mm oraz grubość 18,80 mm. Badania przeprowadzono w temperaturze 20°C. Dla belki wolno podpartej, obciążonej siłą skupioną w środku rozpiętości, zmierzono strzałkę ugięcia, a następnie korzystając z zależności opisanej wzorem (7):

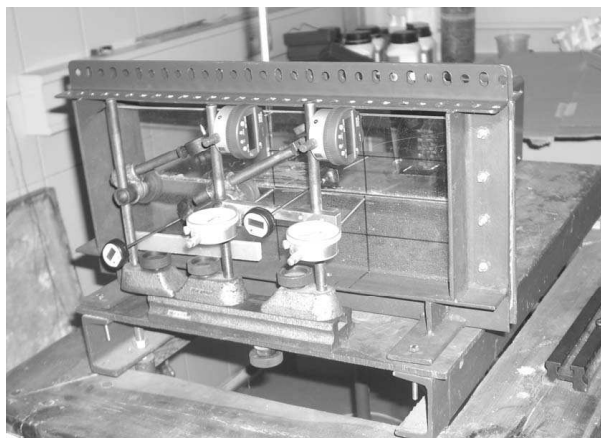
$$f = \frac{Pl^3}{48EJ} \quad (7)$$

i po przekształceniu według wzoru (8)

$$E = \frac{Pl^3}{48fJ} \quad (8)$$

wyliczono moduł sprężystości szkła organicznego, który w temperaturze 20°C wynosił:
 $E = 273,26 \text{ kN}\cdot\text{cm}^{-2}$.

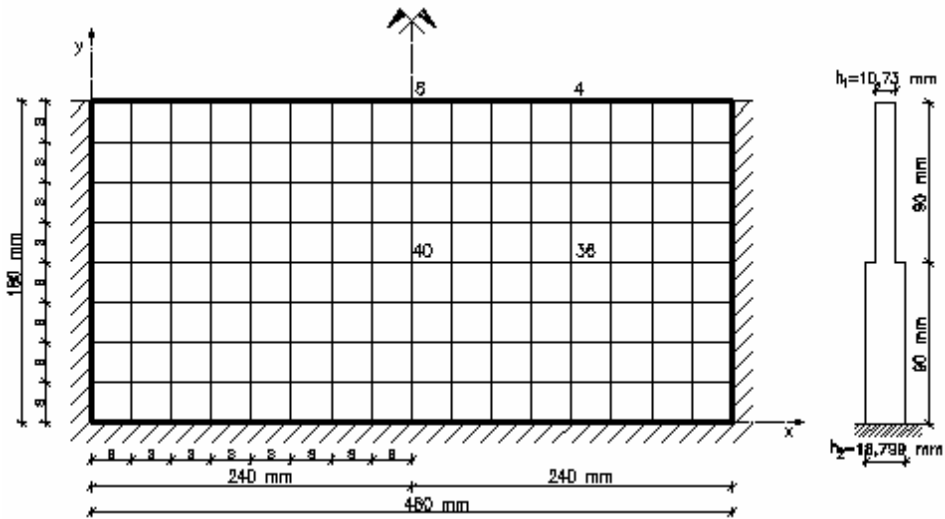
Ogólny widok płyty w trakcie badań przedstawiono na rysunku 5.



Rys. 5. Ogólny widok płyty podczas badań

Fig. 5. View of plate during research

Do płyty przystawiono cztery czujniki – dwa na swobodnej krawędzi o dokładności odczytu 0,001 mm oraz dwa na skoku grubości o dokładności odczytu 0,01 mm. Do weryfikacji wykonanych wcześniej obliczeń rachunkowych przyjęto obciążenie temperaturą. Podczas wykonywania badania jednostronnie ogrzewano płytę gorącym powietrzem, natomiast z drugiej strony ochładzano zimnym powietrzem. Dmuchawa z ciepłym powietrzem znajdowała się w środku tunelu, którego ścianki uniemożliwiały rozprzestrzenianie się ciepłego powietrza do wnętrza pomieszczenia. Temperatura powierzchni mierzona była za pomocą termometrów kontaktowych. Odczytu czujników mierzących odkształcenie płyty dokonano w momencie, gdy temperatura po obu stronach badanej płyty ustabilizowała się. Zaobserwowano również stałość wskazań czujników mierzących przemieszczenia. Założono liniowy rozkład temperatury na grubości badanej płyty. Na rysunku 6 przedstawiono lokalizację punktów pomiarowych, w których za pomocą czujników mierzono ugięcie płyty o skokowo zmiennej grubości poddanej działaniu obciążenia temperaturą.



Rys. 6. Lokalizacja punktów pomiarowych dla badanej płyty

Fig. 6. Localization of measurement points

Poniżej zamieszczono wyniki ugięć zmierzonych podczas badań modelowych. Temperatura strony ogrzanej w momencie odczytu wynosiła $T_g = 68^\circ\text{C}$, temperatura strony nieogrzanej w momencie odczytu wynosiła: w części dolnej $28,2^\circ\text{C}$ oraz w górnej $30,6^\circ\text{C}$. Przesunięcia poszczególnych punktów wynosiły:

- dla punktu 4 $\Delta w_4 = 1,622 \text{ mm}$,
- dla punktu 8 $\Delta w_8 = 2,422 \text{ mm}$,
- dla punktu 36 $\Delta w_{36} = 0,21 \text{ mm}$,
- dla punktu 40 $\Delta w_{40} = 0,41 \text{ mm}$.

Podczas badań modelowych w trakcie odczytu przemieszczeń zmierzone różnice temperatury pomiędzy zewnętrznymi płaszczyznami płyty wynosiły:

- dla górnej części płyty $\Delta T_g = T_s - T_g = 68 - 30,6 = 37,4^\circ\text{C}$
- dla dolnej części płyty $\Delta T_d = T_s - T_d = 68 - 28,2 = 39,8^\circ\text{C}$
- średnia różnica temperatur na skoku grubości płyty $\Delta T_{sr} = 38,6^\circ\text{C}$,
- długość płyty $L_x = 48 \text{ cm}$,
- szerokość płyty $L_y = 18 \text{ cm}$,

Wartość współczynnika α_t była niezbędna do wyznaczenia przemieszczeń wynikających z obliczeń numerycznych. Ponieważ szkło organiczne wykazuje dużą wrażliwość na temperaturę, więc stałe materiałowe α_t oraz E należy wyznaczać dla temperatury występującej podczas badań. Aby wyznaczyć opisane powyżej stałe materiałowe użyto beleczki, która w temperaturze pokojowej, wynoszącej 18°C , miała długość $l = 50 \text{ cm}$, następnie umieszczono ją w wodzie o temperaturze 45°C . Przy tej temperaturze beleczka wydłużyła się o $\Delta l = 1,26 \text{ mm}$. Na podstawie zależności (9):

$$\Delta l = l\alpha_t\Delta T \quad (9)$$

i po jej przekształceniu do postaci:

$$\alpha_t = \frac{\Delta l}{l \Delta T} \quad (10)$$

wyznaczono wartość współczynnika liniowej wydłużalności termicznej, który wynosi:

$$\alpha_t = 9,3361 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

W tabeli 2 zestawiono wartości ugięć pomierzone na modelu oraz wyliczone metodą różnic skończonych dla danych odpowiadających parametrom modelu oraz w temperaturze określonej podczas badań modelowych. Obliczenia numeryczne dla płyty modelu wykonano, przyjmując obciążenie temperaturą w dolnej części $\Delta T = 39,8^\circ\text{C}$, a w górnej $\Delta T = 37,4^\circ\text{C}$.

Tabela 2. Porównanie wartości ugięć dla płyty obliczone rachunkowo oraz pomierzone na modelu
Table 2. Comparison of displacement values for calculation and research plate

Ugięcia w punktach Numbers of displacement	Wartości wyliczone metodą różnic skończonych Values from finite differences method [mm]	Wartości pomierzone na modelu Values from model research [mm]
4	1,625	1,622
8	2,422	2,422
36	0,269	0,210
40	0,448	0,410

Zgodność wyników w punktach 4, 8 i 40 jest zadowalająca, co świadczy o dokładności zastosowanej metody obliczeniowej oraz o poprawnym przebiegu badań i wyznaczeniu stałych materiałowych dla szkła organicznego. Jedynie w punkcie 36 błąd pomiędzy pomiarem a wartością obliczeniową jest dość duży, sięgający 20%, dlatego zakłada się wykonanie kolejnych badań. W pracy Podhoreckiego i Przedpeńskiego [1982], dotyczącej obliczania prętów o zmiennych sztywnościach metodą różnic skończonych, autorzy porównywali przyjmowanie średnich sztywności na skoku grubości, jako średnią arytmetyczną i harmoniczną. Korzystając z ciekawych wniosków z powyższego artykułu założono kolejny etap badań, który obejmować będzie wykorzystanie średniej harmoniczej przy określaniu sztywności na skoku grubości płyty.

PODSUMOWANIE

Z analizy otrzymanych rozwiązań wynika, że dla płyt obciążonych temperaturą na styku krawędzi swobodnej oraz krawędzi zamocowanej występuje osobliwość polegająca na tym, że moment zamocowania w tym miejscu jest przeciwnego znaku niż w przekrojach położonych niżej (np. M_C i M_B – patrz rys. 2, 3, 4). W literaturze technicznej, u Płaskowskiego i Romana [1966], Kobiaka i Stachurskiego [1991] oraz PN-89/B-03262, często przy określaniu momentu zginającego wywołanego działaniem temperatury korzysta się ze wzoru:

$$M_t = \frac{Eh^2}{12} \alpha_t \Delta T \quad (11)$$

Wartości tak obliczonych momentów wynoszą:

– dla płyty o grubości w górnej części h_1

$$M_t = \frac{Eh_1^2}{12} \alpha_t \Delta T$$

– dla płyty o grubości w dolnej części $h_2 = 1,75 h_1$, co odpowiada współczynnikowi $\beta = 5,378$

$$M_t = \frac{Eh_1^2}{12} \alpha_t \Delta T = 3,063 \frac{Eh_1^2}{12} \alpha_t \Delta T$$

Po analizie rachunkowej oraz weryfikacji modelowej można stwierdzić, że temperatura może wywołać w ustrojach płytowych momenty zginające znacznie większe niż momenty od innych obciążeń zewnętrznych. W praktyce inżynierskiej ściany zbiorników prostokątnych zazwyczaj projektowane są jako płyty o stałej grubości. Lecz zgodnie z wykresami momentów zginających z powodzeniem można by stosować płyty o zmiennej grubości, większej w dolnej części płyty, a mniejszej w górnej. Zważywszy, że momenty zginające w ustrojach płytowych obciążonych temperaturą wzrastają wprost proporcjonalnie do kwadratu grubości płyty oraz biorąc pod uwagę fakt, że ściany zbiorników najczęściej obciążone są parciem hydrostatycznym, a więc w górnej części są znacznie mniej obciążone niż w dolnej, wskazane jest konstruowanie ścian zbiorników o zmiennej grubości, która powinna wzrastać wraz z głębokością zbiornika. W dolnej części ścian, przy zbiornikach częściowo obsypanych gruntem, wpływ temperatury jest niewielki, a występuje duże parcie cieczy. Aby móc stosować w praktyce takie rozwiązanie ścian zbiornika, należy mieć rozeznanie dotyczące pracy statycznej płyt o zmiennej grubości. Praca niniejsza stanowi przyczynek do poznania statyki takich płyt obciążonych równomiernie, hydrostatycznie oraz temperaturą.

PIŚMIENNICTWO

- Buczowski W., 1990. Wybrane zagadnienia statyki płyt obciążonych temperaturą. *Inżynieria i Budownictwo* 10, 375–378.
- Buczowski W., 1992. Momenty zginające w monolitycznych zbiornikach prostokątnych obciążonych temperaturą. *Inżynieria i Budownictwo* 5, 154–156.
- Buczowski W., 1993. Obciążenie temperaturą zbiorników prostokątnych zagłębionych w gruncie. *Inżynieria i Budownictwo* 12, 506–508.
- Buczowski W., Czajka S., Pawlak T., 2006. Analiza pracy statycznej zbiornika prostokątnego poddanego działaniu temperatury. *Acta Scientiarum Polonorum, Architectura* 5 (2), 17–29.
- Gołaś J., 1972: *Wstęp do teorii płyt*. Wydawnictwo Wyższej Szkoły Inżynierskiej w Opolu, Opole.
- Kączkowski Z., 2000. *Płyty. Obliczenia statyczne*. Arkady, Warszawa.

- Kobiak J., Stachurski W., 1991. Konstrukcje żelbetowe. Arkady, Warszawa.
- Mikołajczak H., Buczkowski W., 1998. Obliczenia statyczne płyt obciążonych temperaturą. Zeszyty Naukowe Politechniki Poznańskiej, Budownictwo Lądowe 4, 170–175.
- Nowacki W., 1960. Zagadnienia termosprężystości. PWN, Warszawa.
- Pląskowski Z., Roman M., 1966. Konstrukcje budowlane w oczyszczalniach ścieków. Arkady, Warszawa.
- PN-89/B-03262. Zbiorniki żelbetowe na materiały sypkie i kiszonki. Obliczenia statyczne i projektowanie.
- Podhorecki A., Przedpełski J., 1982. Niektóre problemy obliczania prętów o zmiennych sztywnościach metodą różnic skończonych. Archiwum Inżynierii Lądowej 1–2, 67–77.
- Thrun Z., 1954. Termiczne stany odkształcenia i naprężenia w cienkich płytach. Archiwum Mechaniki Stosowanej, 6, 4, 555–579.
- Thrun Z., 1957. O odkształceniach i naprężeniach termicznych w cienkich płytach prostokątnych i kołowych o zmiennej grubości. Rozprawy Inżynierskie LVII, 524–541.
- Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S., 1962. Teoria płyt i powłok. Arkady, Warszawa.

RECTANGLE PLATES WITH LEAP VARIABLE THICKNESS EXPANDING TEMPERATURE LOAD

Abstract. In this article analysis results of static work rectangle plates with leap variable thickness expanding temperature forces has been presented. Temperature is one this loads, which very often is not consider in calculations. And this lead to design mistakes and big exploitations problems. To research used numeral solutions – variational method finite differences. In this way obtained solutions was checked by model verification.

Key words: finite differences method, plate, tank, plastic glass

Zaakceptowano do druku – Accepted for print: 4.12.2007