

DRGANIA WŁASNE PŁYTY PERIODYCZNIE ZBROJONEJ W DWÓCH KIERUNKACH

Katarzyna Jeleniewicz

Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie

Streszczenie. Przedmiotem pracy są płyty sprężyste, okresowo wzmocnione prętami w dwu kierunkach. Dla takich ciał za pomocą metody parametrów mikrolokalnych stworzono model uśredniony, charakteryzujący się równaniami o stałych, ciągłych współczynnikach. Stworzony model został wykorzystany w analizie zagadnień dynamicznych płyt. W pracy opisano wpływ wzmocnień na wielkość ugięcia oraz postać drgań własnych badanej płyty.

Słowa kluczowe: ośrodki okresowe, homogenizacja nieasymptotyczna, drgania płyt zbrojonych

WSTĘP

Rozważane w pracy ciała materialne są płytami niejednorodnymi. Płyty są trójwymiarowymi obiektami materialnymi i w przypadku gdy są sprężyste, mogą być opisane i badane na gruncie teorii sprężystości. Rozwiązywanie zagadnień początkowo-brzegowych w ramach tej teorii jest jednak na ogół skomplikowane i dlatego poszukuje się teorii prostszych, w przypadku płyt – teorii dwuwymiarowych, zwanych też powierzchniowymi [Nagórko 1989].

W pracy, stosując metodę parametrów mikrolokalnych, stworzono pewien model alternatywny. Model ten skonstruowano tak, by w równaniach modelowych nie występowały współczynniki nieciągłe, lecz współczynniki stałe. Następnie przeprowadzono analizę wpływu nasycenia płyty zbrojeniem na wielkość ugięcia oraz postać drgań własnych rozpatrywanej płyty.

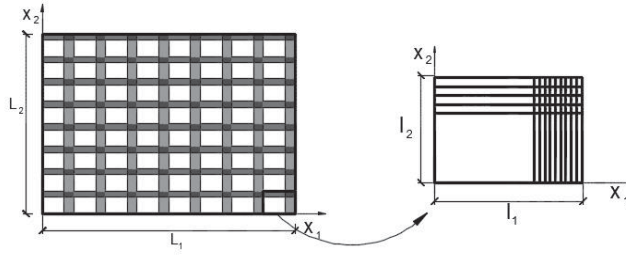
Adres do korespondencji: Katarzyna Jeleniewicz, Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego, Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska, Katedra Inżynierii Budowlanej, ul. Nowoursynowska 159, 02-787 Warszawa, e-mail: katarzynajeleniewicz@gmail.com

© Copyright by Wydawnictwo SGGW, Warszawa 2015

PROCEDURA MODELOWANIA PŁYT

Niech konfiguracją odniesienia rozpatrywanej płyty będzie obszar $\Omega = \Pi \times \left(-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right)$, gdzie $h > 0$ oraz $\Pi = (0, L_1) \times (0, L_2) \subset R^2$. Będziemy zakładać, że $h \ll \min(L_1, L_2)$. Układ współrzędnych kartezjańskich przyjmujemy tak, że: $x_\alpha \in \Pi$, $\alpha = 1, 2$, $x_3 \in \left(-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right)$.

Założymy, że płyta jest niejednorodna periodycznie oraz że element powtarzającym się – komórką periodyczności – jest prostokąt o wymiarach l_1, l_2 , który oznaczymy przez Δ (rys. 1).



Rys. 1. Płyta periodycznie wzmocniona prętami w dwóch kierunkach
Fig. 1. The plate reinforced periodically in two directions

Przyjmujemy, że każda komórka periodyczności Δ składać się będzie z czterech elementów Δ_{ab} , $a, b = 1, 2$.

Modelowanie rozważanych płyt przebiegać będzie w dwóch etapach. W pierwszym etapie dokonamy uśrednienia gęstości masy i modułów sztywności płyty w każdym elemencie Δ_{ab} , $a, b = 1, 2$, tak że otrzymane nowe funkcje określone są następująco:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho(x_1, x_2) \Big|_{(x_1, x_2) \in \Delta_{ab}} = \rho^{ab} \\ B_{\alpha\beta\gamma\delta} &= B_{\alpha\beta\gamma\delta}(x_1, x_2) \Big|_{(x_1, x_2) \in \Delta_{ab}} = B_{\alpha\beta\gamma\delta}^{ab} \end{aligned} \quad (1)$$

Po tym zabiegu przyjmujemy, że każdy element Δ_{ab} komórki periodyczności jest jednorodny.

W drugim etapie konstrukcji modelu rozpatrywanych płyt zastosujemy metodę parametrów mikrolokalnych.

Zdefiniujemy moduły sztywności:

$$B_{\alpha\beta\gamma\delta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(C_{\alpha\beta\gamma\delta} - \frac{C_{\alpha\beta 33} C_{\gamma\delta 33}}{C_{3333}} \right) x_3^2 dx_3 \quad (2)$$

gdzie: $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$, $C_{\alpha\beta 33}$, C_{3333} , $\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2$ są funkcjami materiałowymi.

Przyjmujemy dla Δ_{ab} , $a, b = 1, 2$:

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta}^{ab} \equiv C_{\alpha\beta\gamma\delta} \Big|_{(x_1, x_2) \in \Delta_{ab}}, \quad C_{\alpha\beta 33}^{ab} \equiv C_{\alpha\beta 33} \Big|_{(x_1, x_2) \in \Delta_{ab}}, \quad C_{3333}^{ab} \equiv C_{3333} \Big|_{(x_1, x_2) \in \Delta_{ab}}$$

Wtedy moduły sztywności (2) w elemencie Δ_{ab} przyjmują postać:

$$B_{\alpha\beta\gamma\delta}^{ab} = \frac{h^3}{12} \left(C_{\alpha\beta\gamma\delta}^{ab} - \frac{C_{\alpha\beta 33}^{ab} C_{\gamma\delta 33}^{ab}}{C_{3333}^{ab}} \right) \quad (3)$$

We wzorze (3) nie ma sumowania po a, b .

Niech $w = w(x_1, x_2, t)$, $(x_1, x_2) \in \Pi$, $t \in \langle t_0, t_1 \rangle$ będzie ugięciem płyty, które zgodnie z metodą wyrazimy przez [Woźniak 1983, Woźniak i Wierzbicki 2000, Woźniak i in. red. 2008]:

$$w(x_1, x_2, t) = u(x_1, x_2, t) + h^A(x_1, x_2)v^A(x_1, x_2, t), \quad A = 1, 2, 3, \dots, N \quad (4)$$

gdzie: u oraz v^A są funkcjami poszukiwanymi i interpretujemy je odpowiednio jako przemieszczenia uśrednione oraz amplitudy fluktuacji, funkcje h^A są znanymi, periodycznymi i oscylującymi względem x_1, x_2 funkcjami kształtu. O funkcjach kształtu założymy, że są bezwymiarowe i przyjmują wartości rzędu wymiaru komórki.

Zdefiniujemy funkcjonal:

$$L = \frac{\tau^2}{2} \rho (\ddot{w})^2 - \frac{1}{2} B_{\alpha\beta\gamma\delta} w_{,\alpha\beta} w_{,\gamma\delta} - pw \quad (5)$$

gdzie p jest obciążeniem zewnętrznym płyty, a τ jest parametrem.

Podstawiając do funkcjonału (5) dekompozycję ugięcia płyty (4) oraz stosując metodę parametrów mikrolokalnych, otrzymamy następującą postać uśrednioną [Woźniak 1987]:

$$\begin{aligned} \langle L \rangle = & \frac{1}{2} [-\langle \rho \rangle \tau^2 (\ddot{u})^2 - \langle B_{\alpha\beta\gamma\delta} \rangle u_{,\alpha\beta} u_{,\gamma\delta} - 2 \langle B_{\alpha\beta\gamma\delta} h_{,\gamma\delta}^A \rangle u_{,\alpha\beta} v^A + \\ & - \langle B_{\alpha\beta\gamma\delta} h_{,\alpha\beta}^A h_{,\gamma\delta}^B \rangle v^A v^B] + \langle p \rangle u \end{aligned} \quad (6)$$

gdzie: $\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2$, $A = 1, 2, 3, \dots, N$.

Wprowadźmy oznaczenia:

$$\begin{aligned} \eta_{1a} = \frac{l_{1a}}{l_1}, \quad \eta_{2b} = \frac{l_{2b}}{l_2}, \quad \eta^{ab} = \eta_{1a} \eta_{2b}, \quad \eta_{\alpha\beta}^{abA} = \frac{1}{l_1 l_2} \iint_{\Delta_{ab}} h_{,\alpha\beta}^A d\Delta \\ \eta^{abAB} = \frac{1}{l_1 l_2} \iint_{\Delta_{ab}} h^A h^B d\Delta, \quad \eta_{\alpha\beta\gamma\delta}^{abAB} = \frac{1}{l_1 l_2} \iint_{\Delta_{ab}} h_{,\alpha\beta}^A h_{,\gamma\delta}^B d\Delta \end{aligned} \quad (7)$$

oraz

$$\begin{aligned}
 \langle \rho \rangle &= \eta^{ab} \rho^{ab} \equiv \rho_0, \quad \langle \rho h^A h^B \rangle = \eta^{abAB} \rho^{ab} \equiv \rho_0^{AB} \\
 \langle B_{\alpha\beta\gamma\delta} \rangle &= \eta^{ab} B_{\alpha\beta\gamma\delta}^{ab} \equiv \mathbf{E}_{\alpha\beta\gamma\delta}, \quad \langle B_{\alpha\beta\gamma\delta} h_{,\gamma\delta}^A \rangle = \eta_{\gamma\delta}^{abA} B_{\alpha\beta\gamma\delta}^{ab} \equiv \mathbf{E}_{\alpha\beta}^A \\
 \langle B_{\alpha\beta\gamma\delta} h_{,\alpha\beta}^A h_{,\gamma\delta}^B \rangle &= \eta_{\alpha\beta\gamma\delta}^{abAB} B_{\alpha\beta\gamma\delta}^{ab} \equiv \mathbf{E}^{AB}, \quad \langle B_{\alpha\beta\gamma\delta} h^A h^B \rangle = \eta^{abAB} B_{\alpha\beta\gamma\delta}^{ab} \equiv \mathbf{E}_{\alpha\beta\gamma\delta}^{AB}
 \end{aligned} \tag{8}$$

Równania opisujące dynamikę rozpatrywanej płyty przyjmą postać:

$$\begin{aligned}
 -\rho_0 \ddot{u} - \mathbf{E}_{\alpha\beta\gamma\delta} u_{,\alpha\beta\gamma\delta} - \mathbf{E}_{\alpha\beta}^A v_{,\alpha\beta}^A &= p \\
 \mathbf{E}_{\alpha\beta}^A u_{,\alpha\beta} + \mathbf{E}^{AB} v^B &= 0
 \end{aligned} \tag{9}$$

Niech macierz \mathbf{E}^{AB} będzie macierzą nieosobliwą, wtedy z równania (9)₂ można wyznaczyć fluktuację v^A :

$$v^A = -(\mathbf{E}^{AB})^{-1} \mathbf{E}_{\alpha\beta}^B u_{,\alpha\beta} \tag{10}$$

gdzie $(\mathbf{E}^{AB})^{-1}$ jest macierzą odwrotną do \mathbf{E}^{AB} , $A, B = 1, 2, \dots, N$, $\alpha, \beta = 1, 2$.

Podstawiając równanie (10) do równania (9)₁, otrzymamy:

$$-\rho_0 \ddot{u} - \mathbf{E}_{\alpha\beta\gamma\delta}^0 u_{,\alpha\beta\gamma\delta} = p \tag{11}$$

gdzie

$$\mathbf{E}_{\alpha\beta\gamma\delta}^0 = \mathbf{E}_{\alpha\beta\gamma\delta} - \mathbf{E}_{\alpha\beta}^A (\mathbf{E}^{AB})^{-1} \mathbf{E}_{\gamma\delta}^B \tag{12}$$

Wielkości zdefiniowane równościami (12) są efektywnymi modułami sztywności otrzymanymi w wyniku uśredniania mikrolokalnego.

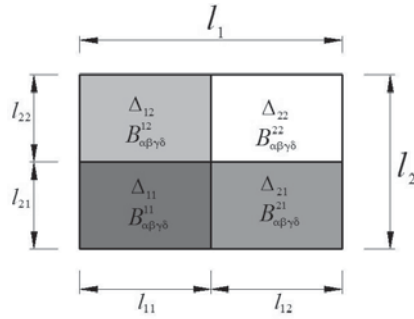
Równanie (11) ma postać analogiczną do znanego równania na ugięcie płyty, z tym że występują w nim nie moduły sztywności $B_{\alpha\beta\gamma\delta}$ (które są funkcjami), lecz efektywne moduły sztywności, które są w wyniku uśredniania stałe [Woźniak red. 2001, Woźniak i in. red. 2010].

W przypadku ciała izotropowego moduły sztywności (2) przyjmą następującą postać:

$$B_{\alpha\beta\gamma\delta}^{ab} = \frac{h^3}{12} \left(\lambda^{ab} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} + \mu^{ab} (\delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} + \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta}) - \frac{(\lambda^{ab})^2 \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta}}{\lambda^{ab} + 2\mu^{ab}} \right)$$

MODELOWANIE I ANALIZA PRZYPADKU SZCZEGÓLNEGO

Rozpatrzmy przypadek płyty periodycznej, której komórką periodyczności jest czteroskładnikowy prostokąt o wymiarach $l_{11} = \frac{l_1}{2}$ oraz $l_{21} = \frac{l_2}{2}$ (rys. 2).



Rys. 2. Komórka periodyczności płyty biperiodycznej
 Fig. 2. The basic cell of the bi-periodic plate

Dekompozycję ugięcia (4) przyjmujemy w postaci:

$$w(x_1, x_2, t) = u(x_1, x_2, t) + h^1(x_1)v^1(x_1, x_2) + h^2(x_2)v^2(x_1, x_2) \tag{13}$$

gdzie funkcja kształtu h^1 :

$$h^1(x_1) = \begin{cases} c_1 x_1 (2x_1 - l_1), & x_1 \in \left(0, \frac{l_1}{2}\right) \\ -c_1 (2x_1 - l_1)(x_1 - l_1), & x_1 \in \left(\frac{l_1}{2}, l_1\right) \end{cases} \tag{14}$$

Funkcję $h^2 = h^2(x_2)$ definiujemy analogicznie do $h^1 = h^1(x_1)$, zastępując x_1 przez x_2 , l_1 przez l_2 oraz c_1 przez \bar{c}_1 . Stałe c_1 i \bar{c}_1 są rzędu l_1^2 i l_2^2 . Funkcje h^A , $A = 1, 2$ są bezwymiarowe, periodyczne i oscylujące.

Wielkości określone wzorami (8) są równe:

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \frac{1}{4} \sum_{a,b} \rho^{ab}, \quad \mathbf{E}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{4} \sum_{a,b} B_{\alpha\beta\gamma\delta}^{ab} \\ \mathbf{E}_{11}^1 &= c_1 \sum_b (B_{1111}^{1b} - B_{1111}^{2b}), \quad \mathbf{E}_{22}^1 = c_1 \sum_b (B_{2211}^{1b} - B_{2211}^{2b}) \\ \mathbf{E}_{11}^2 &= \bar{c}_1 \sum_b (B_{1122}^{1b} - B_{1122}^{2b}), \quad \mathbf{E}_{22}^2 = \bar{c}_1 \sum_b (B_{2222}^{1b} - B_{2222}^{2b}) \\ \mathbf{E}^{11} &= 4c_1^2 \sum_{a,b} B_{1111}^{ab}, \quad \mathbf{E}^{22} = 4\bar{c}_1^2 \sum_{a,b} B_{2222}^{ab} \\ \mathbf{E}^{12} &= 4c_1\bar{c}_1 \sum_{a,b} B_{1122}^{ab}, \quad \mathbf{E}^{21} = 4\bar{c}_1c_1 \sum_{a,b} B_{2211}^{ab} \end{aligned} \tag{15}$$

Podstawiając wielkości (15) do (9), otrzymamy równania opisujące dynamikę płyty:

$$\begin{aligned} -\rho_0 \ddot{u} - \mathbf{E}_{\alpha\beta\gamma\delta} u_{,\alpha\beta\gamma\delta} - \mathbf{E}_{\alpha\beta}^1 v_{1,\alpha\beta} - \mathbf{E}_{\alpha\beta}^2 v_{2,\alpha\beta} &= p \\ \mathbf{E}_{\alpha\beta}^1 u_{,\alpha\beta} + \mathbf{E}^{11} v_1 + \mathbf{E}^{12} v_2 &= 0 \\ \mathbf{E}_{\alpha\beta}^2 u_{,\alpha\beta} + \mathbf{E}^{21} v_1 + \mathbf{E}^{22} v_2 &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Z równań (16)₂ oraz (16)₃ można wyznaczyć fluktuacje v_1 i v_2 , które po podstawieniu do równania (16)₁ dadzą nam postać tego równania:

$$-\rho_0 \ddot{u} - \mathbf{E}_{\alpha\beta\gamma\delta}^0 u_{,\alpha\beta\gamma\delta} = p \quad (17)$$

gdzie:

$$\mathbf{E}_{\alpha\beta\gamma\delta}^0 = \mathbf{E}_{\alpha\beta\gamma\delta} + \frac{\mathbf{E}_{\alpha\beta}^1 \mathbf{E}_{\gamma\delta}^1 \mathbf{E}^{22} + \mathbf{E}_{\alpha\beta}^2 \mathbf{E}_{\gamma\delta}^2 \mathbf{E}^{11} - \mathbf{E}_{\alpha\beta}^1 \mathbf{E}_{\gamma\delta}^2 \mathbf{E}^{12} - \mathbf{E}_{\alpha\beta}^2 \mathbf{E}_{\gamma\delta}^1 \mathbf{E}^{21}}{\mathbf{E}^{21} \mathbf{E}^{12} - \mathbf{E}^{22} \mathbf{E}^{11}} \quad (18)$$

Wyrażenie (18) definiuje stałe, efektywne moduły sztywności otrzymane w wyniku zastosowania metody parametrów mikrolokalnych.

Warunki brzegowe przyjmujemy w następującej postaci:

$$u = 0 \text{ oraz } \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = 0 \text{ przy } x_1 = 0 \text{ i } x_1 = L_1 \quad (19)$$

$$u = 0 \text{ oraz } \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0 \text{ przy } x_2 = 0 \text{ i } x_2 = L_2$$

natomiast warunki początkowe przyjęto za Kaliski red. [1966]:

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2, 0) = u_0(x_1, x_2) &= c_0 \left(1 - \cos \frac{2\pi}{L_1} x_1\right) \left(1 - \cos \frac{2\pi}{L_2} x_2\right) \\ \dot{u}(x_1, x_2, t) \Big|_{t=0} &= v_0(x_1, x_2) = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

gdzie: przez c_0 oznaczono początkową, dostatecznie małą wartość ugięcia w środku płyty, natomiast przez v_0 oznaczono prędkość przemieszczania się powierzchni środkowej płyty w chwili $t = 0$.

Równania (17) rozwiążemy, stosując metodę Naviera. Wartości własne wyrażają się wzorem:

$$\omega_{mn}^2 = \frac{1}{\rho^0} \left(\mathbf{E}_{1111}^0 \left(\frac{m\pi}{L_1} \right)^4 \mathbf{E}^0 \left(\frac{m\pi}{L_1} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{L_2} \right)^2 + \mathbf{E}_{2222}^0 \left(\frac{n\pi}{L_2} \right)^4 \right) \quad (21)$$

gdzie współczynniki $\mathbf{E}_{\alpha\beta\gamma\delta}^0$ obliczamy zgodnie z równaniem (18) oraz $\mathbf{E}^0 = 4\mathbf{E}_{1212}^0 + 2\mathbf{E}_{1122}^0$.

Rozwiązanie opisujące uśrednione ugięcie analizowanej płyty w czasie przyjmuje postać:

$$u(x_1, x_2, t) = -\frac{64\bar{c}_0}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(\omega_{mn}t)}{mn(4-m^2)(4-n^2)} U_{mn} \quad (22)$$

gdzie: $\bar{c}_0 = 4c_0$, $m = 2k - 1$, $n = 2j - 1$, $k = 1, 2, 3, \dots$, $j = 1, 2, 3, \dots$.

Natomiast wyrażenie na ugięcie analizowanej płyty w czasie można zapisać w postaci:

$$w(x_1, x_2, t) = -\frac{64\bar{c}_0}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(\omega_{mn}t)}{mn(4-m^2)(4-n^2)} (U_{mn} + \frac{\mathbf{E}_{\alpha\beta}^1 \mathbf{E}^{22} - \mathbf{E}^{12} \mathbf{E}_{\alpha\beta}^2}{\mathbf{E}^{21} \mathbf{E}^{12} - \mathbf{E}^{22} \mathbf{E}^{11}} U_{mn, \alpha\beta} \cdot h^1(x_1) + \frac{\mathbf{E}^{11} \mathbf{E}_{\alpha\beta}^2 - \mathbf{E}_{\alpha\beta}^1 \mathbf{E}^{21}}{\mathbf{E}^{21} \mathbf{E}^{12} - \mathbf{E}^{22} \mathbf{E}^{11}} U_{mn, \alpha\beta} \cdot h^2(x_2)) \quad (23)$$

Zbadamy teraz zależność pomiędzy nasyceniem komórki periodyczności zbrojeniem a wartością ugięcia płyty oraz postacią drgań własnych badanej płyty. Nasycenie wyraża udział objętości zbrojenia w objętości wzmocnionego elementu komórki periodyczności Δ_{ab} .

Dla matrycy oraz zbrojenia przyjęto następujące wartości modułów Younga, liczby Poissona oraz gęstości masy:

Matryca: $E_3 = 3,24 \cdot 10^9$ Pa, $\nu_3 = 0,36$, $\rho_3 = 1120$ kg·m⁻³

Zbrojenie: $E_4 = 66,5 \cdot 10^9$ Pa, $\nu_4 = 0,23$, $\rho_4 = 2550$ kg·m⁻³

Analizę sporządzono przy założeniu trzech wartości nasycenia 0,9, 0,6 oraz 0,4 (tab. 1).

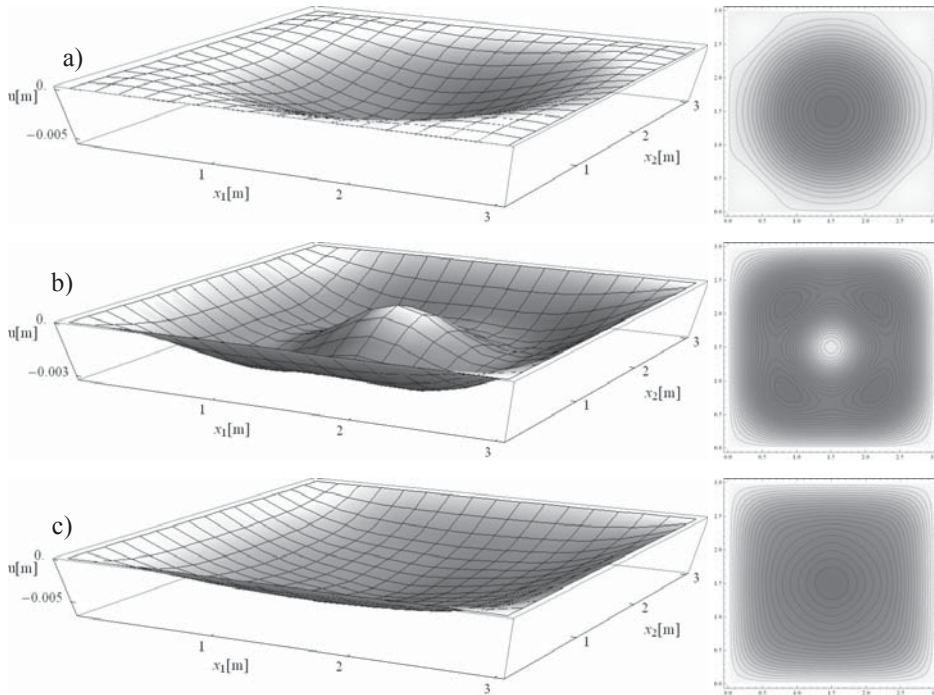
Tabela 1. Zestawienie uśrednionych wartości stałych materiałowych płyty

Table 1. Summary of average values of plate's material constants

Nasycenie Saturation	Parametry Parameters	Δ_{11}	Δ_{12}	Δ_{21}	Δ_{22}
0,9	E [GPa]	3,24	31,707	31,707	60,174
	ν [-]	0,36	0,3015	0,3015	0,243
	ρ [kg·m ⁻³]	1120	1763,5	1763,5	2407
0,6	E [GPa]	3,24	22,218	22,218	41,196
	ν [-]	0,36	0,321	0,321	0,282
	ρ [kg·m ⁻³]	1120	1549	1549	1978
0,4	E [GPa]	3,24	15,892	15,892	28,544
	ν [-]	0,36	0,334	0,334	0,308
	ρ [kg·m ⁻³]	1120	1406	1406	1692

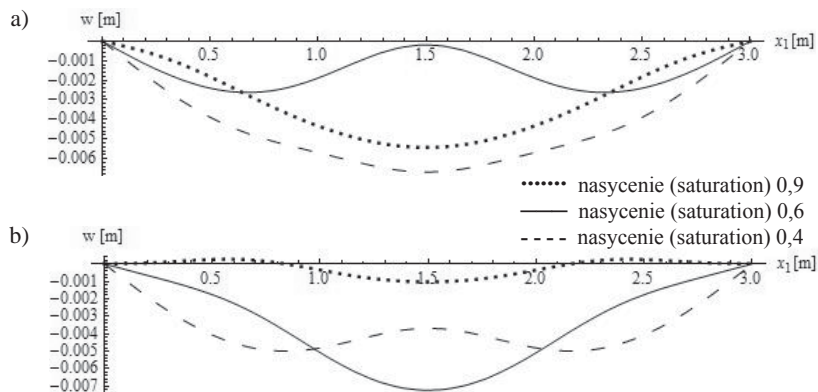
Przyjęto, że wymiary płyty mają następujące wartości $L_1 = 3$ m, $L_2 = 3$ m, $h = 0,1$ m, $l_1 = l_2 = 0,1$ m.

Na rysunku 3 przedstawiono ugięcie uśrednione płyty w chwili $t = 1$ s dla każdego nasycenia. Na rysunku 4 przedstawiono przekroje przez wykres ugięcia w chwili $t = 1$ s oraz $t = 5$ s dla $x_2 = \frac{L_2}{2}$.



Rys. 3. Ugięcie uśrednione płyty w chwili $t = 1$ s przy założeniu: a – nasycenia 0,9, b – nasycenia 0,6, c – nasycenia 0,4

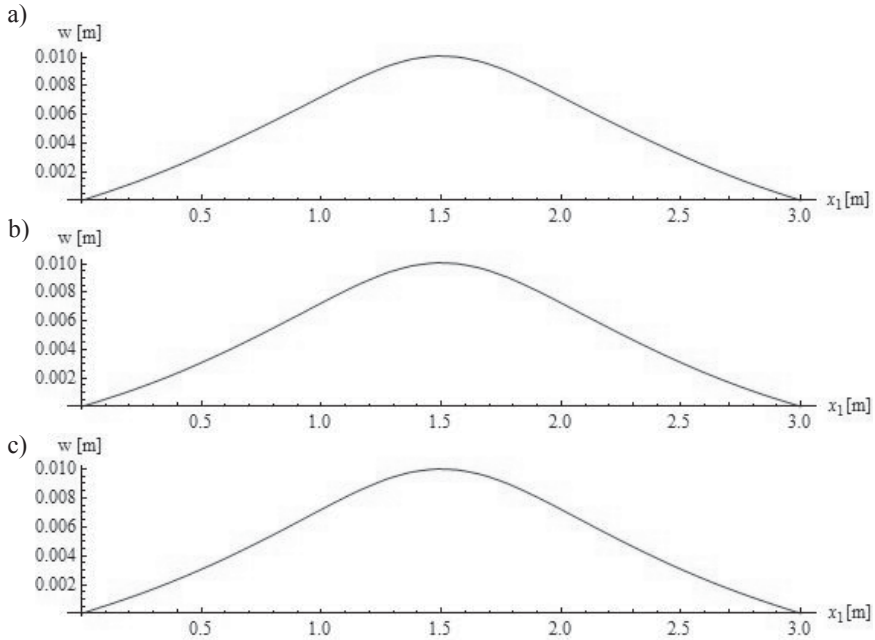
Fig. 3. The averaged plate's deflection at $t = 1$ s assuming: a – saturation 0,9, b – saturation 0,6 c – saturation 0,4



Rys. 4. Przekrój przez ugięcie płyty w chwili: a – $t = 1$, b – $t = 5$

Fig. 4.. The cross-section through the plate's deflection at: a – $t = 1$, b – $t = 5$

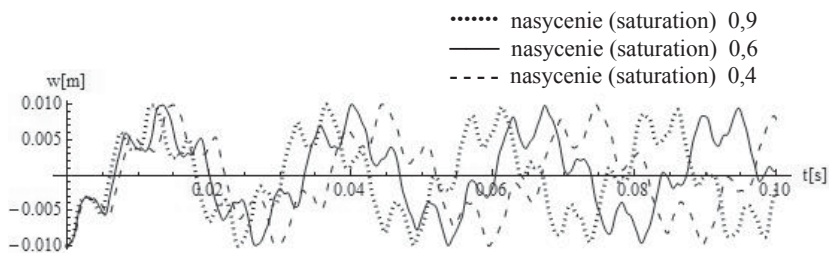
Rysunek 5 przedstawia przekrój poprzeczny przez postać drgań własnych płyty w chwili maksymalnego ugięcia. Chwile te, ze względu na różne wartości częstotliwości drgań płyty, są inne dla każdej wartości nasycenia.



Rys. 5. Ugięcie maksymalne płyty: a – nasycenie 0,9, $t = 0,036$ s, b – nasycenie 0,6, $t = 0,04$ s, c – nasycenie 0,4, $t = 0,044$ s

Fig. 5. The plate's deflection: a – saturation 0,9, $t = 0,036$ s, b – saturation 0,6, $t = 0,04$ s, c – saturation 0,4, $t = 0,044$ s

Przesunięcie punktu środkowego płyty – punktu o współrzędnych $(x_1, x_2) = \left(\frac{L_1}{2}, \frac{L_2}{2}\right)$ – dla różnych wartości nasycień przedstawia rysunek 6.



Rys. 6. Przesunięcie punktu środkowego płyty przy różnej wartości nasycenia

Fig. 6. The displacement of the plate's center point at differential saturation value

PODSUMOWANIE

Praca poświęcona jest płytom sprężystym, periodycznie niejednorodnym w dwóch kierunkach. Dla takich płyt przy zastosowaniu metody parametrów mikrolokalnych wprowadzony został model uśredniony, w którym rozwiązania zagadnień początkowo-brzegowych uzyskujemy w sposób prostszy niż w klasycznej teorii sprężystości.

Z równań modelowych, które posiadają stałe współczynniki, wyliczone zastały niewiadome – przemieszczenie uśrednione oraz amplitudy fluktuacji. Niewiadome te, zgodnie z równaniem (4), dają nam ugięcie płyty.

Wykonany przykład zależności częstości i postaci drgań własnych od nasycenia komórki periodyczności zbrojeniem wykazał, że wraz ze wzrostem sztywności elementu rośnie wartość częstotliwości drgań własnych, co zostało przedstawione na rysunku 6. Postać drgań własnych w określonej chwili, dla różnych wartości nasycenia jest różna.

PIŚMIENNICTWO

- Kaliski, S., red. (1966). Drgania i fale w ciałach stałych. PWN, Warszawa.
- Nagórko, W. (1989). Modele powierzchniowe i mikrolokalne płyt sprężystych. UW, Warszawa.
- Woźniak, Cz. (1983). Tolerance and fuzziness in problems of mechanics. *Archive of Applied Mechanics*, 35, 567–578.
- Woźniak, Cz. (1987). A nonstandard method of modelling of thermoelastic periodic composite, *Int. J. Engng Sci.*, 25, 489–498.
- Woźniak, Cz., Wierzbicki, E. (2000). Averaging techniques in thermomechanics of composite solids. Tolerance averaging versus homogenization. Wydawnictwo Politechniki Częstochowskiej, Częstochowa.
- Woźniak, Cz., red. (2001). *Mechanika sprężystych płyt i powłok*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Woźniak, Cz., Michalak, B., Jędrzyak, J., red. (2008). *Thermomechanics of microheterogeneous solids and structures, Tolerance averaging approach*. Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź.
- Woźniak, Cz. et al., ed. (2010). *Mathematical modelling and analysis in continuum mechanics of microstructured media*. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice.

FREE VIBRATION OF A PERIODICALLY REINFORCED PLATE IN TWO DIRECTIONS

Abstract. The object of the paper are elastic plates, periodically reinforced in two directions. For that kind of bodies, averaging models were constructed with the use of homogenization with micro-local parameters, characterized by equals with constant coefficients. This model was used in the analysis of dynamic problems of reinforced plates. In my paper the effect of reinforcement of the material on the displacement and the involuntary vibration level of that structures is presented.

Key words: periodic media, non-asymptotic homogenization, vibrations of reinforced plate

Zaakceptowano do druku – Accepted for print: 28.04.2015

Cytowanie: Jeleniewicz, K. (2015). Drgania własne płyty periodycznie zbrojonej w dwóch kierunkach. *Acta Sci. Pol., Architectura*, 14 (1), 3–13.