

ZASIĘG EFEKTU WARSTWY BRZEGOWEJ W KOMPOZYTACH WARSTWOWYCH DLA ZAGADNIEŃ ELASTOSTATYKI

Joanna Witkowska-Dobrev, Monika Wągrowska

Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie

Streszczenie. Rozpatrzono zagadnienie efektu warstwy brzegowej w wielowarstwowej przegrodzie budowlanej o podłużnej i poprzecznej gradacji własności dla zagadnienia stacjonarnego. Rozważania ograniczono do jednowymiarowego zagadnienia w ramach wariantu asymptotycznego modelowania tolerancyjnego – homogenizacji lokalnej. Zbadano różnicę względną pomiędzy rozwiązaniem otrzymanym metodą wariantu asymptotycznego modelowania tolerancyjnego – homogenizacji lokalnej oraz z uwzględnieniem efektu warstwy brzegowej dla danego typu gradacji.

Słowa kluczowe: podłużna gradacja własności, poprzeczna gradacja własności, asymptotyczny wariant modelowania tolerancyjnego – homogenizacja lokalna, wyznaczenie efektu warstwy brzegowej, różnica względna

WSTĘP

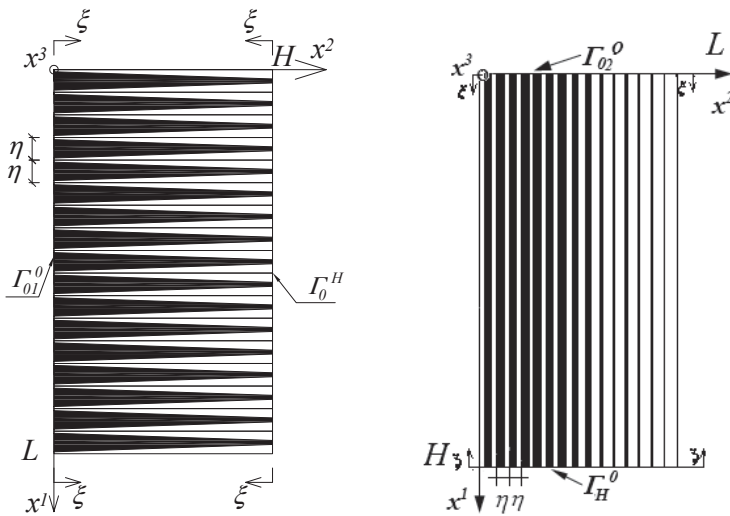
W przypadku struktur wielowarstwowych bezpośrednie rozwiązanie równań równowagi jest niemożliwe, ponieważ równania te posiadają nieciągłe, silnie oscylujące współczynniki. W celu wyznaczenia rozwiązania stosuje się różne podejścia, np. wprowadza się dodatkowe założenia dotyczące poszukiwanego pola przemieszczenia, umożliwiające przekształcenie równań do postaci, dla których można znaleźć rozwiązania analityczne. Jedną z metod jest wariant asymptotyczny modelowania tolerancyjnego – homogenizacja lokalna [Wierzbicki i in. 2005, Rychlewska i Woźniak 2006, Woźniak i in. 2008, 2010].

Rozpatrzono dwuskładnikowe kompozyty wielowarstwowe o strukturze deterministycznej typu FGM (Functionally Graded Materials), czyli materiały z funkcyjną gradacją własności. Szczególny nacisk położony będzie na kompozyty charakteryzujące się

Adres do korespondencji – Corresponding author: Joanna Witkowska-Dobrev, Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego, Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska, Katedra Inżynierii Budowlanej, ul. Nowoursynowska 159, 02-776 Warszawa, e-mail: joanna_witkowska@sggw.pl

© Copyright by Wydawnictwo SGGW, Warszawa 2015

poprzeczną i podłużną gradacją własności (rys. 1). Zbadano różnicę względną pomiędzy rozwiązaniem otrzymanym metodą homogenizacji lokalnej oraz z uwzględnieniem efektu warstwy brzegowej dla danego typu gradacji, w zależności od nasycenia składnikami w komórce na brzegach przecinających uwarstwienie oraz w pewnej odległości od tych brzegów.



Rys. 1. Schemat kompozytów o gradacji podłużnej i poprzecznej
Fig. 1. Scheme of composite with longitudinal and transverse gradation

WARIANT ASYMPTOTYCZNY MODELOWANIA TOLERANCYJNEGO – HOMOGENIZACJA LOKALNA

Przyjęto, że w trójwymiarowej konfiguracji odniesienia w kartezjańskim układzie współrzędnych kompozyt zajmuje obszar $\Omega = \Xi \times R$, gdzie $\Xi \subset R^2$. Każda z warstw kompozytu ma stałą grubość η , $\eta \ll L, \max(L, H)$, i składa się z dwóch izotropowych, jednorodnych składników, noszących nazwę matrycy oraz wzmocnienia. Funkcja $v^R(\cdot)$, $v^R(x^2) \in [0, 1]$, $x^2 \in [0, H]$, $v^R \in C^1([0, H])$, jest funkcją opisującą średnią frakcję wzmocnienia w warstwie, natomiast $v^M(\cdot)$ opisuje średnią frakcję matrycy dla gradacji podłużnej w warstwie: $v^M(x^2) = 1 - v^R(x^2)$, $x^2 \in [0, H]$, a dla gradacji poprzecznej $x^2 \in [0, L]$.

Dla zagadnienia dwuwymiarowego przemieszczenia kompozytów oznaczono przez $w = (w_1, w_2)$.

W ramach modelu wariantu asymptotycznego modelowania tolerancyjnego – homogenizacji lokalnej [Woźniak i in. 2008, 2010] nieznanne pole przemieszczeń przybliżono poprzez:

– dla gradacji podłużnej

$$\tilde{w}_1(\mathbf{x}) = u_1(\mathbf{x}) + h(x^1, x^2) v_1(\mathbf{x})$$

$$\tilde{w}_2(\mathbf{x}) = u_2(\mathbf{x}) + h(x^1, x^2) v_2(\mathbf{x})$$

– dla gradacji poprzecznej

(1)

$$\tilde{w}_1(\mathbf{x}) = u_1(\mathbf{x}) + h(x^2) v_1(\mathbf{x})$$

$$\tilde{w}_2(\mathbf{x}) = u_2(\mathbf{x}) + h(x^2) v_2(\mathbf{x})$$

gdzie: $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{x} \in (\bar{\Xi})$, funkcje $u_1(\cdot)$, $u_2(\cdot)$, $v_1(\cdot)$, $v_2(\cdot) \in C^1(\bar{\Xi})$ są nowymi niewiadomymi, $u_1(\cdot)$, $u_2(\cdot)$ to przemieszczenia uśrednione, a $v_1(\cdot)$, $v_2(\cdot)$ są fluktuacjami przemieszczeń.

Funkcja $h(\cdot) \in C^0(\bar{\Xi})$ jest zadaną z góry funkcją kształtu. Dla gradacji podłużnej określona jest dla $(x^1, x^2) \in (0, L) \times (0, H)$. Jest to funkcja kawałkami liniowa, na interfejsach przyjmuje wartości $\pm \frac{\eta}{2}$. Dla gradacji poprzecznej określona jest dla każdego $x^2 \in (0, L)$ [Woźniak i in. 2008, 2010].

W wyniku procesu modelowania homogenizacji lokalnej [Woźniak i in. 2008, 2010, Wągrowka i Witkowska-Dobrev 2011, 2012, Witkowska-Dobrev 2014] dla zagadnienia dwuwymiarowego otrzymano następujący układ równań na poszukiwane funkcje $u_1(\cdot)$, $u_2(\cdot)$, $v_1(\cdot)$, $v_2(\cdot)$:

$$(2\mu + \lambda) u_{1,11} + ((\mu_0 + \tilde{\lambda}) u_{2,1})_{,2} + (\mu_0 u_{1,2})_{,2} = 0$$

$$((\mu_0 + \lambda) u_{1,1})_{,2} + \mu_0 u_{2,11} + ((2\mu + \lambda) u_{2,2})_{,2} = 0$$

– dla gradacji podłużnej

$$v_1 = - \left(\frac{v^R v^M}{(\lambda_R + 2\mu_R) v^M + (\lambda_M + 2\mu_M) v^R} \right)$$

$$\left[((2\mu_R + \lambda_R) - (2\mu_M + \lambda_M)) u_{1,1} + (\lambda_R + \lambda_M) u_{2,2} \right] \quad (2)$$

$$v_2 = - \left(\frac{v^R v^M}{v^R \mu_M + v^M \mu_R} \right) \left[((\mu_R - \mu_M) u_{1,2}) + (\mu_R - \mu_M) u_{2,1} \right]$$

– dla gradacji poprzecznej

$$v_1 = 0$$

$$v_2 = \left(\frac{v^R v^M}{(2v^M \mu_R + 2v^R \mu_M) + (\lambda_R v^M + \lambda_M v^R)} \right) \left[((2\mu_R - 2\mu_M)u_{2,2}) + (\lambda_R - \lambda_M)u_{2,2} \right]$$

W równaniach (2) występują współczynniki zwane modułami efektywnymi dla rozpatrywanych zagadnień, które są funkcjami gładkimi zależnymi od x_2 [Wągrow ska i Witkowska-Dobrev 2011, 2012, Witkowska-Dobrev 2014]:

$$(2\mu + \lambda)_0 = \frac{(2\mu_R + \lambda_R)(2\mu_M + \lambda_M)}{(2\mu_R + \lambda_R)v^M + (2\mu_M + \lambda_M)v^R}$$

$$\tilde{\lambda} = \frac{(2\mu_M + \lambda_M)\lambda_R v^R + (2\mu_R + \lambda_R)v^M \lambda_M}{(2\mu_R + \lambda_R)v^M + (2\mu_M + \lambda_M)v^R}$$

$$\langle 2\mu + \lambda \rangle = (2\mu_R + \lambda_R)v^R + (2\mu_M + \lambda_M)v^M$$

$$\overline{2\mu + \lambda} = \langle 2\mu + \lambda \rangle - \frac{v^R v^M (\lambda_R - \lambda_M)^2}{(2\mu_R + \lambda_R)v^M + (2\mu_M + \lambda_M)v^R}$$

$$\mu_0 = \frac{\mu_R \mu_M}{\mu_R v^M + \mu_M v^R}$$

W ramach modelu homogenizacji lokalnej zawężono rozważania do zagadnienia jednowymiarowego o niezerowej składowej wektora przemieszczenia $u_2(\cdot)$, która zależy od zmiennej x_2 . Skutkiem tego otrzymano tylko jedno równanie na $u_2(\cdot)$:

$$\left(\overline{(2\mu + \lambda)} u_{2,2} \right)_{,2} = 0 \tag{3}$$

Natomiast pola przemieszczeń $w_1(\cdot)$, $w_2(\cdot)$ są aproksymowane w postaci:

– dla gradacji podłużnej

$$w_1 \approx \tilde{w}_1 = hM \partial_2 u_2 \tag{4}$$

$$w_2 \approx \tilde{w}_2 = u_2$$

$$\text{gdzie: } M = - \left(\frac{v^R v^M}{(\lambda_R + 2\mu_R)v^M + (\lambda_M + 2\mu_M)v^R} \right) (\lambda_R - \lambda_M),$$

– dla gradacji poprzecznej

$$w_1 \approx \tilde{w}_1 = u_1 + hu_1 = 0 \quad (5)$$

$$w_2 \approx \tilde{w}_2 = u_2 + hM\partial_2 u_2$$

$$\text{gdzie: } M = - \left(\frac{v^R v^M}{(\lambda_R + 2\mu_R)v^M + (\lambda_M + 2\mu_M)v^R} \right) (\lambda_R - \lambda_M) (2\mu_R - 2\mu_M).$$

Dla gradacji poprzecznej rozpatrywanego kompozytu brzegi przecinające uwarstwienie oznaczono przez: $\Gamma_{02}^0 = [0, L] \times \{0\} \times R$ oraz $\Gamma_H^0 = [0, L] \times \{H\} \times R$, $\Gamma = \Gamma_{02}^0 \cup \Gamma_H^0$.

Dla gradacji podłużnej rozpatrywanego kompozytu brzegi przecinające uwarstwienie oznaczamy oznaczono przez: $\Gamma_{01}^0 = [0, H] \times \{0\} \times R$ oraz $\Gamma_0^H = [0, H] \times \{L\} \times R$, $\Gamma = \Gamma_{01}^0 \cup \Gamma_0^H$.

Zgodnie z założeniem modelu homogenizacji lokalnej warunki brzegowe na $\bar{u} = (u_1, u_2)$ uśrednionego przemieszczenia przyjęto zgodnie z warunkami brzegowymi, jakie występują na brzegu danego kompozytu.

Z postaci otrzymanych rozwiązań wynika, że [Wągrowska i Witkowska-Dobrev 2011, 2012, Witkowska-Dobrev 2014a, b]:

- dla gradacji podłużnej przemieszczenie $\tilde{w}_1(\cdot)$, dla $u_2(x^1, 0, x^3) = u_0$, $u_2(x^1, H, x^3) = 0$, $x^1 \in (0, L)$, $x^3 \in R$ nie spełnia warunków brzegowych na brzegach Γ_{01}^0 i Γ_0^H ,
- dla gradacji poprzecznej przemieszczenie $\tilde{w}_2(\cdot)$, dla $u_2(x^1, 0, x^3) = u_0$, $u_2(x^1, H, x^3) = 0$, $x^1 \in (0, L)$, $x^3 \in R$, nie spełnia warunków brzegowych na brzegach Γ_{02}^0 i Γ_H^0 .

Wprowadono więc nową zmienną ξ , która określona jest w obszarach przylegających do brzegów Γ_{01}^0 i Γ_0^H dla gradacji podłużnej, oraz Γ_{02}^0 i Γ_H^0 dla gradacji poprzecznej, która przecina uwarstwienie i skierowana jest do wewnątrz kompozytu.

Aby spełnić warunki brzegowe, poszukiwano rozwiązania w postaci:

- dla gradacji podłużnej przemieszczenia $w_1^{(2)}$

$$w_1^{(2)} = \tilde{w}_1 + hq_1 = hM\partial_2 u_2 + hq_1 \quad (6)$$

gdzie $q_1(\cdot)$ jest poszukiwaną funkcją w obszarach przybrzegowych, którą wyznaczono z równania efektu warstwy brzegowej [Woźniak i in. 2008, 2010]:

$$\langle (2\mu + \lambda)h^2 \rangle_{q_1, \xi\xi} - \langle (h_1)^2 \mu \rangle_{q_1} = 0 \quad (7)$$

z warunkami brzegowymi

$$q_1 \Big|_{\Gamma_{01}^0} = -M \partial_2 u_2 \Big|_{\Gamma_{01}^0} \quad \text{i} \quad q_1 \Big|_{\Gamma_{01}^H} = -M \partial_2 u_2 \Big|_{\Gamma_{01}^H} \quad (8)$$

Założono, że $q_1(\cdot)$ szybko zanika wraz ze wzrostem wielkości ξ . Otrzymano stąd, że:

– w obszarze przylegającym do Γ_{01}^0 ($\xi = x^2$)

$$\begin{aligned} w_1(x) &\approx w_1^{(2)} = h(x^1, x^2) M(x^2) \partial_2 u_2(x^2) \\ &- h(x^1, 0) M(0) \partial_2 u_2(x^1, 0) \exp\left(-\sqrt{\frac{B_0}{A_0}} x^2\right) \end{aligned} \quad (9a)$$

– w obszarze przylegającym do Γ_0^H ($\xi = H - x^2$)

$$\begin{aligned} w_1(x) &\approx w_1^{(2)} = h(x^1, x^2) M(x^2) \partial_2 u_2(x^2) \\ &- h(x^1, H) M(H) \partial_2 u_2(x^1, H) \exp\left(-\sqrt{\frac{B_0}{A_0}} (H - x^2)\right) \end{aligned} \quad (9b)$$

$$\text{gdzie: } A_0 \equiv \frac{\eta^2}{12} \langle 2\mu + \lambda \rangle, \quad B_0 \equiv \frac{\mu_M \nu^R + \mu_R \nu^M}{\nu^R \nu^M} \quad (10)$$

Z postaci rozwiązania wynika, że wpływ efektu warstwy brzegowej zanika wraz z oddalaniem się od brzegów Γ_{01}^0 i Γ_0^H – jest inny dla brzegu Γ_{01}^0 i Γ_0^H , natomiast jest taki sam wzdłuż brzegu Γ_{01}^0 i Γ_0^H . Stąd w rozpatrywanych przykładach można zawęzić rozważania do jednej warstwy.

Dla gradacji poprzecznej przemieszczenia $w_2^{(2)}$ poszukiwano w postaci:

$$w_2^{(2)} = \tilde{w}_2 + h q_2 = u_2 + h M \partial_2 u_2 + h q_2 \quad (11)$$

gdzie $q_2(\cdot)$ jest poszukiwaną funkcją w obszarach przybrzegowych, którą wyznaczono z równania efektu warstwy brzegowej [Woźniak i in. 2008, 2010]:

$$\langle (2\mu + \lambda) h^2 \rangle q_{2, \xi \xi} - \langle (h_2)^2 \mu \rangle q_2 = 0 \quad (12)$$

z warunkami brzegowymi odpowiednio na Γ_{02}^0 i Γ_H^0 :

$$q_2 \Big|_{\Gamma_{02}^0} AC = -M \partial_2 u_2 \Big|_{\Gamma_{02}^0} \quad \text{i} \quad q_2 \Big|_{\Gamma_H^0} = -M \partial_2 u_2 \Big|_{\Gamma_H^0} \quad (13)$$

Założono, że $q_2(\cdot)$ szybko zanika wraz ze wzrostem wielkości ζ . Otrzymano stąd, że:

- w obszarze przylegającym do brzegu Γ_{02}^0

$$w_2(x^1, x^2) \approx w_2^{(2)}(x^1, x^2) = u_2(x^2) + h(x^2)M(x^2)\partial_2 u_2(x) - h(x^2)M(0)\partial_2 u_2(0)\exp\left(-\sqrt{\frac{B_0}{A_0}}x^1\right) \quad (14a)$$

- w obszarze przylegającym do brzegu Γ_H^0

$$w_2(x^1, x^2) \approx w_2^{(2)}(x^1, x^2) = u_2(x^2) + h(x^2)M(x^2)\partial_2 u_2(x^2) - h(x^2)M(H)\partial_2 u_2(H)\exp\left(-\sqrt{\frac{B_0}{A_0}}(H-x^1)\right) \quad (14b)$$

Stałe występujące we wzorach (14) wynoszą odpowiednio:

$$A_0 \equiv \langle (2\mu + \lambda)h^2 \rangle = \frac{\eta^2}{12} \langle 2\mu + \lambda \rangle, \quad B_0 \equiv \langle \mu(h)^2 \rangle = \frac{\mu_M v^R + \mu_R v^M}{v^R v^M} \quad (15)$$

Z postaci rozwiązania wynika, że wpływ efektu warstwy brzegowej zanika wraz z oddalaniem się od brzegu, ale zależy też od wartości współrzędnej x^2 . Oznacza to, że w różnych warstwach zasięg ten będzie inny.

ANALIZA – WYNIKI BADAŃ

W rozpatrywanych przykładach zbadano różnicę względną pomiędzy rozwiązaniem bez uwzględnienia efektu warstwy brzegowej i z jego uwzględnieniem, otrzymaną w zależności od typu gradacji. W rozważanych przykładach założono (jak już wspomniano), że rozwiązanie uwzględniające efekt warstwy brzegowej może być zastąpione przez rozwiązanie otrzymane z modelu homogenizacji lokalnej, gdy różnica względna w procentach między tymi rozwiązaniami jest rzędu $10^{-5}\%$.

Rozpatrywane kompozyty są wielowarstwowe, dwuskładnikowe, o gradacji podłużnej i poprzecznej. Składniki komponentów są izotropowe oraz jednorodne. Rozważania zawężono do zagadnienia jednowymiarowego o niezerowej składowej wektora przemieszczenia $u_2(\cdot)$, która zależy od zmiennej x_2 . Wszystkie wielkości opisujące kompozyt będą niezależne od współrzędnej x^3 .

Gradacja poprzeczna

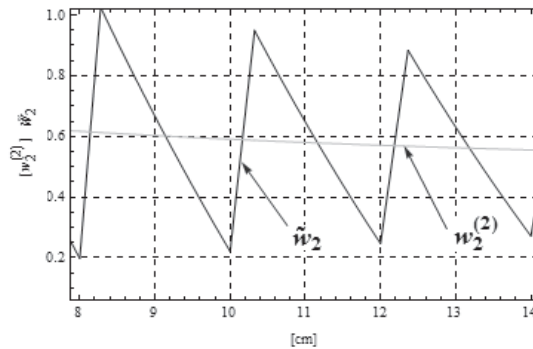
Rozpatrzono przegrodę, która zajmuje obszar $\Omega = (0, H) \times (0, L) \times R$. Własności materiałowe składników opisane są stałymi sprężystości Lamego i wynoszą odpowiednio: $\lambda_R = 0,5035$, $\mu_R = 0,2594$, $\lambda_M = 0,128$, $\mu_M = 0,055$.

Przykład 1. Przegroda składa się z 27 warstw ($L = 54$ cm, $H = 200$ cm) o stałej grubości

$\eta = 2$ cm. Funkcja nasycenia dana jest w postaci $v^R(x^2) = -\frac{(x^2)^2}{L^2} + \frac{x^2}{L}$. Przyjęto wa-

runki brzegowe na $u_2(\cdot)$: $u_2(x^1, 0, x^3) = 1$, $u_2(x^1, 54, x^3) = 0$, $x^1 \in (0, 200)$, $x^3 \in R$.

Wykres przemieszczenia $w_2^{(2)}(\cdot)$ „z” i $\tilde{w}_2(\cdot)$ „bez” uwzględnienia efektu warstwy brzegowej na Γ_{02}^0 przedstawiono na rysunku 2. Rozwiązanie $w_2^{(2)}(\cdot)$ spełnia warunki brzegowe na Γ_{02}^0 ($\zeta = 0$). Natomiast $\tilde{w}_2(\cdot)$, dana wzorem (5), warunków brzegowych nie spełnia.

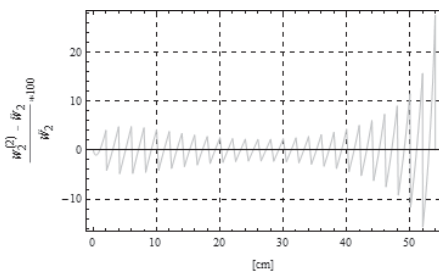


Rys. 2. Rozkład pola przemieszczenia $\tilde{w}_2(\cdot)$ i $w_2^{(2)}(\cdot)$ na brzegu Γ_{02}^0

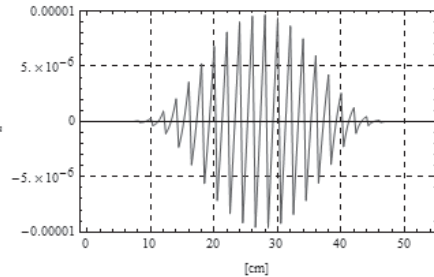
Fig. 2. Distribution of the displacement field $\tilde{w}_2(\cdot)$ and $w_2^{(2)}(\cdot)$ on boundary Γ_{02}^0

Rysunek 3 ilustruje różnicę względną pomiędzy rozwiązaniem $w_2^{(2)}(\cdot)$ i $\tilde{w}_2(\cdot)$ w procentach dla danych wartości ζ .

$\zeta^c = 0$ cm



$\zeta = 5$ cm = $2,5\eta$

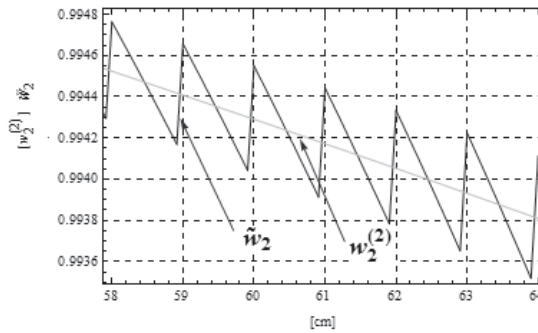


Rys. 3. Różnica względna w procentach pomiędzy $\tilde{w}_2(\cdot)$ i $w_2^{(2)}(\cdot)$ dla danych wartości ζ

Fig. 3. The relative difference in percent between $\tilde{w}_2(\cdot)$ and $w_2^{(2)}(\cdot)$ for given data values ζ

Z przedstawionych na rysunku 3 wykresów wynika, że zasięg efektu warstwy brzegowej nie przekracza $2,5\eta$. Poza nim rozwiązanie na przybliżone przemieszczenie można przyjąć w postaci otrzymanej w ramach modelu homogenizacji lokalnej [Wągrowska i Witkowska-Dobrev 2011, 2012, Witkowska-Dobrev 2014a, b].

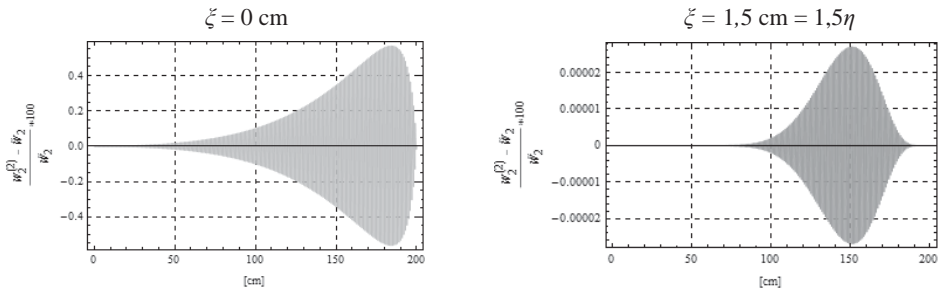
Przykład 2. Przegroda składa się z 200 warstw ($L = 200$ cm, $H = 200$ cm) o stałej grubości $\eta = 1$ cm. Funkcja nasycenia $v^R(\cdot)$ dana jest w postaci $v^R(x^2) = 1 - \frac{(x^2)^2}{L^2}$. Przyjęto warunki brzegowe na $u_2(\cdot)$: $u_2(x^1, 0, x^3) = 1$, $u_2(x^1, 200, x^3) = 0$, $x^1 \in (0, 200)$, $x^3 \in R$. Wykres przemieszczenia $w_2^{(2)}(\cdot)$ „z” i $\tilde{w}_2(\cdot)$ „bez” uwzględnienia efektu warstwy brzegowej na Γ_{02}^0 przedstawiono na rysunku 4. Rozwiązanie $w_2^{(2)}(\cdot)$ spełnia warunki brzegowe na Γ_{02}^0 , ($\zeta = 0$), natomiast $\tilde{w}_2(\cdot)$ warunków brzegowych nie spełnia.



Rys. 4. Rozkład pola przemieszczenia $\tilde{w}_2(\cdot)$ i $w_2^{(2)}(\cdot)$ na brzegu Γ_{02}^0

Fig. 4. Distribution of the displacement field $\tilde{w}_2(\cdot)$ and $w_2^{(2)}(\cdot)$ on boundary Γ_{02}^0

Rysunek 5 ilustruje różnicę względną pomiędzy rozwiązaniem $w_2^{(2)}(\cdot)$ i $\tilde{w}_2(\cdot)$ w procentach dla danych wartości ζ .

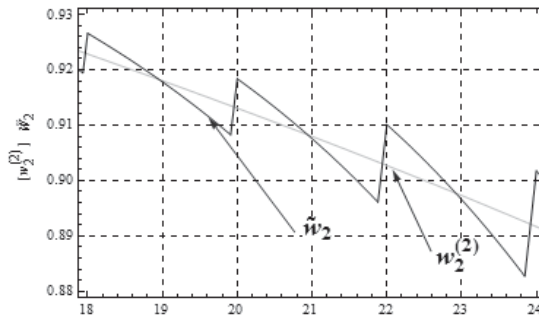


Rys. 5. Różnica względną w procentach pomiędzy $\tilde{w}_2(\cdot)$ i $w_2^{(2)}(\cdot)$ dla danych wartości ζ

Fig. 5. The relative difference in percent between $\tilde{w}_2(\cdot)$ and $w_2^{(2)}(\cdot)$ for given data values ζ

Z przedstawionych wykresów wynika, że zasięg efektu warstwy brzegowej w rozpatrywanym przykładzie nie przekracza $1,5\eta$.

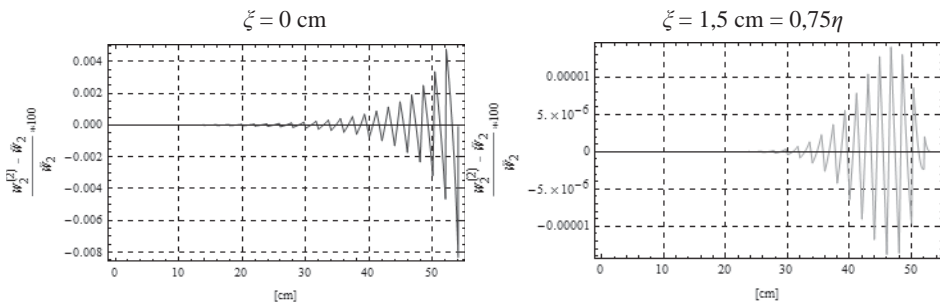
Przykład 3. Przegroda składa się z 27 warstw ($L = 54$ cm, $H = 200$ cm) o stałej grubości $\eta = 2$ cm. Rozkład nasycenia $v^R(\cdot)$ dany jest w postaci $v^R(x^2) = 1 - \frac{(x^2)^3}{L^3}$. Przyjęto warunki brzegowe na $u_2(\cdot)$: $u_2(x^1, 0, x^3) = 1$, $u_2(x^1, 54, x^3) = 0$, $x^1 \in (0, 200)$, $x^3 \in \mathbb{R}$. Wykres przemieszczenia $w_2^{(2)}(\cdot)$ „z” i $\tilde{w}_2(\cdot)$ „bez” uwzględnienia efektu warstwy brzegowej na Γ_{02}^0 przedstawiono na rysunku 6. Rozwiązanie $w_2^{(2)}(\cdot)$ spełnia warunki brzegowe na Γ_{02}^0 . Rozwiązanie $\tilde{w}_2(\cdot)$ warunków brzegowych nie spełnia.



Rys. 6. Rozkład pola przemieszczenia $\tilde{w}_2(\cdot)$ i $w_2^{(2)}(\cdot)$ na brzegu Γ_{02}^0

Fig. 6. Distribution of the displacement field $\tilde{w}_2(\cdot)$ and $w_2^{(2)}(\cdot)$ on boundary Γ_{02}^0

Rysunek 7 ilustruje różnicę względną pomiędzy rozwiązaniem $w_2^{(2)}(\cdot)$ i $\tilde{w}_2(\cdot)$ w procentach dla pewnych wartości ζ .



Rys. 7. Różnica względna w procentach pomiędzy $\tilde{w}_2(\cdot)$ i $w_2^{(2)}(\cdot)$ dla danych wartości ζ

Fig. 7. The relative difference in percent between $\tilde{w}_2(\cdot)$ and $w_2^{(2)}(\cdot)$ for given data values ζ

Z przedstawionych wykresów wynika, że zakres efektu warstwy brzegowej w rozpatrywanym przykładzie nie przekracza $0,75\eta$.

Gradacja podłużna

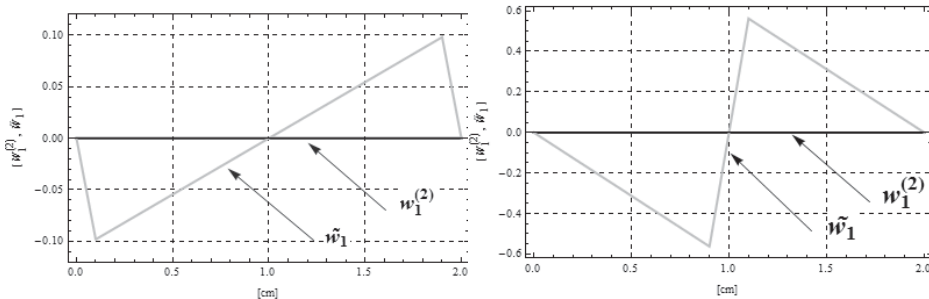
Przegroda zajmuje obszar $\Omega = (0, L) \times (0, H) \times R$, $L = 200$ cm, $H = 200$ cm, składa się z 100 dwuskładnikowych warstw o stałej grubości $\eta = 2$ cm. Własności materiałowe składników komponentów opisane są stałymi sprężystości Lamego i wynoszą odpowiednio: $\lambda_R = 0,5035$, $\mu_R = 0,2594$, $\lambda_M = 0,128$, $\mu_M = 0,055$.

Budowa kompozytów o gradacji podłużnej implikuje, że dla rozpatrywanych zagadnień jednowymiarowych zasięg obszaru, w którym należy uwzględnić efekt warstwy brzegowej, nie zmienia się wzdłuż brzegu Γ_{01}^0 i Γ_0^H , natomiast jest różny na brzegach Γ_{01}^0 i Γ_0^H [Wągrowska i Witkowska-Dobrev 2011, 2012, Witkowska-Dobrev 2014a, b].

Przykład 4. Funkcja nasycenia $\nu^R(\cdot)$ dana jest w postaci $\nu^R(x^2) = \left(-\frac{0,8}{L}x^2 + 0,9\right)$.

Przyjęto warunki brzegowe na $u_2(\cdot)$: $u_2(x^1, 0, x^3) = 2$, $u_2(x^1, 200, x^3) = 0$, $x^1 \in (0, 200)$,

$x^3 \in R$. Rozkład przybliżonych przemieszczeń $\tilde{w}_1(\cdot)$ i $w_1^{(2)}(\cdot)$ na brzegu Γ_{01}^0 i Γ_0^H przedstawiono na rysunku 8 [Wągrowska i Witkowska-Dobrev 2011, 2012, Witkowska-Dobrev 2014a, b]. Rozwiązanie $w_1^{(2)}(\cdot)$ spełnia warunki brzegowe na Γ_{01}^0 i Γ_0^H , natomiast rozwiązanie $\tilde{w}_1(\cdot)$ dane wzorem (4) warunków brzegowych nie spełnia.

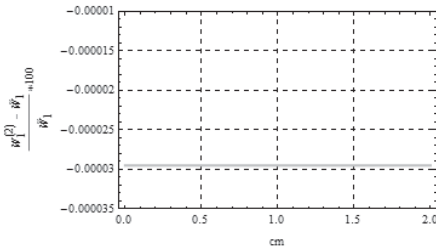


Rys. 8. Rozkład pola przemieszczenia $\tilde{w}_1(\cdot)$ i $w_1^{(2)}(\cdot)$ na brzegu Γ_{01}^0 i Γ_0^H w pojedynczej warstwie kompozytu

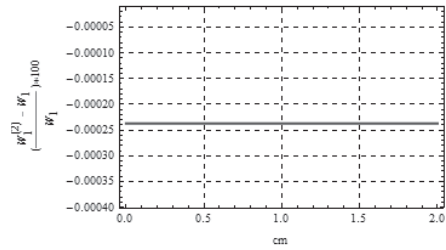
Fig. 8. Distribution of the displacement field $\tilde{w}_1(\cdot)$ and $w_1^{(2)}(\cdot)$ on boundary Γ_{01}^0 and Γ_0^H in a single layer of the composite

Rysunek 9 ilustruje względne różnice przemieszczenia $\tilde{w}_1(\cdot)$ i $w_1^{(2)}(\cdot)$ w procentach dla danych wartości ξ .

dla brzegu Γ_{01}^0 dla $\zeta = 3,0 \text{ cm} = 1,5\eta$



dla brzegu Γ_0^H dla $\zeta = 1,5 \text{ cm} = 0,75\eta$



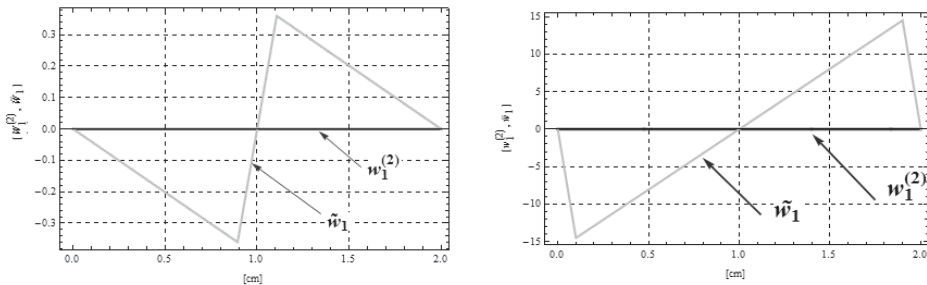
Rys. 9. Różnica względna w procentach pomiędzy $\tilde{w}_1(\cdot)$ i $w_1^{(2)}(\cdot)$ dla danych wartości ζ na brzegu Γ_{01}^0 i Γ_0^H w pojedynczej warstwie kompozytu

Fig. 9. The relative difference in percent between the solution $\tilde{w}_1(\cdot)$ and $w_1^{(2)}(\cdot)$ for data values ζ from boundary Γ_{01}^0 and Γ_0^H in a single layer of the composite

Przykład 5. Funkcja nasycenia dana jest w postaci $v^R(x^2) = \left(1 - \left(\frac{0,8(x^2)}{L} + 0,9 \right) \right)$.

Przyjęto warunki brzegowe na $u_2(\cdot)$: $u_2(x^1, 0, x^3) = 2$, $u_2(x^1, 200, x^3) = 0$, $x^1 \in (0, 200)$, $x^3 \in R$.

Rozkład pola przemieszczenia $w_1^{(2)}(\cdot)$ „z” i $\tilde{w}_1(\cdot)$ „bez” uwzględnienia efektu brzegowego na brzegach Γ_{01}^0 i Γ_0^H przedstawiono na rysunku 10.

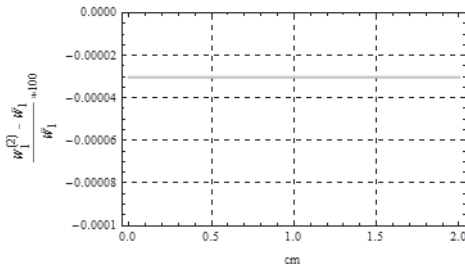


Rys. 10. Rozkład pola przemieszczenia $\tilde{w}_1(\cdot)$ i $w_1^{(2)}(\cdot)$ na brzegu Γ_{01}^0 i Γ_0^H w pojedynczej warstwie kompozytu

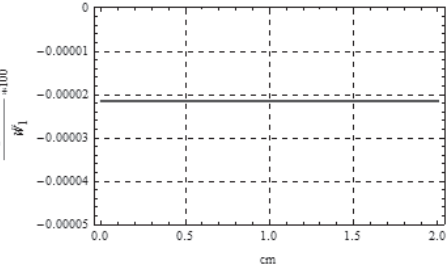
Fig. 10. Distribution of the displacement field $\tilde{w}_1(\cdot)$ and $w_1^{(2)}(\cdot)$ on boundary Γ_{01}^0 and Γ_0^H in a single layer of the composite

Rysunek 11 ilustruje względne różnice przemieszczenia $w_1^{(2)}(\cdot)$ i $\tilde{w}_1(\cdot)$ w procentach dla danych wartości ζ .

dla brzegu Γ_{01}^0 dla $\zeta = 1,2 \text{ cm} = 0,6\eta$



dla brzegu Γ_0^H dla $\zeta = 2,8 \text{ cm} = 1,4\eta$



Rys. 11. Różnica względna w procentach pomiędzy $\tilde{w}_1(\cdot)$ i $w_1^{(2)}(\cdot)$ dla danych wartości ζ na brzegu Γ_{01}^0 i Γ_0^H w pojedynczej warstwie kompozytu

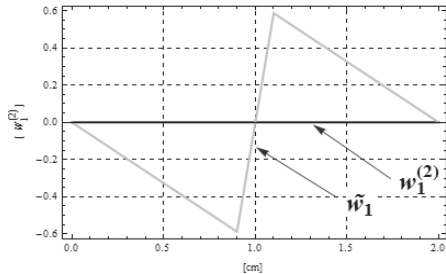
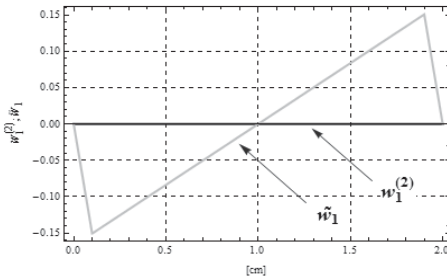
Fig. 11 The relative difference in percent between the solution $\tilde{w}_1(\cdot)$ and $w_1^{(2)}(\cdot)$ data values ζ for boundary Γ_{01}^0 and Γ_0^H in a single layer of the composite

Z analizy przedstawionych wykresów wynika, że zakres, w jakim należy uwzględnić rozwiązanie uwzględniające efekt warstwy brzegowej dla brzegu Γ_0^0 , nie przekracza $0,6\eta$, natomiast dla brzegu Γ_0^H nie przekracza $1,4\eta$.

Przykład 6. Rozkład funkcji nasycenia dany jest w postaci: $v^R(x^2) = \left(-\frac{0,8}{L^2}(x^2)^2 + 0,9 \right)$.

Przyjęto warunki brzegowe na $u_2(\cdot)$: $u_2(x^1, 0, x^3) = 2, u_2(x^1, 200, x^3)$.

Wartości przybliżonych przemieszczeń $\tilde{w}_1(\cdot)$ i $w_1^{(2)}(\cdot)$ na brzegach Γ_{01}^0 i Γ_0^H przedstawiono na rysunku 12.



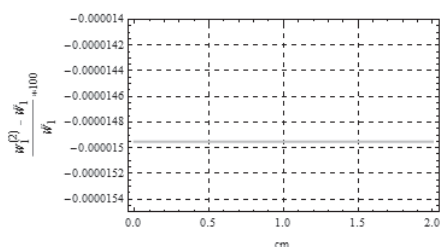
Rys. 12. Rozkład pola przemieszczenia $\tilde{w}_1(\cdot)$ i $w_1^{(2)}(\cdot)$ na brzegu Γ_{01}^0 i Γ_0^H w pojedynczej warstwie kompozytu

Fig. 12. Distribution of the displacement field $\tilde{w}_1(\cdot)$ and $w_1^{(2)}(\cdot)$ on boundary Γ_{01}^0 and Γ_0^H in a single layer of the composite

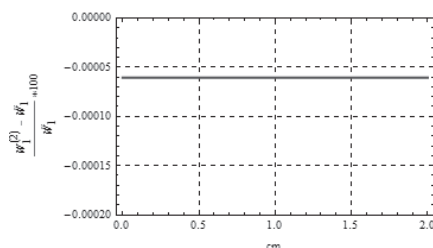
Rysunek 13 ilustruje względną różnicę przemieszczenia $\tilde{w}_1(\cdot)$ i $w_1^{(2)}(\cdot)$ w procentach dla danych wartości ζ .

Z przedstawionych wykresów wynika, że zakres, w jakim należy uwzględnić rozwiązanie uwzględniające efekt warstwy brzegowej dla brzegu Γ_{01}^0 , nie przekracza η , natomiast dla brzegu Γ_0^H nie przekracza $0,85\eta$.

dla brzegu Γ_{01}^0 dla $\zeta = 2,0 \text{ cm} = 1,0\eta$



dla brzegu Γ_0^H dla $\zeta = 1,7 \text{ cm} = 0,85\eta$



Rys. 13. Różnica względna w procentach pomiędzy $\tilde{w}_1(\cdot)$ i $w_1^{(2)}(\cdot)$ dla danych wartości ζ na brzegu Γ_{01}^0 i Γ_0^H w pojedynczej warstwie kompozytu

Fig. 13. The relative difference in percent between the solution $\tilde{w}_1(\cdot)$ and $w_1^{(2)}(\cdot)$ for data values ζ from boundary Γ_{01}^0 and Γ_0^H in a single layer of the composite

PODSUMOWANIE

W pracy rozpatrzono dwuskładnikowe wielowarstwowe kompozyty z funkcyjną gradacją własności efektywnych. Biorąc pod uwagę przedstawione wyniki, można sformułować następujące wnioski końcowe:

1. W ramach modelu homogenizacji lokalnej nie można spełnić warunków brzegowych na brzegach przecinających uwarstwienie. Wprowadzając za Woźniakiem [Woźniak i in. 2008, 2010] równania efektu warstwy brzegowej, spełniono warunki brzegowe. Rozwiązanie uwzględniające efekt warstwy brzegowej zaburza rozwiązanie otrzymane w ramach homogenizacji lokalnej, jednak zaburzenia występują tylko w bardzo małym obszarze przylegającym do brzegów przecinających uwarstwienie.

2. Przedstawione w pracy przykłady dotyczące badania zasięgu obszaru, w którym należy uwzględnić rozwiązanie z efektem warstwy brzegowej, mają charakter ilustracyjny i nie mogą być traktowane jako ogólne stwierdzenia. Tak więc zasięg efektu warstwy brzegowej w przegrodach o gradacji poprzecznej w omawianych przykładach znajduje się w przedziale od 0,75 do 2,5 grubości pojedynczej warstwy od każdego z brzegów i zależy od postaci funkcji nasycenia, liczby warstw i grubości warstw, na jakie podzielono kompozyt. Zasięg efektu warstwy brzegowej na obu brzegach przecinających uwarstwienie jest taki sam, ale jednocześnie jest różny w różnych pojedynczych warstwach. Z kolei zasięg efektu warstwy brzegowej w przegrodach o gradacji podłużnej w omawianych przypadkach znajduje się w przedziale od 0,6 do 1,5 grubości warstwy od brzegu Γ_{01}^0 , a od brzegu Γ_0^H – w przedziale od 0,75 do 1,4 grubości warstwy przecinających uwarstwienie, w zależności od postaci funkcji nasycenia, liczby i grubości warstw, na jakie podzielono kompozyt. Zasięg efektu warstwy brzegowej na obu brzegach jest różny, ale stały w każdej warstwie w ramach danego brzegu.

PIŚMIENNICTWO

Rychlewska, J., Woźniak, Cz. (2006). Boundary layer phenomena in elastodynamics of functional-ly graded laminated. Arch. Mech., 58, 45, 431–444.

- Wągrowska, M., Witkowska-Dobrev, J. (2010). Wpływ struktury gradientowej na własności sprężyste kompozytów warstwowych. *Acta Sci. Pol., Architectura*, 9(4), 5–13.
- Wągrowska, M., Witkowska-Dobrev, J. (2011). Zagadnienie efektu warstwy brzegowej w przegrodzie o podłużnej gradacji własności. *Acta Sci. Pol., Architectura*, 11(3), 5–13.
- Wągrowska, M., Witkowska-Dobrev, J. (2012). Zagadnienie efektu warstwy brzegowej w liniowo-sprężystej przegrodzie budowlanej o poprzecznej gradacji własności. *Acta Sci. Pol. Architectura*, 11(2), 3–10.
- Wierzbicki, E., Woźniak, Cz., Łaciński, L. (2005). Boundary and initial fluctuation effect on dynamic behaviour of a laminated solid. *Arch. Appl. Mech.*, 74, 618–628.
- Witkowska-Dobrev, J. (2014a). Analiza zasięgu warstwy brzegowej w kompozytach z podłużną i poprzeczną gradacją własności. *Acta Sci. Pol., Architectura*, 13(2), 51–61.
- Witkowska-Dobrev, J. (2014b). Efekt warstwy brzegowej w modelowaniu tolerancyjnym sprężystych przegród warstwowych. *Doktorat. SGGW, Warszawa*.
- Woźniak, Cz. (2010). Asymptotic Modelling and Boundary-layer Effect for Functionally Graded Microlayered Composites. *Acta Sci. Pol., Architectura*, 9(2), 3–9.
- Woźniak, Cz., Michalak, B., Jędrysiak, J. (2008). Thermomechanics of Heterogeneous Solids and Structures, Tolerance Averaging Approach. *Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź*.
- Woźniak, Cz. et al. (2010). *Mathematical Modelling and Analysis in Continuum Mechanics of Microstructured Media, Professor Margaret Woźniak proMemoria. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice*.

THE AREA OF EFFECT OF BOUNDARY LAYER FOR MULTILAYER COM-POSITES FOR STATIONARY PROBLEMS

Abstract. The boundary layer effect for multilayered composites with transversal and longitudinal gradation of effective properties for stationary elastic problems was investigated. The consideration was reduced to the one-dimensional stationary problem within the frames of the asymptotic variant of the tolerance modelling – local homogenization. The relative difference between two solutions was investigated: the first one was obtained according to the asymptotic variant of the tolerance modelling – local homogenization and the second one considered the boundary layer effect for the given type of gradation.

Key words: longitudinal gradation of properties, transverse gradation of properties, asymptotic variant of tolerance modelling, local homogenization, boundary layer effect, relative difference.

Zaakceptowano do druku – Accepted for print: 20.06.2015

Cytowanie: Witkowska-Dobrev, J., Wągrowska, M. (2015). Zasięg efektu warstwy brzegowej w kompozytach warstwowych dla zagadnień elastostatyki. *Acta Sci. Pol., Architectura*, 15(2), 3–17.