ACTA SCIENTIARUM POLONORUM Architectura 13 (2) 2014, 29–37

WPŁYW ROZWARSTWIENIA LAMINATU NA PRZEWODZENIE CIEPŁA

Beata Kufel

Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie

Streszczenie. Przedmiotem rozważań są laminaty periodycznie dwuwarstwowe, w których defekty mogą wystąpić na powierzchniach między warstwami. Celem pracy jest opisanie wpływu takich defektów na przewodzenie ciepła. Międzywarstwowe defekty (w tym rozwarstwienie) modeluje się dostatecznie cienką warstwą, której własności termiczne opisuje dostatecznie mały nieznany współczynnik przewodności cieplnej. W pracy przedstawiono równania modelowe opisujące wpływ rozwarstwienia na przewodnictwo cieplne, zawierające pewną nową stałą charakteryzującą stopień rozwarstwienia bądź stopień występowania defektów.

Słowa kluczowe: laminaty, przewodnictwo ciepła, homogenizacja lokalna, defekty międzywarstwowe

WSTĘP

W pracy rozważane będą laminaty periodyczne z międzywarstwowymi defektami. Własności termiczne warstw opisują ciepło właściwe i współczynnik przewodności cieplnej. W poszczególnych warstwach są one różne, ale stałe. Do modelowania przewodnictwa cieplnego w takim laminacie zastosowano pewne podejście asymptotyczne, którego wynikiem będzie nieciągłe na interlaminach pole temperatury.

Problem opisu i analizy laminatów z międzywarstwowymi defektami nie jest nowy w termomechanice. Można tu wskazać na prace poświęcone pojedynczym lub wielokrotnym sztywnym inkluzjom lub szczelinom, znajdującym się na jednej powierzchni ośrodka niejednorodnego. Wykaz tych prac znajduje się m.in. w opracowaniu Kaczyńskiego i innych [1995]. Inne podejście do modelowania problemu kontaktu między laminami przedstawiają prace Naniewicza i Woźniaka [1988] oraz Woźniaka [1995].

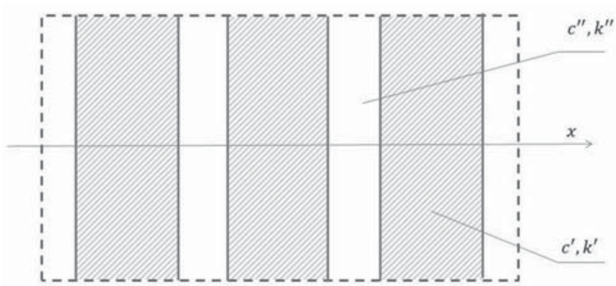
Adres do korespondencji – Corresponding author: Beata Kufel, Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego, Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska, Studia Doktoranckie, ul. Nowoursynowska 159, 02-776 Warsaw, e-mail: zmkb@sggw.pl

W pracy przedstawiono zmodyfikowane równania modelowe opisujące wpływ rozwarstwienia na przewodnictwo cieplne, zawierające pewną nową stałą charakteryzującą stopień rozwarstwienia bądź stopień występowania defektów.

METODA MODELOWANIA

Przyjmijmy, że konfiguracją odniesienia laminatu będzie obszar $\Omega = (0, L) \times \Xi$, $\Xi \subset R^2$ z układem współrzędnych Ox, x_1, x_2, $x \in (0, L)$, $(x_1, x_2) \in \Xi$.

Laminat składa się z dwu powtarzających się lamin o grubościach l' i l'', których własności termiczne opisują ciepło właściwe oznaczone odpowiednio c' i c'' oraz współczynnik przewodności cieplnej k' i k''. Widać stąd, że komórką periodyczności jest w rozważanym przypadku przedział długości $l = l' + l''$ (rys. 1).



Rys. 1. Fragment laminatu periodycznie dwuwarstwowego
Fig. 1. A fragment of a periodic lamina

Współczynnik przewodnictwa cieplnego jest funkcją periodyczną $k = k(x)$ określoną w przedziale $(0, l)$ w następujący sposób: dla $x \in (0, l')$ funkcja przyjmuje wartość k' oraz dla $x \in (l', l)$ – wartość k''. Analogicznie definiuje się funkcję ciepła właściwego $c = c(x)$.

Oznaczmy przez $\theta = \theta(x, x_1, x_2, t)$ temperaturę względną. Jest ona funkcją θ: $\Omega \times < t_0, t_1 > \rightarrow R$, gdzie $<t_0, t_1>$ jest przedziałem czasu oraz $(x, x_1, x_2) \in \Omega$, $t \in < t_0, t_1$.

Klasyczny model przewodnictwa cieplnego składa się z równań konstytutywnych dla strumienia ciepła:

$$q = -k\partial\theta;\ q^1 = -k\partial_1\theta;\ q^2 = -k\partial_2\theta \tag{1}$$

oraz równania bilansu

$$\partial(k\partial\theta) + k\partial_1^2\theta + k\partial_2^2\theta - c\partial_t\theta = 0 \tag{2}$$

gdzie przez ∂, ∂_α oznaczono pochodne odpowiednio po x i x_α, $\alpha = 1, 2$.

Równanie (2) jest znanym równaniem różniczkowym Fouriera o zmiennych współczynnikach przewodzenia ciepła w przewodnikach niejednorodnych. Przedstawiony model jest na tyle skomplikowany, że uzasadnione jest poszukiwanie modeli prostszych.

W przypadku niejednorodności periodycznej stosowanymi metodami upraszczającymi są takie metody, jak: metoda modułów efektywnych, homogenizacja asymptotyczna lub homogenizacja nieasymptotyczna, do której należy oparta na analizie niestandardowej metoda nazywana metodą parametrów mikrolokalnych, oraz technika uśredniania tolerancyjnego. W pracy przedstawiono najpierw model dla przewodników warstwowych bez defektów, skonstruowany metodą parametrów mikrolokalnych, opisany przez Nagórko i Piwowarskiego [2006].

Punktem wyjścia w tej konstrukcji jest zastąpienie nieznanej funkcji temperatury θ przez dwie funkcje skalarne $\vartheta, \psi,$ obie określone w obszarze $\Omega \times < t_o, t_1 >$ w następujący sposób:

$$\theta(x, x_1, x_2, t) = \vartheta(x, x_1, x_2, t) + h(x)\psi(x, x_1, x_2, t) \tag{3}$$

gdzie funkcja $h(x)$ jest funkcją skalarną, periodyczną o okresie l i oscylującą, tak że:

$$\int_0^l h(x)dx = 0$$

Ponadto założymy, że funkcja $h(x)$ przyjmuje wartości rzędu $O(l)$, a wartości funkcji ϑ i ψ dla $l << 1$ w przedziale $(x - l/2, x + l/2) \subset (0, L)$ są w przybliżeniu stałe.

Funkcję ϑ nazywa się temperaturą uśrednioną, funkcję ψ – parametrem mikrolokalnym, a h – funkcją kształtu.

Korzystając z powyższych założeń oraz metody parametrów mikrolokalnych, można wykazać, że układ równań na poszukiwane funkcje ϑ i ψ przyjmie postać:

$$< k > (\partial^2 + \partial_1^2 + \partial_2^2)\vartheta + < k\partial h > \partial\psi - < c > \partial_t\vartheta = 0 \tag{4}$$

$$< k\partial h > \partial\vartheta + < k(\partial h)^2 > \psi = 0$$

gdzie dla dowolnej funkcji periodycznej $f = f(x)$, $x \in (0, l)$ przez $< f >$ oznaczono:

$$< f > = \int_0^l f(x)dx$$

Z równania $(4)_2$ można wyznaczyć funkcję ψ:

$$\psi = \alpha_0 \partial\vartheta \tag{5}$$

gdzie $\alpha_0 = - < k\partial h > / < k(\partial h)^2 >$

Podstawiając wyliczoną funkcję (5) do równania (4), otrzymamy równanie na temperaturę uśrednioną ϑ :

$$k_0\partial^2\vartheta + < k > (\partial_1^2 + \partial_2^2)\vartheta - < c > \partial_t\vartheta = 0 \tag{6}$$

gdzie $k_0 \equiv < k > + \alpha_0 < k\partial h >$.

Równania (3), (5) i (6) opisują model uzyskany metodą parametrów mikrolokalnych przewodzenia ciepła w laminacie periodycznym. Model ten jest przydatny po wskazaniu funkcji kształtu. W przypadku laminatów dwuwarstwowych za funkcję kształtu h można przyjąć funkcję periodyczną określoną następująco: dla $x \in (0, l')$ funkcja przyjmuje wartości $l(1 - 2x/l')$, a dla $x \in (l', l)$ – wartości $l(2x/l'' - 2l/l'' + 1)$.

Przy tak obranej funkcji kształtu oraz wprowadzając oznaczenia $\nu' = l'/l$, $\nu'' = l''/l$, występujące w równaniach (4) i (6), można obliczyć stałe:

$$
\begin{gathered}
k_0 = \frac{1}{\nu'/k' + \nu''/k''}; \; < k > = k'\nu' + k''\nu''; \; < c > = c'\nu' + c''\nu'' \\
< k\partial h > = 2(k' - k''); \; < k(\partial h)^2 > = 4\left(\frac{k'}{\nu'} + \frac{k''}{\nu''}\right)
\end{gathered} \tag{7}
$$

Zauważmy, że gdy $k' = k'' = k$, wtedy $\alpha_0 = 0$ i $k_0 = < k > = k$. Podobnie jest, gdy $\nu' \to 1 \vee 0$.

PRZEWODNICTWO CIEPLNE W LAMINATACH PERIODYCZNIE DWUWARSTWOWYCH Z DEFEKTAMI MIĘDZYWARSTWOWYMI

Międzywarstwowe defekty (w tym rozwarstwienie) będziemy modelować cienką warstwą o grubości δ, której własności termiczne opisuje nieznane ciepło właściwe $\overline{c}$ i współczynnik przewodności cieplnej $\overline{k}$. Załóżmy, że $\delta << l$.

W konsekwencji przyjmijmy, że komórką periodyczności jest teraz odcinek długości $l = l' + l'' + 2\delta$, gdzie przez δ oznaczono grubość wprowadzonej myślowo cienkiej warstwy łączącej laminy przewodnika.

Niech komórek periodyczności będzie p, $p = L/l$. Oznaczmy przez x_i, $i = 1, 2, ..., p$, kolejne środki komórek periodyczności leżące na osi x (rys. 2). Zbiór tych punktów oznaczymy przez:

$$\Lambda = \{x_i; x_i = l/2 + (i-1)l, \; i = 1, 2, ..., p\}$$

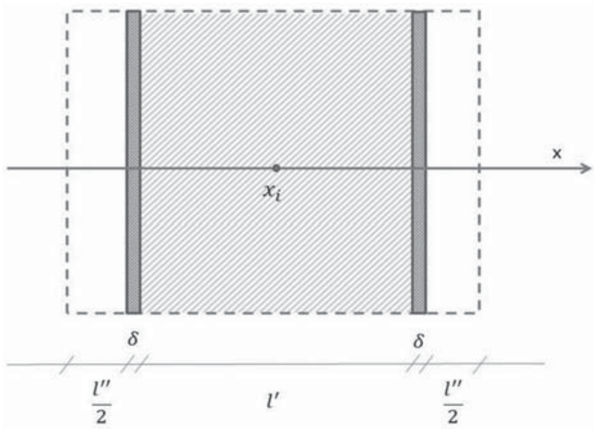
Zdefiniujmy nasycenie $\overline{\nu} = \delta/l$ warstwy łączącej dwie laminy. Po wprowadzeniu dodatkowej warstwy o grubości δ ciepło właściwe i współczynnik przewodnictwa cieplnego są także funkcjami periodycznymi.

Dekompozycję temperatury przyjmiemy teraz w postaci zmodyfikowanej:

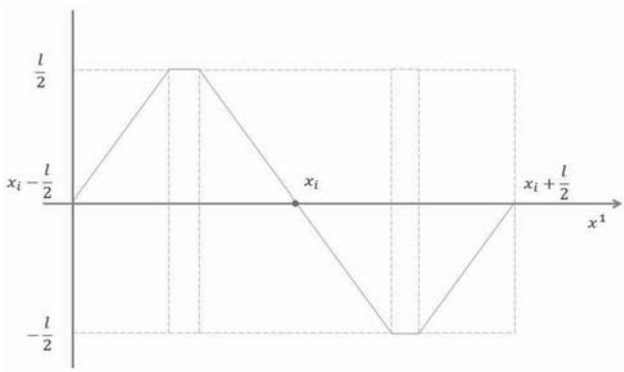
$$\theta(x, x_1, x_2) = \vartheta(x, x_1, x_2) + g(x)\psi(x, x_1, x_2) + \overline{g}(x)\overline{\psi}(x, x_1, x_2) \tag{8}$$

gdzie występują dwie funkcje kształtu g i $\overline{g}$ oraz dwa parametry mikrolokalne ψ i $\overline{\psi}$.

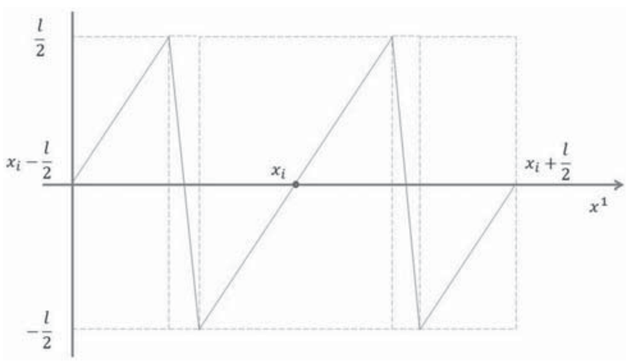
Funkcję g definiujemy analogicznie do h. Jej wykres przedstawiono na rysunku 3. Natomiast wykres funkcji $\overline{g}$ przedstawiono na rysunku 4.



Rys. 2. Komórka periodyczności z warstwą pośrednią
Fig. 2. The basic cell with interlaminar layer



Rys. 3. Wykres funkcji kształtu *g*
Fig. 3. Diagram of fluctuation shape function *g*



Rys. 4. Wykres funkcji kształtu $\overline{g}$
Fig. 4. Diagram of fluctuation shape function $\overline{g}$

Układ równań na nieznane parametry mikrolokalne ψ i $\overline{\psi}$ otrzymamy z warunków ciągłości strumienia ciepła na powierzchniach $x = x_i - l/2 + l''/2$ oraz dla $x = x_i - l'/2$ w postaci:

$$k''(\partial\vartheta + \frac{1}{\nu''}\psi + \frac{1}{\nu''}\overline{\psi}) = \overline{k}(\partial\vartheta - \frac{1}{\overline{\nu}}\overline{\psi}) + O(\varepsilon)$$

$$\overline{k}(\partial\vartheta - \frac{1}{\overline{\nu}}\overline{\psi}) = k'(\partial\vartheta - \frac{1}{\nu'}\psi + \frac{1}{\nu'}\overline{\psi}) + O(\varepsilon)$$

Wyznacznik tego układu jest większy od zera:

$$\frac{k'k''}{\nu'\nu''} + \left(\frac{k'}{\nu'} + \frac{k''}{\nu''}\right)\frac{\overline{k}}{\overline{\nu}} > 0$$

Rozwiązaniami układu są funkcje:

$$\psi = \alpha\partial\vartheta, \qquad \overline{\psi} = \overline{\alpha}\partial\vartheta$$

gdzie:

$$\alpha = \alpha_0 + k_0\left(\frac{k''}{\nu''} - \frac{k'}{\nu'}\right)\overline{\alpha} \tag{9}$$

$$\overline{\alpha} = \frac{\overline{k} - k_0}{\dfrac{\overline{k}}{\overline{\nu}} + k_0} \tag{10}$$

Zauważmy, że jeżeli $\overline{\nu} \to 0$, to $\overline{\alpha} \to 0$ i wtedy $\alpha \to \alpha_0$.

Równania modelowe przyjmą teraz postać:

$$\begin{aligned}
q^1 &= -k_0^{eff}\partial\vartheta \\
q^2 &= -<k>\partial_1\theta \\
q^3 &= -<k>\partial_2\theta \\
k_0^{eff}\partial^2\vartheta &+ <k>(\partial_1^2 + \partial_2^3)\vartheta - <c>\partial_t\vartheta = 0
\end{aligned} \tag{11}$$

gdzie

$$k_0^{eff} = <k> + \alpha <k\partial g> + \overline{\alpha} <k\partial\overline{g}> \tag{12}$$

Występujące w stałej efektywnej (12) wielkości są określone wzorami (9) i (10) oraz

$$< k > = k'\nu' + k''\nu'' + 2\bar{k}\bar{\nu}$$

Uśrednione ciepło właściwe < c >, występujące w równaniu (11), jest równe $< c > = c'\nu' + c''\nu'' + 2\bar{c}\,\bar{\nu}$.

PRZEJŚCIE GRANICZNE

Przejście asymptotyczne wykonamy, przeprowadzając skalowanie. Przyjmijmy $\varepsilon = 1/n$, $n = 1, 2, ...$ Zastąpmy l, δ przez εl, $\varepsilon\,\delta$ oraz wprowadźmy funkcje:

$$g_\varepsilon(\cdot),\ \bar{g}_\varepsilon(\cdot),\ k_\varepsilon(\cdot),\ c_\varepsilon(\cdot)$$

Składowe strumienia ciepła dla każdego $\varepsilon = 1/n$, $n = 1, 2, ...$, można teraz przedstawić w postaci:

$$q_\varepsilon^1 = -k_\varepsilon(\partial_1\vartheta + \partial_1 g_\varepsilon \psi + \partial_1 g_\varepsilon \bar{\psi}) + O(\varepsilon)$$

$$q_\varepsilon^2 = -k_\varepsilon \partial_2 \vartheta + O(\varepsilon)$$

$$q_\varepsilon^3 = -k_\varepsilon \partial_3 \vartheta + O(\varepsilon)$$

Również układ równań na ψ i $\bar{\psi}$ otrzymamy z warunków na ciągłość strumienia ciepła:

$$\begin{aligned}(k'' - k')\partial\vartheta &= -\left(\frac{k'}{\nu'} + \frac{k''}{\nu''}\right)\psi + \left(\frac{k'}{\nu'} - \frac{k''}{\nu''}\right)\bar{\psi} \\ (k'' + k')\partial\vartheta &= \left(\frac{k'}{\nu'} - \frac{k''}{\nu''}\right)\psi - \left(\frac{k'}{\nu'} + \frac{k''}{\nu''} - 2\kappa\right)\bar{\psi}\end{aligned} \qquad (13)$$

gdzie przez κ oznaczono granicę ilorazu $\dfrac{\bar{k}}{\bar{\nu}}$, przy $\bar{k} \to 0$ i $\bar{\nu} \to 0$.
Granicę tę, o ile istnieje, możemy przyjąć, za miarę defektów.

Rozwiązując układ (13), otrzymujemy:

$$\psi = \beta\partial\vartheta; \quad \bar{\psi} = \bar{\beta}\partial\vartheta$$

gdzie:

$$\beta = \alpha_0 + k_0\left(\frac{k''}{\nu''} - \frac{k'}{\nu'}\right)\bar{\beta}; \qquad \bar{\beta} = \frac{k_0}{\kappa + k_0}$$

Moduł efektywny (12) jest teraz równy:

$$k_0^{eff} = k_0 \left\{ 1 - \left[(k_0)^2 \left(\frac{k''}{\nu''} - \frac{k'}{\nu'} \right) (k' - k'') + (k' + k'') \right] \frac{1}{\kappa + k_0} \right\} \tag{14}$$

Człon $\left[(k_0)^2 \left(\frac{k''}{\nu''} - \frac{k'}{\nu'} \right) (k' - k'') + (k' + k'') \right] \frac{1}{\kappa + k_0}$ w wyrażeniu (14) można traktować jako wielkość, która w formalny sposób opisuje wpływ defektów na przewodzenie ciepła w laminacie. Powiązanie go z rzeczywistym przebiegiem temperatury w laminacie z defektami powinno nastąpić w wyniku badań eksperymentalnych.

PODSUMOWANIE

W pracy skonstruowano model opisujący międzywarstwowe defekty w laminatach periodycznie dwuwarstwowych. Wyprowadzony model pozwala badać wpływ takich defektów na przewodzenie ciepła. Własności termiczne warstw opisują ciepło właściwe i współczynnik przewodności cieplnej. W poszczególnych warstwach są one różne, ale stałe. Międzywarstwowe defekty (w tym rozwarstwienie) opisano dostatecznie cienką warstwą, której własności termiczne opisuje dostatecznie mały nieznany współczynnik przewodności cieplnej. Termin „dostatecznie mały" wskazuje, że zastosowano w modelowaniu podejście asymptotyczne. W pracy przedstawione zostały zmodyfikowane równania modelowe opisujące wpływ rozwarstwienia na przewodnictwo cieplne, zawierające pewną nową stałą, charakteryzującą stopień rozwarstwienia bądź stopień występowania defektów.

PIŚMIENNICTWO

Kaczyński A., Matysiak S.J., Pauk V.J., 1995. Stress intensity factors for an interface penny-shope crack in laminated elastic layer. J. Theor. Appl. Mech. 33, 361–373.

Nagórko W., Piwowarski M., 2006. On the heat conduction in periodically nonhomogeneous solids. W: Selected Topics in the Mechanics of Inhomogeneous Media. Red. Cz. Woźniak, R. Świtka, M. Kuczma. Wydaw. Uniwersytetu Zielonogórskiego, Zielona Góra.

Naniewicz Z., Woźniak Cz., 1988. On the quasi-stationary models of debonding processes in layered composites. Ing. Arch. 58, 403–412.

Woźniak M., 1995. On the dynamic behaviour of micro-damaged stratified media. Int. J. Fract. 73, 223–232.

ON A CERTAIN MODEL OF HEAT CONDUCTION IN LAMINATED MEDIA WITH INTERLAMINAR DEFECTS

Abstract. In this contributions, the object of analysis will be restricted to the heat conduction in two component laminates with a periodic structure. The non-ideal contact between adjacent laminae is modelled by a sufficiently thin interlaminar layer made of an extra material with a sufficiently small heat conductivity when compared to lamina materials.

The aim of this presentation is to propose a refined version of the aforementioned modelling procedure in which its justification is included into the obtained model equations.

Key words: heat conduction, the local homogenization, composite, interlaminar defects

Zaakceptowano do druku – Accepted for print: 5.06.2014