

ELEMENT SKOŃCZONY ŁUKU KOŁOWEGO O ŚREDNIEJ GRUBOŚCI – STATYKA I DRGANIA WŁASNE

Wojciech Gilewski, Marta Sitek

Politechnika Warszawska, Warszawa

Streszczenie. Niniejszy artykuł dotyczy elementu skończonego łuku kołowego o średniej grubości ($Ar2Ph2$). W pracy pokazano sposób wyprowadzenia „fizycznych” funkcji kształtu uwzględniających wpływ właściwości fizycznych materiału, geometrii przekroju poprzecznego i krzywizny łuku na jego deformację. Wykazano, że przy małym kącie rozwarcia elementu przechodzą one w odpowiednie funkcje elementu belkowego Timoshenki. Rozwiązano serię zadań z zastosowaniem prezentowanego elementu i otrzymano rozwiązania ściśle w zakresie statyki oraz przybliżone wyniki w zagadnieniu drgań własnych. Wykazano dobrą zbieżność elementu w drugim typie zadań.

Słowa kluczowe: metoda elementów skończonych, łuk o średniej grubości

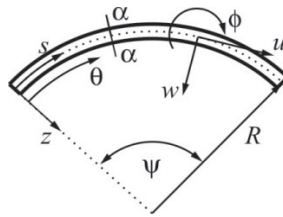
WSTĘP

Budowa zakrzywionych w płaszczyźnie elementów skończonych stanowi tematykę interesującą wielu badaczy. W ciągu ostatnich lat powstało wiele prac podejmujących ten temat. Początkowe próby definiowania elementów łukowych nie przynosiły sukcesów, ponieważ otrzymywano elementy o zbyt dużej sztywności na zginanie i ścinanie. Obserwowano także zjawiska blokady przemieszczeń, związane ze ścinaniem i ściskaniem/rozciąganiem. Pomimo wieloletnich badań ta problematyka jest nadal aktualna. Ostatnie kilka lat zaowocowało wieloma pracami, w których próbowano ulepszyć opracowane dotąd elementy skończone. W większości prac przyjmowano izoparametryczne aproksymacje wielomianowe pola przemieszczeń [Stolarski i Belytschko 1983], a stany pasożytnicze eliminowano poprzez zastosowanie całkowania zredukowanego. Wykorzystywano również elementy wielowęzłowe [Sengupta i Dasgupta 1997, Raveendranath i in. 2001, Saffari i in. 2008], mieszane modele MES [Zhang 1992, Kim i Kim 1998, Kulikov i Plotnikova 2004] oraz aproksymacji typu p [Leung i Zhu 2004].

Niniejsza praca przedstawia inne podejście do tej tematyki. Zaprezentowano element skończony łuku kołowego o tzw. fizycznych funkcjach kształtu, wyprowadzonych z przemieszczeniowych równań równowagi. Za punkt wyjścia do budowy funkcji kształtu przyjęto równania powierzchni walcowej o średniej grubości [Mazurkiewicz i Nagórski 1987]. W teorii powłok o średniej grubości przyjmuje się, że prostoliniowe włókna, normalne do środkowej powierzchni w konfiguracji początkowej, pozostają proste po deformacji. Ponadto naprężenia normalne, występujące na powierzchniach równoległych do środkowej powierzchni powłoki, są małe w porównaniu z innymi naprężeniami i mogą zostać pominięte. Uwzględnia się natomiast naprężenia styczne o rozkładzie przyjętym przez Reissnera dla płyt. W pracy Sitek [2006] zastosowano uproszczenia wspomnianych równań powłoki walcowej, co umożliwiło opis deformacji łuków o stałym promieniu krzywizny i dowolnym, lecz stałym po długości przekroju poprzecznym. Do uzyskania „uściślonych” funkcji kształtu wykorzystano związki konstytutywne ze sprzężeniem stanu membranowego i zginania.

POSTAWOWE RÓWNANIA ŁUKU KOŁOWEGO O ŚREDNIEJ GRUBOŚCI

Rozważany jest łuk kołowy o stałym promieniu R , kącie rozwarcia ψ , rozpiętości $s = \psi R$ i stałym przekroju poprzecznym A (rys. 1), dla którego zostaną podane zależności opisujące przemieszczenia, odkształcenia oraz naprężenia.



Rys. 1. Składowe przemieszczenia w łuku kołowym
Fig. 1. Displacement components in a circular arch

Przyjęto, że przemieszczenie dowolnego punktu przekroju o współrzędnej $z \in \langle -0,5h; 0,5h \rangle$ (gdzie h – wysokość przekroju poprzecznego) można uzależnić od przemieszczenia punktu leżącego na osi obojętnej w następujący sposób:

$$v_1(\theta, z) = u(\theta) - z\phi(\theta); \quad v_2(\theta, z) = w(\theta) \quad (1)$$

gdzie: θ – współrzędna kątowa,

$u(\theta)$ – przemieszczenie obwodowe punktu osi obojętnej,

$w(\theta)$ – przemieszczenie radialne punktu osi obojętnej,

$\phi(\theta)$ – kąt obrotu przekroju poprzecznego względem osi prostopadłej do płaszczyzny łuku.

Stan odkształcenia opisany jest przez trzy składowe stanu odkształcenia: odkształcenie membranowe, krzywiznę i odkształcenie postaciowe. Związki geometryczne mają postać:

$$\begin{aligned}\varepsilon(\theta) &= K\left(\frac{du(\theta)}{d\theta} - w(\theta)\right) \\ \kappa(\theta) &= -K\frac{d\phi(\theta)}{d\theta} \\ \gamma(\theta) &= K\left(u(\theta) + \frac{dw(\theta)}{d\theta}\right) - \phi(\theta)\end{aligned}\quad (2)$$

gdzie $K = 1/R$ – krzywizna łuku.

Zostaną tu wykorzystane związki konstytutywne ze sprzężeniem stanu membranowego i zginania. Wzory na siłę podłużną, moment zginający i siłę poprzeczną są następujące:

$$\begin{aligned}N(\theta) &= EA\varepsilon(\theta) + KEJ\kappa(\theta) \\ M(\theta) &= KEJ\varepsilon(\theta) + EJ\kappa(\theta) \\ Q(\theta) &= H\gamma(\theta)\end{aligned}\quad (3)$$

gdzie: E – moduł Younga,
 G – moduł Kirchhoffa,
 J – moment bezwładności przekroju,
 ν – współczynnik Poissona.

Lokalne równania równowagi łuku o średniej grubości przybierają postać:

$$\begin{aligned}K\left(\frac{dN(\theta)}{d\theta} - Q(\theta)\right) + p(\theta) &= 0 \\ K\left(N(\theta) + \frac{dQ(\theta)}{d\theta}\right) + q(\theta) &= 0 \\ K\frac{dM(\theta)}{d\theta} - Q(\theta) + m(\theta) &= 0\end{aligned}\quad (4)$$

gdzie: $p(\theta)$ – obciążenie obwodowe,
 $q(\theta)$ – obciążenie radialne,
 $m(\theta)$ – moment zginający.

Energię potencjalną łuku w zadaniach statyki oblicza się jako sumę energii sprężystej i pracy obciążenia zewnętrznego: $E_p = E_s + W$; $E_s = \int_s \tilde{E}_s ds$; $W = \int_s \tilde{W} ds$, gdzie gęstość energii sprężystej jest opisana zależnością:

$$\tilde{E}_s = \frac{1}{2} \left[\begin{aligned} &EAK^2 \left(\frac{du}{d\theta} - w \right)^2 + EJK^2 \left(\frac{d\phi}{d\theta} \right)^2 - 2EJ \frac{d\phi}{d\theta} K^3 \left(\frac{du}{d\theta} - w \right) + \\ &+ H \left(Ku + K \frac{dw}{d\theta} - \phi \right)^2 \end{aligned} \right] \quad (5a)$$

a gęstość pracy obciążeń zewnętrznych

$$\tilde{W} = pu + qw + m\phi \quad (5b)$$

Uwzględnienie masy łuku pozwala zapisać wzór na energię kinetyczną układu $E_k = \int_s \tilde{E}_k ds$, przy czym gęstość energii kinetycznej:

$$\tilde{E}_k = \frac{1}{2} \left[\rho_0 (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \rho_2 \dot{\phi}^2 \right] \quad (5c)$$

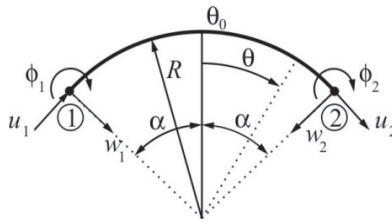
gdzie: $\rho_0 = \int_A \rho dA$; $\rho_2 = \int_A \rho z^2 dA$,

ρ – gęstość materiału,

kropka nad składowymi przemieszczeń oznacza pochodną po czasie t .

SFORMUŁOWANIE MES

Rozpatrzono płaski dwuwęzłowy element skończony łuku kołowego (Ar2Ph2) o promieniu R i kącie rozwarcia 2α . Wprowadzono zmienną bezwymiarową $\varphi = (\theta - \theta_0)/\alpha$, $\varphi \in \langle -1, 1 \rangle$ (rys. 2).



Rys. 2. Element skończony łuku kołowego o średniej grubości

Fig. 2. Finite element of a moderately thick arch

Celem niniejszej pracy jest uzyskanie ścisłych funkcji kształtu opisujących przemieszczenia wewnątrz elementu skończonego $\mathbf{u}^e = [u(\varphi), w(\varphi), \phi(\varphi)]^T$. Otrzymuje się je z rozwiązania przemieszczeniowego układu lokalnych równań równowagi (4) w obszarze elementu skończonego. Rząd układu determinuje wybór dwuwęzłowego elementu skończonego o sześciu parametrach węzłowych. Tymi parametrami są: przemieszczenie

obwodowe, przemieszczenie radialne i kąt obrotu względem osi prostopadłej do płaszczyzny łuku. Składowe wektora przemieszczeń węzłowych mają w związku z tym składowe $\mathbf{q}^e = [u_1, w_1, \phi_1, u_2, w_2, \phi_2]^T$.

Układ równań przemieszczeniowych otrzymuje się po podstawieniu w układzie lokalnych równań różniczkowych (4) związków geometrycznych (2) i konstytutywnych (3). Można go przedstawić w postaci macierzy:

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p \\ q \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

gdzie L_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) – operatory różniczkowe:

$$L_{11} = \frac{K\gamma_1}{\alpha} \frac{d^2}{d\varphi^2} - K\alpha; \quad L_{12} = -K(1 + \gamma_1) \frac{d}{d\varphi}; \quad L_{13} = -\frac{\gamma_2}{\alpha} \frac{d^2}{d\varphi^2} + \alpha$$

$$L_{21} = L_{12}; \quad L_{22} = -\frac{K}{\alpha} \frac{d^2}{d\varphi^2} + \gamma_1 K\alpha; \quad L_{23} = (1 + \gamma_2) \frac{d}{d\varphi}$$

$$L_{31} = L_{13}; \quad L_{32} = L_{23}; \quad L_{33} = \frac{\gamma_2}{\alpha} \frac{d^2}{d\varphi^2} - \alpha$$

Operatory te zawierają mnożniki $\gamma_1 = \frac{EA}{H}$, $\gamma_2 = \frac{EJK^2}{H}$, obrazujące wpływ właściwości fizycznych materiału, geometrii przekroju poprzecznego i krzywizny łuku na jego deformację.

Układ równań (6) rozwiązano za pomocą funkcji przemieszczeń. Wyznacznik macierzy operatorów różniczkowych przybiera postać:

$$\det[L_{ij}] = \frac{K\gamma_2(\gamma_2 - \gamma_1)}{\alpha^3} d^6 + \frac{2K\gamma_2(\gamma_2 - \gamma_1)}{\alpha} d^4 + K\alpha\gamma_2(\gamma_2 - \gamma_1) d^2$$

skąd wynika, że równanie charakterystyczne jest następujące:

$$\frac{d^6 Z(\varphi)}{d\varphi^6} + 2\alpha^2 \frac{d^4 Z(\varphi)}{d\varphi^4} + \alpha^4 \frac{d^2 Z(\varphi)}{d\varphi^2} = 0 \quad (7a)$$

przy czym $Z(\varphi)$ jest poszukiwaną funkcją przemieszczeń.

Rozwiązaniem równania (7a) jest funkcja:

$$Z(\varphi) = D_1 + D_2\varphi + D_3 \sin(\alpha\varphi) + D_4 \cos(\alpha\varphi) + D_5\varphi \sin(\alpha\varphi) + D_6\varphi \cos(\alpha\varphi) \quad (7b)$$

Składowe pola przemieszczeń można opisać wzorami:

$$u(\varphi) = L_{11}^* Z(\varphi); \quad w(\varphi) = L_{12}^* Z(\varphi); \quad \phi(\varphi) = L_{13}^* Z(\varphi) \quad (7c)$$

przy czym

$$\begin{aligned} L_{11}^* &= -\frac{\gamma_2}{\alpha^2} d^4 + \gamma_2(\gamma_1 - \gamma_2 - 2)d^2 - \gamma_1 \alpha^2 \\ L_{12}^* &= \frac{\gamma_2(\gamma_1 - \gamma_2)}{\alpha} d^3 - \alpha(\gamma_1 - \gamma_2) d \\ L_{13}^* &= -\frac{K\gamma_2}{\alpha^2} d^4 - K(\gamma_1 + \gamma_2) d^2 - K\gamma_1 \alpha^2 \end{aligned} \quad (7d)$$

są operatorami różniczkowymi utworzonymi jako dopełnienie algebraiczne elementów macierzy $[L_{ij}]$.

Po wykonaniu różniczkowania funkcji (7b) zgodnie z (7d) i podstawieniu do (7c) otrzymano:

$$\begin{aligned} u(\varphi) &= -\alpha^2 \gamma_1 C_1 - \alpha^2 \gamma_1 \varphi C_2 - \alpha^2 (1 + \gamma_2)(\gamma_1 - \gamma_2) \sin(\alpha\varphi) C_3 + \\ &\quad - \alpha^2 (1 + \gamma_2)(\gamma_1 - \gamma_2) \cos(\alpha\varphi) C_4 + \\ &\quad + \alpha(\gamma_1 - \gamma_2)[2\gamma_2 \cos(\alpha\varphi) - \alpha(1 + \gamma_2)\varphi \sin(\alpha\varphi)] C_5 + \\ &\quad - \alpha(\gamma_1 - \gamma_2)[2\gamma_2 \sin(\alpha\varphi) + \alpha(1 + \gamma_2)\varphi \cos(\alpha\varphi)] C_6 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} w(\varphi) &= -\alpha(\gamma_1 - \gamma_2) C_2 - \alpha^2 (1 + \gamma_2)(\gamma_1 - \gamma_2) \cos(\alpha\varphi) C_3 + \\ &\quad + \alpha^2 (1 + \gamma_2)(\gamma_1 - \gamma_2) \sin(\alpha\varphi) C_4 + \\ &\quad - \alpha(\gamma_1 - \gamma_2)[(1 + 3\gamma_2) \sin(\alpha\varphi) + \alpha(1 + \gamma_2)\varphi \cos(\alpha\varphi)] C_5 + \\ &\quad - \alpha(\gamma_1 - \gamma_2)[(1 + 3\gamma_2) \cos(\alpha\varphi) - \alpha(1 + \gamma_2)\varphi \sin(\alpha\varphi)] C_6 \end{aligned}$$

$$\phi(\varphi) = -K\alpha^2 \gamma_1 C_1 - K\alpha^2 \gamma_1 \varphi C_2 - 2K\alpha(\gamma_1 - \gamma_2)(\cos(\alpha\varphi) C_5 - \sin(\alpha\varphi) C_6)$$

Uwzględnienie składowych wektora \mathbf{q}^e jako warunków brzegowych pozwala na obliczenie stałych $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ w zależnościach (8) i uzyskanie ścisłych fizycznych funkcji kształtu. Macierz funkcji kształtu ma budowę blokową:

$$\mathbf{N}^e = [\mathbf{N}^1, \mathbf{N}^2], \quad \mathbf{N}^i = \begin{bmatrix} N_{11}^i & N_{12}^i & N_{13}^i \\ N_{21}^i & N_{22}^i & N_{23}^i \\ N_{31}^i & N_{32}^i & N_{33}^i \end{bmatrix} \quad (9)$$

Otrzymane funkcje kształtu mają skomplikowaną budowę i z tego względu nie wszystkie zostaną zapisane jawnie w niniejszej pracy. Przykładowo funkcja N_{11}^1 ma postać:

$$N_{11}^1 = \frac{1}{M}[A + B\varphi + C\sin(\alpha\varphi) + D\cos(\alpha\varphi) + E\varphi\sin(\alpha\varphi) + F\varphi\cos(\alpha\varphi)]$$

gdzie:

$$M = \gamma_1\alpha(1 + \gamma_2)^2(c^4 + \alpha^2) + 2s^3c(1 - \gamma_2)(\gamma_1 - \gamma_2) + 2\alpha(1 + \gamma_2)(\gamma_2s^2 - \gamma_1) + \gamma_1\alpha c^2(4\gamma_2 + 1 - \gamma_2^2),$$

$$A = -\gamma_1\alpha sc[sc(1 - \gamma_2) + \alpha(1 + \gamma_2)] - 2s^3c(\gamma_2 - \gamma_1),$$

$$B = \gamma_1\alpha sc(1 + \gamma_2)(sc + \alpha),$$

$$C = \frac{1}{2}(\gamma_2^2 - 1)\gamma_1\alpha c^2(\alpha c + s) - cs^2(1 - \gamma_2)(\gamma_1 - \gamma_2) + \gamma_1\alpha^2(\gamma_2c + 1) + \alpha s(1 + \gamma_2)\left[(\gamma_1 - \gamma_2) - \frac{1}{2}\gamma_1\alpha^2(\gamma_2 - 1)\right],$$

$$D = \alpha s^2c(1 + \gamma_2)\left[-\frac{1}{2}\gamma_1(1 + \gamma_2) + \gamma_2\right] + s(1 + \gamma_2)[c^2(\gamma_1 - \gamma_2) - (\gamma_1 + \gamma_2)] + \frac{1}{2}\gamma_1\alpha^2(1 + \gamma_2)^2(\alpha c + s) + \frac{1}{2}\gamma_1\alpha^2sc^2(1 - \gamma_2^2),$$

$$E = -\alpha s(c^2 + 1)(1 + \gamma_2)(\gamma_1 - \gamma_2) + \frac{1}{2}\gamma_1\alpha^2(\gamma_2 + 1)^2(c^3 + \alpha s) + \frac{1}{2}\gamma_1\alpha^2c(1 - \gamma_2^2),$$

$$F = \frac{1}{2}\gamma_1\alpha^2sc^2(1 - \gamma_2^2) - \frac{1}{2}\gamma_1\alpha^3c(1 + \gamma_2^2) - s\alpha^3\gamma_1\gamma_2,$$

przy czym $s = \sin(\alpha\varphi)$, $c = \cos(\alpha\varphi)$.

Warto zauważyć, że pomimo rozbudowanej postaci, przy $R \rightarrow \infty$, te funkcje kształtu można uproszczyć do funkcji kształtu elementu pręta Timoshenki o sześciu stopniach swobody:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} N_{11}^1 = \frac{1}{2}(1 - \varphi)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} N_{12}^1 = 0$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} N_{13}^1 = 0$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} N_{21}^1 = 0$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} N_{22}^1 = \frac{6EJ(1 - \varphi) + a^2H(2 - 3\varphi + \varphi^3)}{4(3EJ + a^2H)}$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} N_{23}^1 = \frac{3aEJ(1 - \varphi^2) + a^3H(1 - \varphi - \varphi^2 + \varphi^3)}{4(3EJ + a^2H)}$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} N_{31}^1 = 0$$

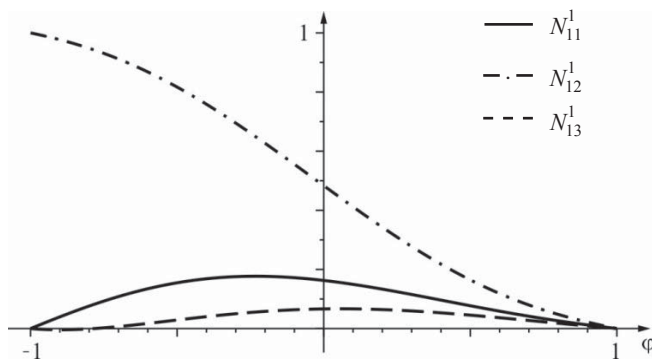
$$\lim_{R \rightarrow \infty} N_{32}^1 = \frac{3aH(-1 + \varphi^2)}{4(3EJ + a^2H)}$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} N_{33}^1 = \frac{6EJ(1 - \varphi) + a^2H(-1 - 2\varphi + 3\varphi^2)}{4(3EJ + a^2H)}$$

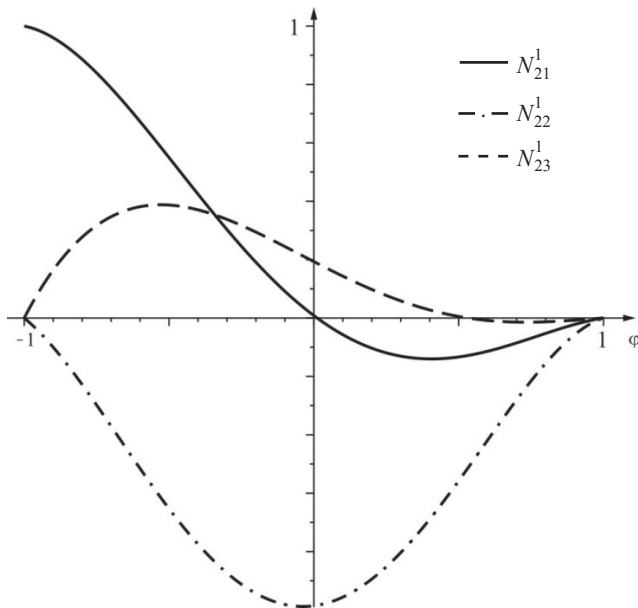
gdzie $a = Ra$ jest połową długości pręta.

Funkcje kształtu zawarte w podmacierzy \mathbf{N}^1 zgodnie z zapisem (9) przedstawiono na rysunkach 3–5, przy danych liczbowych: $R = 4,0$ m, $\alpha = \pi/6$, $b = 0,4$ m, $h = 0,6$ m, $E = 3 \cdot 10^{10}$ Pa, $\nu = 0,17$, $k = 5/6$.

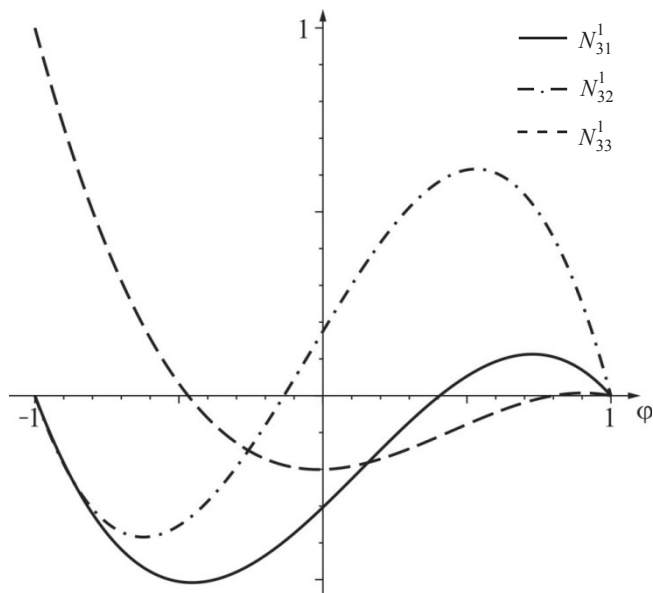
Przeanalizowano zmienność funkcji w zależności od kąta rozwarcia łuku 2α . Przyjęto przedział $\alpha \in \langle 0, 180^\circ \rangle$, co daje możliwość analizy elementów od prostoliniowych do kołowych. Jak widać na rysunkach 6–8, przy $\alpha = 0$ funkcje znajdujące się na diagonalu macierzy kształtu są liniowe. Można prześledzić, dla jakiej wartości kąta kończy się zakres stosowalności liniowych funkcji kształtu. Dla większości funkcji jest to tylko wartość $\alpha = 0$, ponieważ charakteryzują się dużą zmiennością w zależności od tego parametru. Aproksymacja liniowa w szerszym zakresie jest poprawna jedynie dla N_{11} . Warto również zauważyć, że dla małych kątów funkcje pokrywają się z funkcjami kształtu pręta Timoshenki (co zostało analitycznie dowiedzione wcześniej).



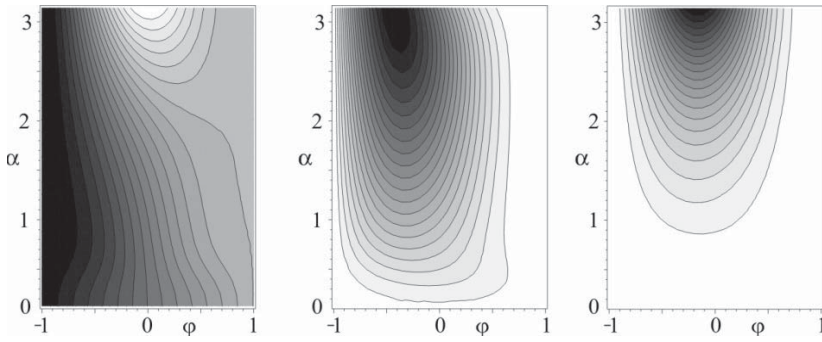
Rys. 3. Funkcje kształtu
Fig. 3. Shape functions



Rys. 4. Funkcje kształtu
Fig. 4. Shape functions

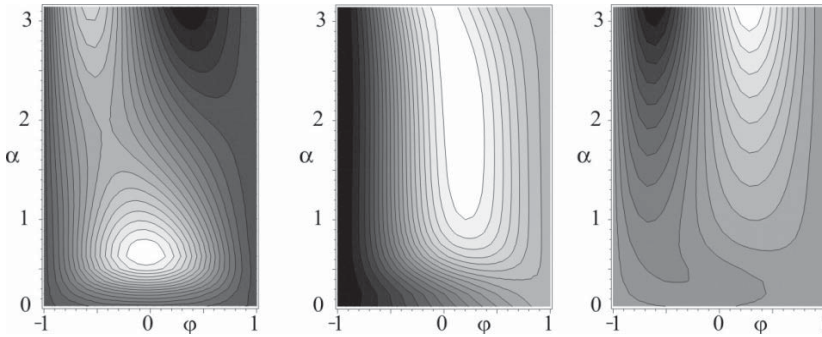


Rys. 5. Funkcje kształtu
Fig. 5. Shape functions



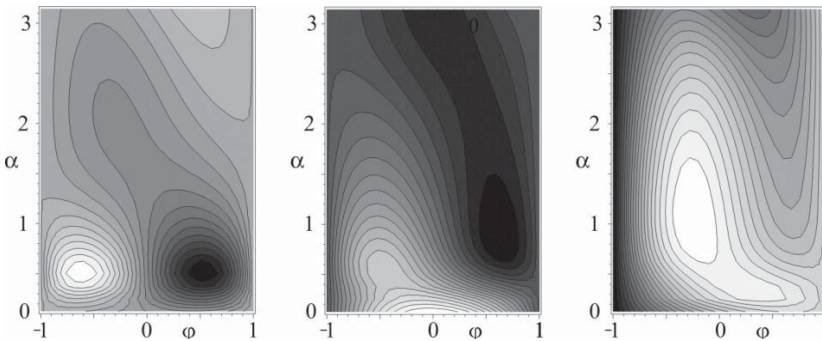
Rys. 6. Wpływ kąta rozwarcia 2α , $\alpha \in \langle 0, \pi \rangle$ na funkcje kształtu N_{11}^1 , N_{12}^1 , N_{13}^1

Fig. 6. Influence of subtended angle 2α , $\alpha \in \langle 0, \pi \rangle$ on shape functions N_{11}^1 , N_{12}^1 , N_{13}^1



Rys. 7. Wpływ kąta rozwarcia 2α , $\alpha \in \langle 0, \pi \rangle$ na funkcje kształtu N_{21}^1 , N_{22}^1 , N_{23}^1

Fig. 7. Influence of subtended angle 2α , $\alpha \in \langle 0, \pi \rangle$ on shape functions N_{21}^1 , N_{22}^1 , N_{23}^1



Rys. 8. Wpływ kąta rozwarcia 2α , $\alpha \in \langle 0, \pi \rangle$ na funkcje kształtu N_{31}^1 , N_{32}^1 , N_{33}^1

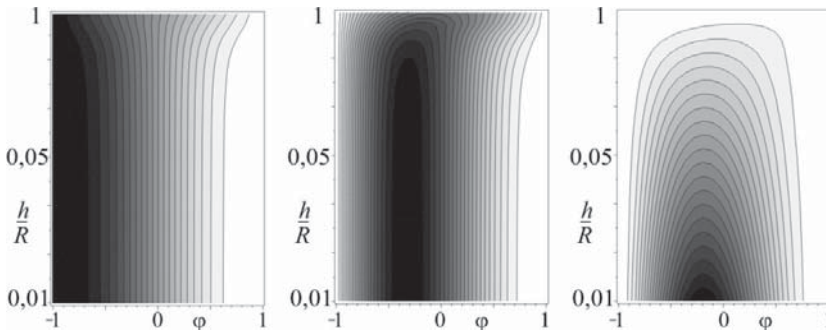
Fig. 8. Influence of subtended angle 2α , $\alpha \in \langle 0, \pi \rangle$ on shape functions N_{31}^1 , N_{32}^1 , N_{33}^1

Przeprowadzono analizę zależności funkcji kształtu od stosunku wysokości przekroju do promienia łuku. Przyjmuje się [Mazurkiewicz i Nagórski 1987], że teoria dźwigarów cienkich obowiązuje dla $h/s < 1/50$. Dźwigary, których wymiary spełniają warunek $h/s \in (1/50, 1/5)$, należą do dźwigarów o średniej grubości. Na rysunkach 9–11 można zauważyć dwa przedziały zmienności funkcji: $\langle 0, 0,1 \rangle$ i $\langle 0,1, 1 \rangle$. Postać funkcji kształtu w pierwszym przedziale znacznie różni się od postaci z przedziału drugiego. Otrzymane wyniki są wobec tego zgodne z klasyfikacją dźwigarów cienkich i o średniej grubości.

Na bazie otrzymanych funkcji można wyprowadzić zależności na ścisłą macierz sztywności \mathbf{K}^e i wektor obciążeń węzłowych \mathbf{Q}^e oraz uściśloną macierz mas \mathbf{M}^e .

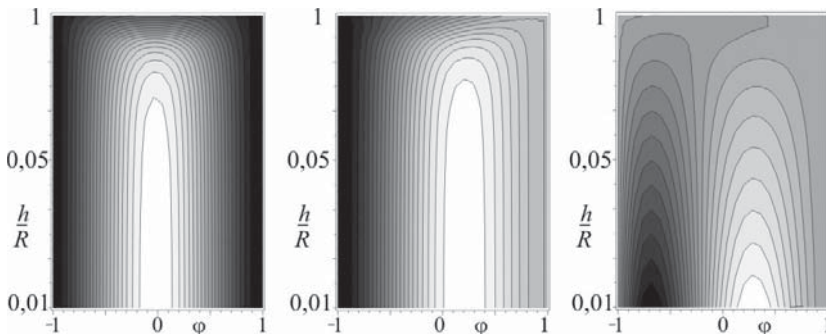
Zgodnie z równaniami (2), zależność między odkształceniami a przemieszczeniami wyraża się wzorem $\boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{B}^e \mathbf{q}^e = \mathbf{D}\mathbf{N}^e \mathbf{q}^e$ z macierzą operatorów różniczkowych:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} Kd/\alpha & -K & 0 \\ 0 & 0 & -Kd/\alpha \\ K & Kd/\alpha & -1 \end{bmatrix} \quad (10)$$



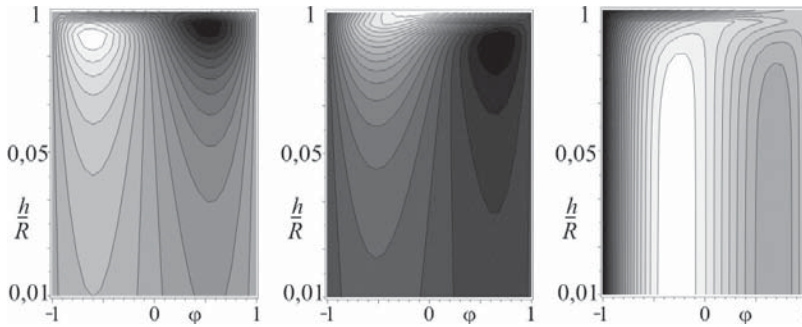
Rys. 9. Wpływ stosunku wysokości przekroju do promienia łuku $h/R \in \langle 0,01, 1 \rangle$ na funkcje kształtu $N_{11}^1, N_{12}^1, N_{13}^1$

Fig. 9. Influence of thickness to radius ratio $h/R \in \langle 0,01, 1 \rangle$ on shape functions $N_{11}^1, N_{12}^1, N_{13}^1$



Rys. 10. Wpływ stosunku wysokości przekroju do promienia łuku $h/R \in \langle 0,01, 1 \rangle$ na funkcje kształtu $N_{21}^1, N_{22}^1, N_{23}^1$

Fig. 10. Influence of thickness to radius ratio $h/R \in \langle 0,01, 1 \rangle$ on shape functions $N_{21}^1, N_{22}^1, N_{23}^1$



Rys. 11. Wpływ stosunku wysokości przekroju do promienia łuku $h/R \in \langle 0,01, 1 \rangle$ na funkcje kształtu $N_{31}^1, N_{32}^1, N_{33}^1$

Fig. 11. Influence of thickness to radius ratio $h/R \in \langle 0,01, 1 \rangle$ on shape functions $N_{31}^1, N_{32}^1, N_{33}^1$

Zakładając, że mamy do czynienia z materiałem liniowo-sprężystym, można zapisać równania konstytutywne (3) w postaci $\boldsymbol{\sigma}^e = \mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon}^e$, z macierzą sprężystości:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} EA & KEJ & 0 \\ KEJ & EJ & 0 \\ 0 & 0 & H \end{bmatrix} \quad (11)$$

Macierz sztywności elementu skończonego Ar2Ph2 obliczono według wzoru:

$$\mathbf{K}^e = \int_s \mathbf{B}^{eT} \mathbf{E} \mathbf{B}^e ds \quad (12)$$

Wektor zastępczych obciążeń węzłowych wyznaczono z zależności:

$$\mathbf{Q}^e = \int_s \mathbf{N}^{eT} \mathbf{p}^e ds \quad (13)$$

przy czym $\mathbf{p}^e = [p \ q \ m]^T$.

Obliczono również konsekwentną macierz mas ze wzoru:

$$\mathbf{M}^e = \int_s \mathbf{N}^{eT} \mathbf{m}^e \mathbf{N}^e ds \quad (14)$$

gdzie: $\mathbf{m}^e = \text{diag}(\mu_0 \ \mu_0 \ \mu_2)$, $\mu_0 = \rho A$, $\mu_2 = \rho J$.

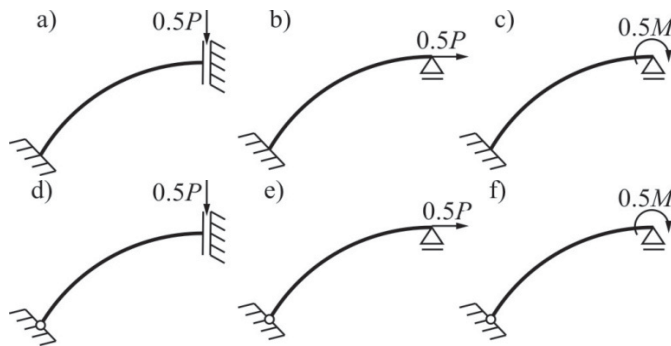
Jawna postać składowych powyższych macierzy nie zostaje tu podana ze względu na ich skomplikowaną budowę.

Macierz sztywności elementu skończonego Ar2Ph2 wyprowadzono ściśle z równań różniczkowych łuku kołowego. Dlatego daje ściśle rozwiązania w zadaniach statyki. Macierz mas obliczono natomiast zgodnie ze standardową procedurą MES jako macierz konsekwentną. W związku z tym w przypadku rozwiązywania zagadnień drgań własnych można otrzymać rozwiązania przybliżone.

Można pokazać, że element łukowy Ar2Ph2 nadaje się do modelowania prętów prostych. W przejściu granicznym, przy $R \rightarrow \infty$, wyprowadzone powyżej równania na: macierz sztywności (12), wektor obciążeń węzłowych (13) i macierz mas (14), przybierają postać odpowiednich macierzy elementu skończonego pręta prostego średniej grubości o sześciu stopniach swobody i długości $2a = 2aR$ [Sitek 2006].

PRZYKŁADY OBLICZEŃ – STATYKA

Element skończony Ar2Ph2 zastosowano do rozwiązania kilku zadań statyki. Wybrano zadania różniące się warunkami brzegowymi i rodzajem obciążenia. Dane liczbowe przyjęte w zadaniu: $R = 4,0$ m, $\psi = 2\pi/3$, $b = 0,4$ m, $h = 0,6$ m, $E = 3 \cdot 10^{10}$ Pa, $\nu = 0,17$, $k = 5/6$. Obciążenie konstrukcji $P = 10^3$ N, $M = 10^3$ Nm. Ze względu na symetrię lub antysymetrię zadań rozwiązywano schematy połówkowe (przy rozpiętości łuku $0,5\psi$) z odpowiednimi warunkami brzegowymi (rys. 12).



Rys. 12. Schematy obliczeniowe wykorzystane w analizie statycznej łuków
Fig. 12. Computational schemes used in static analysis of arches

W tabeli 1 podano znormalizowane wartości niezerowych przemieszczeń węzłowych obliczonych jako $\bar{u} = u/s$, $\bar{w} = w/s$, $\bar{\phi} = \phi/\psi$. Wyniki otrzymane przy użyciu jednego elementu skończonego prezentowanego w tej pracy porównano z wynikami przedstawionymi w pracy Litewki i Rakowskiego [1997] (wykorzystano w niej 4-elementową siatkę podziału), otrzymanymi za pomocą pakietu obliczeniowego ABAQUS (zastosowano dyskretyzację dziesięcioelementową z dwuwęzłowych elementów belkowych B21 [ABAQUS 6.8-3 Documentation]) oraz z przybliżonym rozwiązaniem otrzymanym metodą sił przy założeniach $EA \rightarrow \infty$ i $H \rightarrow \infty$.

Element skończony Ar2Ph2 daje wyniki ściśle (zastosowano 1 element skończony). Ze względu na krzywiznę pręta elementy belkowe B21, jako elementy o liniowych funkcjach kształtu, dopiero przy gęstej siatce dyskretnej dają wyniki zbliżone do analitycznych. Rozwiązania przedstawione w pracy Litewki i Rakowskiego [1997] są wynikiem podziału modelu na cztery elementy skończone i w większości przypadków dają większy błąd niż element Ar2Ph2.

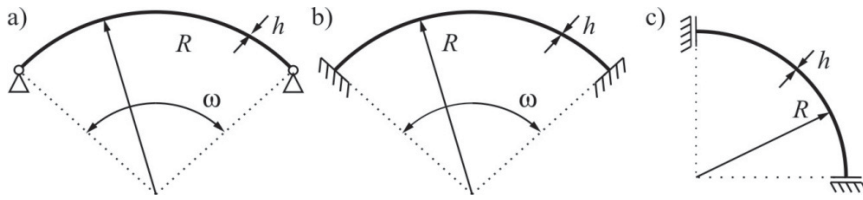
Tabela 1. Wyniki obliczeń w zadaniach statyki, podano liczbę wykorzystanych elementów skończonych n Table 1. Results of static computations, number of finite elements used n is given

Schemat Scheme	Wielkość Volume	Litewka i Rakowski [1997] ($n = 4$)	B21 ($n = 10$)	Metoda sił Force method	Ar2Ph2 ($n = 1$)
a	$\bar{w}_2 [\times 10^{-6}]$	0,249	0,278	0,242	0,249
b	$\bar{u}_2 [\times 10^{-6}]$	0,125	0,125	0,114	0,124
	$\bar{\phi}_2 [\times 10^{-6}]$	-0,378	-0,374	-0,368	-0,371
c	$\bar{u}_2 [\times 10^{-6}]$	-0,095	-0,110	-0,092	-0,093
	$\bar{\phi}_2 [\times 10^{-6}]$	1,082	1,079	1,037	1,084
d	$\bar{\phi}_1 [\times 10^{-6}]$	-	-0,330	-0,341	-0,330
	$\bar{w}_2 [\times 10^{-6}]$	0,305	0,280	0,255	0,279
e	$\bar{\phi}_1 [\times 10^{-6}]$	-	1,082	1,089	1,074
	$\bar{u}_2 [\times 10^{-6}]$	0,288	0,284	0,277	0,281
	$\bar{\phi}_2 [\times 10^{-6}]$	-0,806	-0,797	-0,812	-0,793
f	$\bar{\phi}_1 [\times 10^{-6}]$	-	-0,718	-0,739	-0,719
	$\bar{u}_2 [\times 10^{-6}]$	-0,202	-0,230	-0,203	-0,198
	$\bar{\phi}_2 [\times 10^{-6}]$	1,361	1,360	1,338	1,367

PRZYKŁADY OBLICZEŃ – DRGANIA WŁASNE

Element skończony Ar2Ph2 wykorzystano również do analizy drgań własnych konstrukcji łukowych. W obliczeniach wykorzystano konsekwentną macierz mas (wzór 14). Jako że nie jest ona ściśła, w tego typu zadaniach otrzymuje się wyniki przybliżone. Ustalenie siatki podziału wystarczającej do uzyskania wyników z założoną dokładnością przeprowadzono, opierając się na analizie zbieżności.

Sprawdzano zbieżność pierwszej i drugiej częstości drgań własnych w schemacie obliczeniowym łuku przegubowo podpartego (rys. 13a). Przyjęto dane liczbowe: $R = 1$ m; $h = 0,2$ m; $\psi = \pi/6$; $E = 3 \cdot 10^{10}$ Pa; $\nu = 0,3$; $k = 5/6$; $\rho = 2000$ kg·m⁻³. W tabeli 2 podano uzyskane wartości przy 2, 4, 8 i 16-elementowej siatce podziału. Ponadto przyjęto rozwiązanie przy najgęstszej siatce jako porównawcze i obliczono różnicę względną pozostałych wyników: $e_i^{I/II} = (\omega_i^{I/II} - \omega_{16}^{I/II}) / \omega_{16}^{I/II} \cdot 100\%$.



Rys. 13. Schematy obliczeniowe wykorzystane w zadaniach drgań własnych łuków

Fig. 13. Computational schemes used in free vibrations analysis of arches

Tabela 2. Dwie pierwsze częstości drgań własnych łuku przegubowo podpartego (rys. 13a)

Table 2. The lowest two natural frequencies of a hinged-hinged arch (Fig. 13a)

Liczba ES	2	4	8	16
ω_i^I	7549,8	7379,8	7339,4	7329,6
ω_i^{II}	23848	20023	19403	19245
e_i^I	3,00	0,68	0,13	0
e_i^{II}	23,91	4,04	0,82	0

Z tego porównania wynika, że wystarczy przyjąć podział łuku na 4 elementy skończone, by uzyskać różnicę względną mniejszą niż 1% w przypadku pierwszej częstości własnej i mniejszą niż 5% dla drugiej częstości. Taką dyskretyzację przyjmowano w kolejnych zadaniach.

Rozwiązano dwa zadania drgań łuków o średniej grubości: przegubowo podpartego i utwierdzonego na obydwu końcach (rys. 13a i 13b). Wyniki otrzymane przy podziale łuku na 4 elementy skończone Ar2Ph2 porównano z rozwiązaniem pokazanym w pracy Leung i Zhu [2004] oraz przy podziale na n elementów skończonych prętowych B21 o liniowych funkcjach kształtu z programu ABAQUS (liczbę elementów zastosowanych w każdym przypadku podano w tab. 3).

Tabela 3. Wpływ kąta rozwarcia łuku na pierwszą częstość drgań własnych łuku kołowego przegubowo podpartego (rys. 13a), podano liczbę wykorzystanych elementów skończonych n Table 3. Influence of subtended angle on first natural frequency of a hinged-hinged arch (Fig. 13a), number of finite elements used n is given

ψ	Ar2Ph2 ($n = 4$)	Leung i Zhu [2004]	B21	
			ω^I	n
30°	2340,33	2339,82	2348,2	10
90°	229,73	229,66	230,13	20
120°	115,68	115,64	115,98	20
180°	37,853	37,86	37,939	30
300°	4,1840	4,18	4,1889	40

Rozpatrzono kilka kątów rozwarcia ψ łuku przy stałych pozostałych cechach geometrycznych i fizycznych modelu. Przyjęto dane liczbowe: $R = 12 \text{ in} = 0,3048 \text{ m}$; $h = 0,25 \text{ in} = 0,00635 \text{ m}$; $k = 0,8497$; $\rho = 0,2736 \text{ slugs ft}\cdot\text{in}^{-4} = 2,925 \cdot 10^5 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$; $\nu = 0,3$; $E = 3,04 \cdot 10^7 \text{ psi} = 2,096 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$.

Wyniki zawarte w tabelach 3 i 4 świadczą o przewadze elementu Ar2Ph2 nad elementem B21 w tego typu zadaniach. Niezależnie od rozpiętości łuku każdy przypadek policzono z użyciem tylko czterech elementów Ar2Ph2. Natomiast w przypadku elementu B21 wraz ze wzrostem rozpiętości należało zastosować coraz gęstszą siatkę podziału. Dopiero zachowanie stałej długości elementu skończonego gwarantowało otrzymanie wyniku zbliżonego do poprawnego. Rozwiązanie z wykorzystaniem elementu skończonego z pracy Leung i Zhu [2004] wydaje się być zaniżone dla mniejszych kątów ψ .

Tabela 4. Wpływ kąta rozwarcia łuku na pierwszą częstość drgań własnych łuku kołowego utwierdzonego (rys. 13b), podano liczbę wykorzystanych elementów skończonych n
Table 4. Influence of subtended angle on first natural frequency of a hinged-hinged arch (Fig. 13b), number of finite elements used n is given

ψ	Ar2Ph2 ($n = 4$)	B21	
		ω^f	n
30°	2657,79	2642,4	10
90°	377,78	377,97	20
120°	197,85	198,23	20
180°	73,195	73,338	30
300°	16,802	16,816	40

Rozpatrzono drgania własne poprzeczne symetryczne pierścienia kołowego zachodzące w płaszczyźnie łuku. Obliczono pierwszą częstotliwość drgań własnych symetrycznych. Ze względu na symetrię zadania do obliczeń przyjęto schemat statyczny ćwiartki pierścienia z odpowiednimi warunkami brzegowymi (rys. 13c).

Pręt podzielono na dwa elementy skończone Ar2Ph2. Rozwiązanie porównano z dwoma rozwiązaniami numerycznymi (obliczeniami zawartymi w pracy Saffari i in. [2008] i modelem złożonym z 20 elementów skończonych B21) oraz z rozwiązaniem analitycznym z pozycji Weaver i inni [1990]. Sprawdzono, jak będą się zmieniać wyniki w zależności od proporcji h/R .

Przyjęto dane liczbowe: $R = 12 \text{ in} = 0,3048 \text{ m}$; $h = 0,0375 \text{ in} = 0,0009525 \text{ m}$; $\nu = 0,3$; $E = 19 \cdot 10^6 \text{ lbf}\cdot\text{in}^{-2} = 1,31 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$; $\rho = 0,171 \cdot 10^{-3} \text{ lb}\cdot\text{in}^{-3} = 1827 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$; $k = 0,85$.

W tabeli 5 zapisano częstotliwości drgań własnych przy różnych stosunkach h/R . Ustalono dzięki temu, czy rozpatrywany element skończony dobrze zamodeluje drgania nie tylko łuków o średniej grubości, ale również cienkich. Jak można zauważyć, element Ar2Ph2 w przypadku najcieńszego analizowanego pręta, przy $h/R = 1/150$, dał wynik zgodny z analitycznym. Podobne rezultaty otrzymano dla przypadku $h/R = 1/100$ i $h/R = 1/50$. Rozbieżności w wynikach przy większych stosunkach h/R wynikają z tego, że w pracy Weaver i inni [1990] rozważano drgania łuków cienkich, nie uwzględniając wpływu sił poprzecznych na drgania konstrukcji.

Tabela 5. Wpływ stosunku h/R na pierwszą częstotliwość drgań własnych poprzecznych symetrycznych pierścienia kołowego, podano liczbę wykorzystanych elementów skończonych n Table 5. Influence of h/R ratio on first symmetric natural frequency of a circular ring, number of finite elements used n is given

h/R	Ar2Ph2 ($n = 2$)	Saffari i in. [2008] ($n = 2$)	B21 ($n = 20$)	Weaver i in. [1990]
1/5	670,73	671,52	667,70	684,979
1/10	340,83	340,92	340,59	342,489
1/20	171,07	171,1	171,17	171,244
1/50	68,49	68,49	68,569	68,489
1/100	34,25	34,24	34,292	34,249
1/150	22,83	22,83	22,862	22,833

Porównując dane z tabeli 5, można również zauważyć dużą zgodność wyników z przedstawionymi w pracy Saffari i inni [2008]. Ponadto ponownie elementy prętowe B21 wymagają najgęstszej siatki dyskretnej do zamodelowania zadania i uzyskania wartości bliskich uzyskanym elementom Ar2Ph2. Wraz ze wzrostem wartości h/R częstotliwości z trzeciej kolumny coraz bardziej odbiegają od pozostałych przy założonym podziale na 20 elementów.

PODSUMOWANIE

Przedmiotem niniejszej pracy jest budowa łukowego elementu skończonego o fizycznych funkcjach kształtu w sformułowaniu przemieszczeniowym. Punktem wyjścia do rozważań były równania powłoki walcowej o stałej grubości. Dokonano przejścia do równań łuku kołowego i wprowadzono uogólnienie, dzięki któremu można analizować pręty o dowolnym przekroju poprzecznym. Zastosowano związki konstytutywne, uwzględniające sprzężenie stanu membranowego i zginania. Wyprowadzone funkcje fizyczne, mimo że mają skomplikowaną formę algebraiczno-trygonometryczną, przechodzą w odpowiednie funkcje kształtu elementu pręta Timoshenki przy $R \rightarrow \infty$. Analiza funkcji kształtu od α wykazała dużą zmienność charakteru funkcji wraz ze wzrostem wartości kąta. Wykazuje to przewagę wyprowadzonych funkcji kształtu oraz potwierdza niewielki zakres stosowalności funkcji liniowych. Na podstawie analizy funkcji fizycznych od stosunku h/R pokazano, że mogą one zostać wykorzystane do modelowania również dźwigarów cienkich.

Uzyskana ścisła macierz sztywności i wektor obciążeń węzłowych oraz konsekwentna macierz mas posłużyły do rozwiązania kilku zadań statyki i drgań własnych. Otrzymano dokładne wartości poszukiwanych przemieszczeń od sił skupionych. Rozwiązano zagadnienie własne łuku przy kilku różnych warunkach brzegowych. Wyniki skonfrontowano z danymi opublikowanymi przez innych autorów. We wszystkich przypadkach, niezależnie od parametrów α i h/R , prezentowany tu element skończony dał najlepsze rezultaty.

PIŚMIENNICTWO

- ABAQUS 6.8-3 Documentation
- Kim J.G., Kim Y.Y., 1998. A new higher-order hybrid-mixed curved beam element, *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 43, 925–940.
- Kulikov G.M., Plotnikova S.V., 2004. Non-conventional non-linear two-node hybrid stress-strain curved beam elements. *Finite Elements in Analysis and Design* 40, 1333–1359.
- Leung A.Y.T., Zhu B., 2004. Fourier p-elements for curved beam vibrations. *Thin-Walled Structures* 42, 39–57.
- Litewka P., Rakowski J., 1997. An efficient curved beam finite element. *Int. J. Numer. Meth. Engng* 40, 2629–2652.
- Mazurkiewicz Z., Nagórski R., 1987. *Powłoki obrotowe sprężyste*. PWN, Warszawa.
- Raveendranath P., Sigh G., Venkateswara Rao G., 2001. A three-noded shear-flexible curved beam element based on coupled displacement field interpolations. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 51, 85–101.
- Saffari H., Tabatabaei R., Mansouri S.H., 2008. Vibration analysis of circular arch element using curvature. *Shock and Vibration* 15, 481–492.
- Sengupta D., Dasgupta S., 1997. Static and dynamic applications of a five noded horizontally curved beam element with shear deformation. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 40, 1801–1819.
- Sitek M., 2006. *Fizyczne funkcje kształtu w analizie statycznej i dynamicznej łuków kołowych o średniej grubości*. Praca magisterska. Wydział Inżynierii Lądowej, Politechnika Warszawska, Warszawa.
- Stolarski H., Belytschko T., 1983. Shear and membrane locking in curved C-0 elements. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* 41, 279–296.
- Weaver W., Timoshenko S., Young D., 1990. *Vibration problems in engineering*. Wiley, New York.
- Zhang Z., 1992. A note on the hybrid-mixed C-0 curved beam elements. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* 95, 243–252.

FINITE ELEMENT OF MODERATELY THICK ARCH – STATICS AND FREE VIBRATIONS

Abstract. The present paper is dedicated to the finite element of moderately thick arch (Ar2Ph2). So-called “physical” shape functions, stiffness matrix, load vector and mass matrix are derived. The shape functions are based on the displacement differential equations of the arch. The finite element is exact for static analysis. Convergence analysis for free vibration is presented with promising results.

Key words: finite element method, moderately thick arch

Zaakceptowano do druku – Accepted for print: 20.02.2013