

ROZWIĄZYWANIE CIENKICH PŁYT ŻEBROWANYCH METODĄ ELEMENTÓW KONSTRUKCYJNYCH

Mykhaylo Delyavskyy, Aleksandra Niespodziana,
Dariusz Buchaniec

Uniwersytet Technologiczno-Przyrodniczy w Bydgoszczy

Streszczenie. W pracy podjęto próbę wymodelowania elementu płytowo-żebrowego. Współdziałanie płyty i żebra zapewnia się, spełniając równania równowagi statycznej sił normalnych i stycznych występujących na dolnej powierzchni płyty i górnej powierzchni żebra. Następnie uogólnia się opis elementu płytowego, uwzględniając nieznanne przemieszczenia poziome. Otrzymane równanie ugięcia elementu płytowego zawiera nieznanne siły oddziaływania dolnej powierzchni płyty. Rozwiązaniem równania jest suma całki ogólnej równania jednorodnego i całki szczególnej równania niejednorodnego. Całkę ogólną przyjęto w postaci symetrycznej. Rozwiązanie szczególne wyznacza się, dokonując rozkładów w szeregi funkcyjne obciążeń płyty i sił współdziałania. W kolejnym etapie modelowania powtarza się ten proces dla żebra. Połączenie tych dwu opisów – płyty i żebra, definiuje model elementu płytowo-żebrowego.

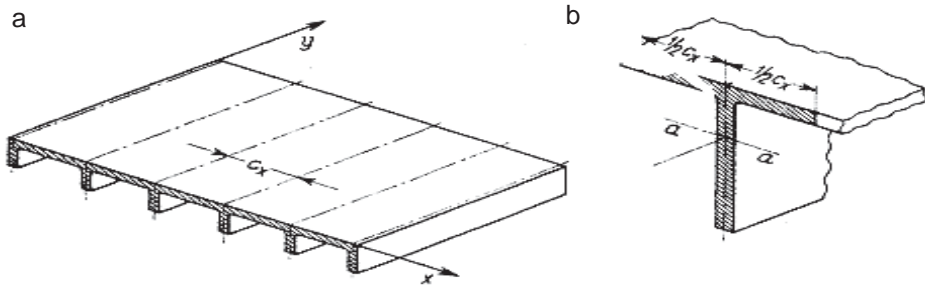
Słowa kluczowe: płyty żebrowane, belka Eulera, metoda elementów konstrukcyjnych, płyty niejednorodne

WSTĘP

Aktualność wybranego tematu

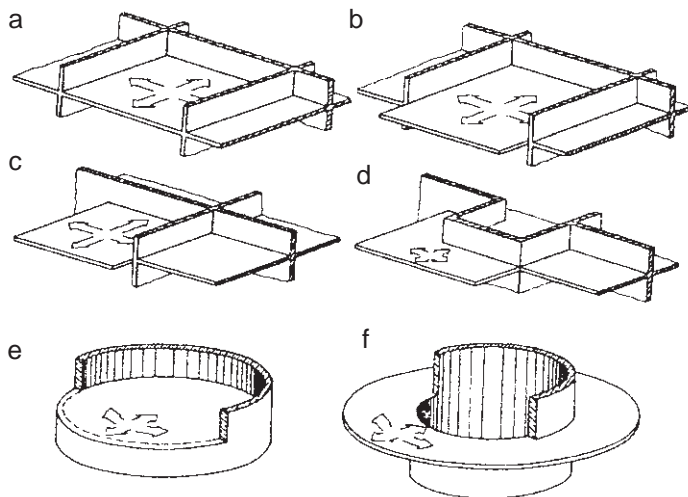
W wielu projektach i realizacjach inżynierskich stosuje się płaskie dźwigary powierzchniowe, które ulegają wygięciu. W celu zwiększenia sztywności na zginanie płyty cienkie wzmacnia się prętami (nazywając je płytami żelbetowymi) lub łączy, najczęściej jednostronnie, z innymi elementami. Takie układy nazywa się płytowo-żebrowymi, gdy ich zasadniczymi elementami są płyta i żebro (czyli tzw. belki drugorzędne), lub płytowo-kratowymi bądź dźwigarami zespolonymi (płyta żelbetowa i dźwigar stalowy). Na rysunkach 1 i 2 przedstawiono kilka schematów płyt żebrowanych stosowanych w budownictwie.

Adres do korespondencji – Corresponding author: Mykhaylo Delyavskyy, Aleksandra Niespodziana, Dariusz Buchaniec, Uniwersytet Technologiczno-Przyrodniczy, Katedra Mechaniki Konstrukcji, al. Prof. S. Kaliskiego 7, 85-789 Bydgoszcz, e-mail: delyavmv@mail.atr.bydgoszcz.pl



Rys. 1. Płyta żebrowana jednokierunkowo [Brzoska 1965]

Fig. 1. Unidirectional ribbed plate



Rys. 2. Przykładowe kształty płyt żebrowanych wielokierunkowo zbrojonych [Starosolski 2005]

Fig. 2. Example shapes of multidirectional reinforced ribbed plates

Zagadnienie współpracy płyty z belką jest istotne, ponieważ przy obciążeniu konstrukcji jednocześnie występują dwa związane stany – giętny i tarczowy, wywołane niesymetrią struktury konstrukcji. Rozwiązanie tego problemu w sposób analityczny jest uciążliwe, ponieważ wiąże się z trudnościami matematycznymi.

Celem pracy jest przedstawienie nowej, analityczno-numerycznej metody rozwiązania cienkich płyt żebrowanych obciążonych dowolnie przy różnych warunkach brzegowych.

Istota metody elementów konstrukcyjnych

Obecnie powszechnie stosuje się metodę elementów skończonych do dyskretyzacji przestrzennej konstrukcji inżynierskich. Metoda ta zyskała wielu sympatyków i jest najlepiej oprogramowana. Można jednak dostrzec pewne jej wady, jak na przykład dokładność

obliczeń. W pracy spróbowano zbudować nową analityczno-numeryczną metodę rozwiązywania zagadnień inżynierskich, która w istocie byłaby zbliżona do metody elementów skończonych, lecz odróżniała się od niej większą dokładnością obliczeń. Metodę tę nazywano metodą elementów konstrukcyjnych (MEK), ponieważ z elementów konstrukcyjnych buduje się model układu, spełniający warunki brzegowe na odpowiednich krawędziach elementów. Metoda rozwiązywania układów płytowo-prętowych, zwana metodą elementów konstrukcyjnych, składa się z następujących etapów:

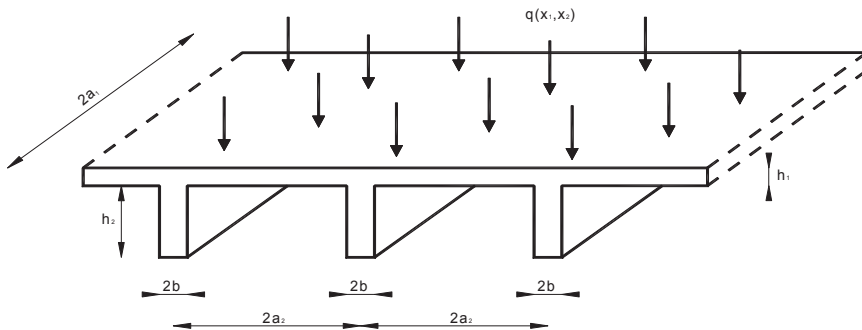
- podziału konstrukcji na elementy konstrukcyjne,
- budowy modelu matematycznego na poziomie elementu,
- modelowania konstrukcji za pomocą elementów konstrukcyjnych poprzez zapis wszystkich warunków brzegowych na krawędziach elementu,
- budowy i uwarunkowania globalnej macierzy układu,
- wyboru algorytmu rozwiązania układu równań granicznych.

W celu budowy matematycznego modelu płytowego elementu konstrukcyjnego należało opracować metodę rozwiązania cienkich płyt izotropowych obciążonych dowolnie przy różnych warunkach brzegowych. Metoda bazuje na rozwiązaniach pasma płytowego w ramach teorii sprężystości ciała ortotropowego [Delyavskyy 1995, Delyavskyy i in. 1999] i polega na: 1) wyrażeniu ugięcia płyty w postaci sumy iloczynów nieznanych funkcji od jednej zmiennej mnożonej przez funkcje trygonometryczne oraz od drugiej zmiennej mnożonej przez harmoniki, 2) określeniu funkcji kształtu i funkcji obciążenia ugięcia, przemieszczeń poziomych, momentów i sił tnących w płycie, 3) budowie macierzy kształtu wszystkich statycznych i kinematycznych charakterystyk płyty oraz 4) budowie i ortogonalizacji globalnej macierzy układu.

MODEL MATEMATYCZNY IZOTROPOWEJ PŁYTY ŻEBROWANEJ

Budowa elementu konstrukcyjnego

Należy rozważyć układ złożony z cienkiej płyty izotropowej wzmocnionej od spodu żebrami (rys. 3), następnie podzielić go na elementy zawierające część płyty i jedno żebro, nazwane elementami konstrukcyjnymi płytowo-żebrowymi. Można tu wyróżnić

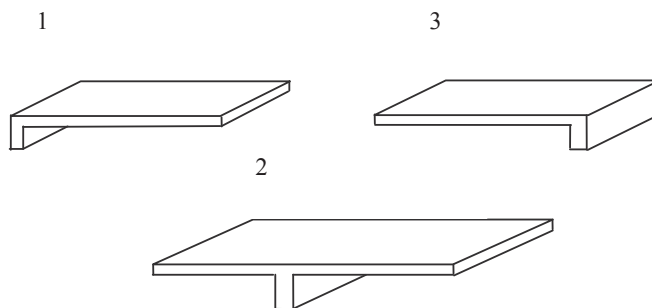


Rys. 3. Schemat płyty żebrowanej

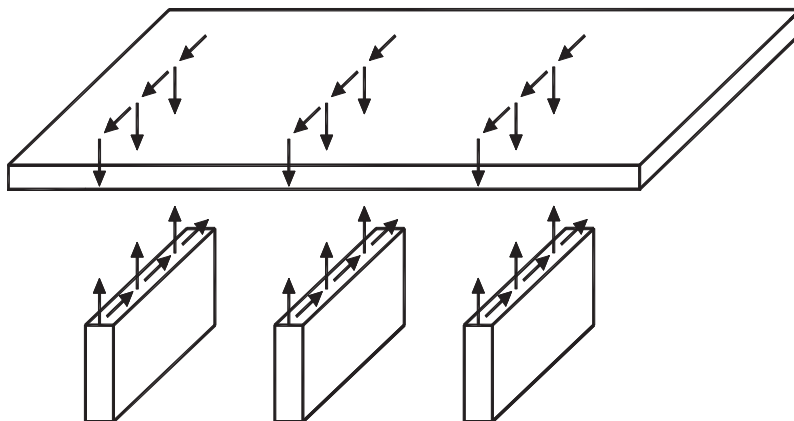
Fig. 3. Diagram of ribbed plate

następujące rodzaje elementów konstrukcyjnych (rys. 4): 1 – element lewostronnie żebrowany, 2 – środkowo żebrowany, 3 – prawostronnie żebrowany.

Przystępując do opisu analitycznego modelu, dzieli się go myślowo na płytę i żebro. W miejscu styku powierzchni płyty i żebra wyodrębnia się siły normalne i styczne. Powyższe wielkości statyczne reprezentują siły współdziałania płyty z żebrem (rys. 5).



Rys. 4. Rodzaje elementów konstrukcyjnych
Fig. 4. Different kinds of construction elements



Rys. 5. Schemat obciążenia siłami współdziałania
Fig. 5. Diagram of load of interaction forces

Siły przyłożone do powierzchni dolnej płyty oznacza się przez $S_{i3}^{(r)}(x_1, x_2)$, $i = 1 \div 3$, natomiast siły przyłożone do powierzchni górnej żebra – przez $\tau_{i3}^{(r)}(z_1)$, $i = 1 \div 3$. Za Buchaniec [2006] zakłada się, że siły te zmieniają się tylko wzdłuż żebra, a w kierunku poprzecznym są stałe. Przyjmuje się również, że na płycie występują tylko siły współdziałania w miejscu styku z żebrem, a w pozostałej części są równe zero.

Równanie cieniwej płyty izotropowej z uwzględnieniem sił stycznych

Pole przemieszczeń w płycie zginanej niesymetrycznie opisują zależności [Delyavsky i Buchaniec 2005]:

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, x_3) &= -x_3 w(x_1, x_2)_{,1} - U_1(x_1, x_2) \\ u_2 &= -x_3 w(x_1, x_2)_{,1} - U_2(x_1, x_2) \\ x_3 &\in (-h_1/2, h_1/2) \end{aligned} \quad (1)$$

gdzie: $w(x_1, x_2)$ – ugięcie płyty,

$U_1(x_1, x_2), U_2(x_1, x_2)$ – nieznanne funkcje przesunięcia poziomego,

h_1 – grubość płyty.

Równanie płyty zginanej przyjmuje postać równania różniczkowego niejednorodnego:

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{q - S_{33}^{(r)}}{D} + \frac{h_1}{2D} S_{13,1}^{(r)} \quad (2)$$

gdzie: $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – sztywność płyty na zginanie,

q – obciążenie zewnętrzne przyłożone do górnej powierzchni płyty,

E – moduł Younga,

ν – współczynnik Poissona.

Rozwiązaniem równania (2) jest całka ogólna równania jednorodnego (znana w literaturze) oraz całka szczególna równania niejednorodnego. Całki szczególnej równania (2) poszukuje się w postaci:

$$\begin{aligned} w^* &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^4 \left[A_{k(\nu)}^{(r)} ch(\lambda_{k(\nu)}^{[1]} x_1) \Phi_{k(\nu)}^{(r)}(x_2) \right] + \sum_{k=1}^{\infty} B_k^{(r)} \cos \delta_k^{[1]} x_1 \Phi_k^{(r)}(x_2) + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[Q_{mn} \cos \delta_m^{[1]} x_1 \cos \delta_n^{[2]} x_2 \right] \end{aligned} \quad (3)$$

gdzie: $\Phi_{k(\nu)}^{(r)}(x_2)$ oraz $\Phi_k^{(r)}(x_2)$ są nieznanymi funkcjami.

Całkę ogólną równania jednorodnego wybiera się w postaci symetrycznej:

$$w_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^4 \left\{ R_{k(\nu)}^{[1]} ch(\lambda_{k(\nu)}^{[1]} x_1) \cos \delta_k^{[2]} x_2 + R_{k(\nu)}^{[2]} ch(\lambda_{k(\nu)}^{[2]} x_2) \cos \delta_k^{[1]} x_1 \right\} \quad (4)$$

gdzie: $R_{k(\nu)}^{[j]}$ – nieznanne parametry, określane z warunków brzegowych na krawędziach płyty,

$$\delta_m^{[1]} = \frac{(2m-1)\pi}{2a_1}; \quad \delta_n^{[2]} = \frac{(2n-1)\pi}{2a_2}; \quad \gamma_m^{[1]} = \frac{m\pi}{a_1}; \quad \gamma_n^{[2]} = \frac{n\pi}{a_2} \quad \text{– parametry rozkładu.}$$

Równanie żebra zginanego z uwzględnieniem sił stycznych

W rozważaniach przyjęto model belki Eulera z uwzględnieniem sił ścinania przyłożonych do jej powierzchni. Równanie wygiętej osi takiej belki ma postać [Buchaniec 2009]:

$$V_{1111}^{(r)} = \frac{\tau_{33}^{(r)}}{D^{(r)}} + \frac{5h_2}{8D^{(r)}} \tau_{13,1}^{(r)} \quad (5)$$

W ostatecznej postaci całka szczególna równania (5) przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} v_*^{(r)} = & \frac{1}{D^{(r)}} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{v=1}^4 \left[\frac{1}{\lambda_{k(v)}^{[1]4}} \left[A_{k(v)}^{(r)**} + \frac{5h_2}{8} \lambda_{k(v)}^{[1]} A_{k(v)}^{(r)*} \right] ch \left(\lambda_{k(v)}^{[1]} z_1 \right) \right] + \\ & + \frac{1}{D^{(r)}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\delta_k^{[1]4}} \left[B_k^{(r)**} + \frac{5h_2}{8D^{(r)}} B_k^{(r)*} \delta_k^{[1]} \right] \cos \delta_k^{[1]} z_1 \end{aligned} \quad (6)$$

Opis elementu płytowo-żebrowego

Równanie ugięcia płyty żebrowanej uzyskano, sumując całkę ogólną równania jednorodnego i całkę szczególną równania niejednorodnego. Dołączając całkę ogólną równania, uzyskuje się wyrażenie na ugięcie płyty żebrowanej wyrażone tylko przez nieznanne współczynniki $R_{k(v)}^{[j]}$:

$$\begin{aligned} w = & \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{v=1}^{\infty} R_{k(v)}^{[1]} \left[K_{k(v)}^{(r)} \Phi_{k(v)}^{(r)}(x_2) + \cos \delta_k^{[2]} x_2 \right] ch \left(\lambda_{k(v)}^{[1]} x_1 \right) + \\ & + \sum_{k=1}^4 \sum_{v=1}^4 R_{k(v)}^{[2]} \left[L_{k(v)}^{(r)} \Phi_{k(v)}^{(r)}(x_2) + ch \lambda_{k(v)}^{[2]} x_2 \right] \cos \delta_k^{[1]} x_1 + \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \left[N_m^{(r)} \Phi_m^{(r)}(x_2) + \sum_{n=1}^{\infty} Q_{mn} \cos \delta_n^{[2]} x_2^0 \right] \cos \delta_m^{[1]} x_1 \end{aligned} \quad (7)$$

Pozostałe składowe pola przemieszczeń (przemieszczenia poziome) wynoszą:

$$\begin{aligned} u_1 = & \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{v=1}^{\infty} R_{k(v)}^{[1]} U_{k(v)}^{[1]}(x_1, x_2, x_3) + \sum_{k=1}^4 \sum_{v=1}^4 R_{k(v)}^{[2]} U_{k(v)}^{[2]}(x_1, x_2, x_3) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn}(x_1, x_2, x_3) \\ u_2 = & \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{v=1}^{\infty} R_{k(v)}^{[1]} V_{k(v)}^{[1]}(x_1, x_2, x_3) + \sum_{k=1}^4 \sum_{v=1}^4 R_{k(v)}^{[2]} V_{k(v)}^{[2]}(x_1, x_2, x_3) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn}(x_1, x_2, x_3) \end{aligned} \quad (8)$$

Wprowadzone funkcje: $U_{k(v)}^{[j]}(x_1, x_2, x_3)$; $V_{k(v)}^{[j]}(x_1, x_2, x_3)$; $U_{mn}(x_1, x_2, x_3)$; $V_{mn}(x_1, x_2, x_3)$, nazwano odpowiednio funkcjami kształtu oraz funkcjami obciążenia przemieszczeń pozo-

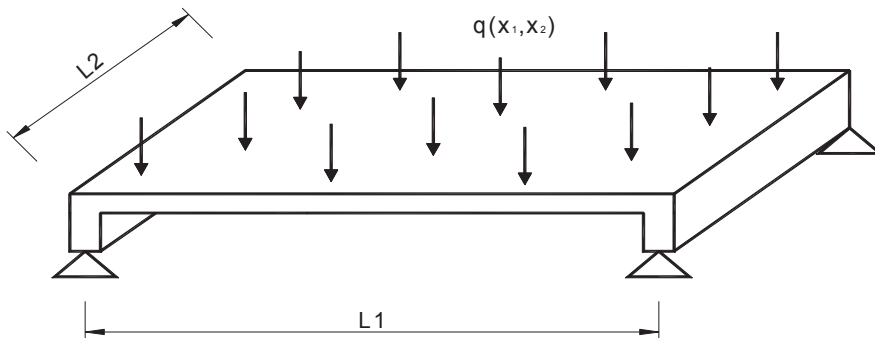
mych u_1, u_2 płytowego elementu żebrowanego. Znajomość pola przemieszczeń umożliwia określenie wielkości statycznych w płycie.

Opisany model matematyczny cienkiej płyty żebrowanej jest rozwiązaniem ścisłym w ramach teorii płyt cienkich.

PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

Płyta korytkowa swobodnie podparta w narożnikach

Rozpatrzono płytę korytkową. Płyta jest swobodnie podparta w narożnikach (rys. 6). Wymiary płyty: $L_1 = 4$ m, $L_2 = 4$ m, $h_1 = 0,1$ m. Wymiary żebra $l_1 = 4$ m, $h_2 = 0,3$ m, $b = 0,1$ m. Zakłada się, że płyta i żebra wykonane są z materiału o module Younga $E = 205$ GPa i współczynnika Poissona $\nu = 0,3$. Przyjmuje się, że płyta obciążona jest na górnej powierzchni obciążeniem równomiernie rozłożonym o wartości $q = 10$ kN·m⁻².



Rys. 6. Płyta korytkowa obciążona równomiernie i podparta w narożnikach

Fig. 6. Tray plate loaded uniformly and supported in the corners

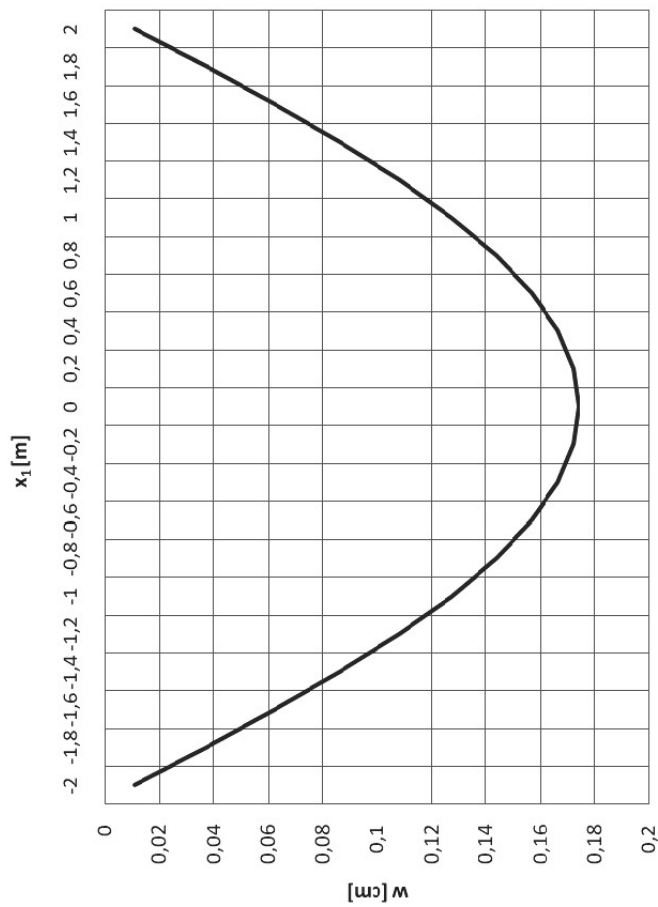
Płytę korytkową można zbudować, łącząc lewostronnie i prawostronnie żebrowane elementy konstrukcyjne. Na skutek tego, że konstrukcja jest symetryczna, wymagane jest, żeby: $\Phi_l(-x_2) = \Phi_p(x_2)$. Należy spełnić następujące warunki brzegowe:

- na wszystkich krawędziach momenty i uogólnione siły tnące są równe zero, oprócz narożników, gdzie występują zerowe przemieszczenia pionowe i momenty zginające,
- na wspólnej krawędzi dwóch elementów muszą być spełnione warunki ciągłości ugięć, kątów obrotów, momentów i sił tnących.

Powyższe warunki pozwalają uzyskać ugięcie płyty dla całej powierzchni. Interpretacją graficzną mogą być wykresy przemieszczeń pionowych sporządzone w przekrojach krawędziowym oraz środkowym (rys. 7–9). Wartości ugięć podano w tabelach 1–3.

Tabela 1. Wartości ugięcia w podłużnym przekroju środkowym płyty ($-2 < x_1 < 2, x_2 = 0$)
 Table 1. Deflection values in middle-longitudinal section of plate ($-2 < x_1 < 2, x_2 = 0$)

x_1	-2,0	-1,8	-1,6	-1,4	-1,2	-1,0	-0,8	-0,6	-0,4	-0,2	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
$w \cdot 10^{-1}$ [cm]	0,11	0,37	0,62	0,86	1,08	1,27	1,44	1,57	1,66	1,72	1,74	1,72	1,66	1,57	1,44	1,27	1,08	0,86	0,62	0,37	0,11

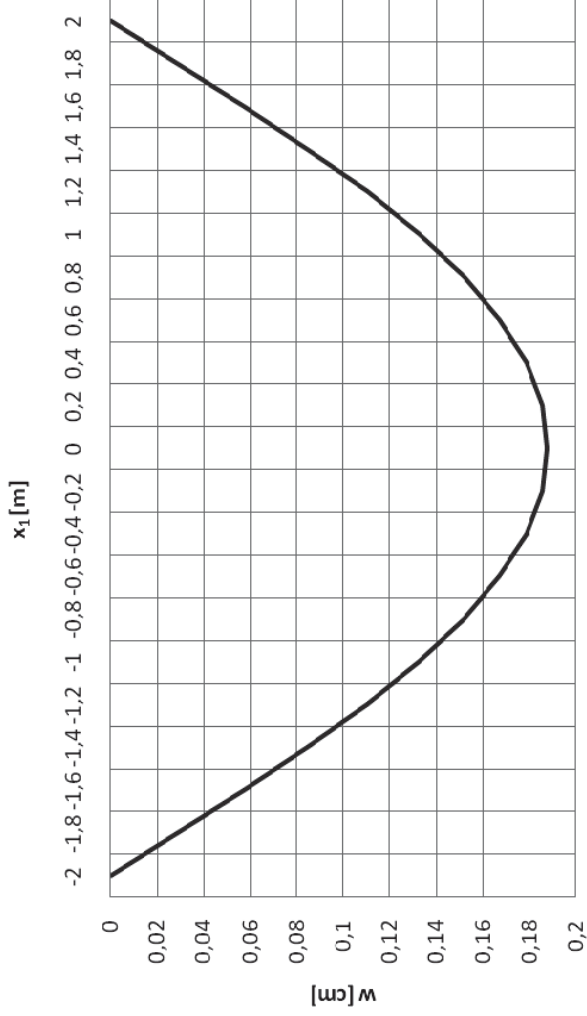


Rys. 7. Wykres ugięcia w przekroju środkowym ($-2 < x_1 < 2, x_2 = 0$)
 Fig. 7. Diagram of deflection in middle section ($-2 < x_1 < 2, x_2 = 0$)

Tabela 2. Wartości ugięcia w podłużnym przekroju krawędziowym płyty ($-2 < x_1 < 2, x_2 = 2$)

Table 2. Deflection values in longitudinal edge section of plate ($-2 < x_1 < 2, x_2 = 2$)

x_1	-2,0	-1,8	-1,6	-1,4	-1,2	-1,0	-0,8	-0,6	-0,4	-0,2	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	
$w \cdot 10^{-1}$ [cm]	1,54	1,54	1,54	1,54	1,54	1,54	1,54	1,54	1,54	1,54	1,54	1,54	1,54	1,54	1,54	1,54	1,54	1,54	1,54	1,54	1,54	1,54

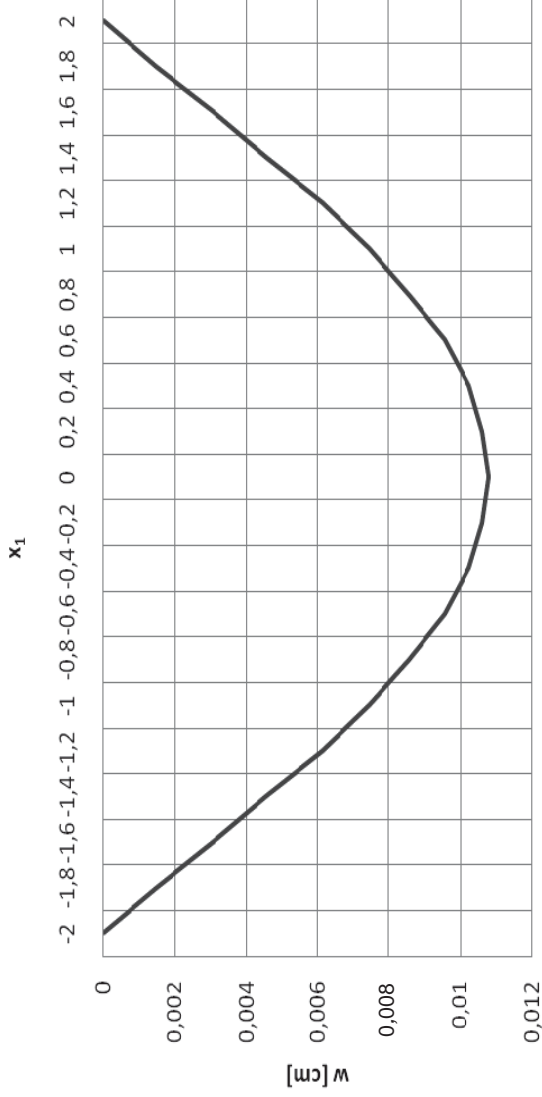


Rys. 8. Wykres ugięcia w podłużnym przekroju krawędziowym ($-2 < x_1 < 2, x_2 = 2$)

Fig. 8. Diagram of deflection in longitudinal edge section ($-2 < x_1 < 2, x_2 = 2$)

Tabela 3. Wartości ugięcia w poprzecznym przekroju krawędziowym płyty ($x_1 = 2, -2 < x_2 < 2$)

x_1	-2,0	-1,8	-1,6	-1,4	-1,2	-1,0	-0,8	-0,6	-0,4	-0,2	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
$w \cdot 10^{-2}$ [cm]	$1,34 \cdot 10^{-19}$	0,15	0,31	0,46	0,61	0,74	0,86	0,96	1,02	1,06	1,08	1,06	1,02	0,96	0,86	0,74	0,61	0,46	0,31	0,15	$6,43 \cdot 10^{-18}$



Rys. 9. Wykres ugięcia w poprzecznym przekroju krawędziowym ($x_1 = 2, -2 < x_2 < 2$)

Fig. 9. Diagram of deflection in transverse edge section ($x_1 = 2, -2 < x_2 < 2$)

Wartość ugięcia w środku krawędzi poprzecznej (krawędź żebrowana) jest różna od zera i wynosi 0,0108 cm, co odpowiada modelowi pracy konstrukcji jako płyty połączonej z belką swobodnie podpartą w narożnikach. Dodatkowo wyliczono strzałkę ugięcia dla belki wolnopodpartej ze wzoru $f = \frac{5}{384} \cdot \frac{ql^4}{EJ} = 0,007$ cm. Powyższy rezultat sugeruje, że ugięcie płyty z żebrem jest mniejsze niż samej belki wolnopodpartej. Maksymalne ugięcie w podłużnym przekroju środkowym płyty wynosi 0,174 cm, a w podłużnym przekroju krawędziowym – 0,188 cm. Ten sam przykład analizowano numerycznie w programie Robot Millenium. Ekstremalne ugięcie płyty wyniosło 0,202 cm. Błąd względny wynosi zatem 7,5%.

PODSUMOWANIE

Opracowano analityczno-numeryczną metodę rozwiązywania płyt żebrowanych w ramach teorii płyt cienkich. Zbudowano model matematyczny płyty cienkiej izotropowej wzmocnionej jednostronnie belkami Eulera. Opracowaną metodę ilustruje przykład obliczeniowy płyty korytkowej obciążonej równomiernie na powierzchni i swobodnie podpartej w narożnikach. Maksymalne wartości ugięć obliczone opracowaną metodą różnią się o 7,5% od obliczonych metodą elementów skończonych.

PIŚMIENNICTWO

- Brzoska Z., 1965. Statyka i stateczność konstrukcji prętowych i cienkościennych. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Buchaniec D., 2006. On a certain method of stiffened plates modeling. *Electronic Journal of Polish Agricultural Universities*.
- Buchaniec D., 2009. Analiza statyczna płyt ze współpracującymi żebrami. Rozprawa doktorska, Bydgoszcz.
- Delyavskyy M., 1995. Analysis of stress state in the orthotropic plate under the bending load. *Problem of Strength* 11–12, 45–53.
- Delyavskyy M., Buchaniec D., 2005. Model matematyczny płyty izotropowej żebrowanej. VI Polsko-Ukraińskie Sympozjum Naukowe „Aktualne zagadnienia mechaniki ośrodków niejednorodnych”, Warszawa, 29–30.
- Delyavskyy M., Podhorecki A., Nagórko W., 1999. O pewnej metodzie wyznaczania odkształceń i naprężeń w prostokątnych belkach ortotropowych. XXXVIII Sympozjum „Modelowanie w mechanice”. *Zeszyty Naukowe Katedry Mechaniki Stosowanej Politechniki Śląskiej* 6, 51–56.
- Starosolski W., 2005. Konstrukcje żelbetowe według PN-B-03264:2002. Tom I, II. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

SOLVING THIN FINNED PLATES USING STRUCTURAL ELEMENTS METHOD

Abstract. This paper attempts to model a plate-fin element. The cooperation of the rib and the plate is provided by satisfying the equation of static equilibrium subjected to axial and tangent forces. The forces occur in bottom and top surfaces of the rib. Moreover, descrip-

tion of the plate element is generalized considering unknown horizontal displacements. The obtained equation of deflection of the fin element contains unknown forces of reactions of the bottom surface of the plate. A sum of general integral of homogeneous equation and particular integral of non-homogeneous equation is a solution of the equation. It can be assumed that the general integral is in symmetric form. Particular integral is solved by decompositions in functional series of loads of the plate and interaction forces. Next stage of modeling considers the above process for the rib. Putting these two descriptions together – the plate and the rib, allows to define the plate-rib element method.

Key words: ribbed plates, Euler beam, construction elements method, non-homogenous plates

Zaakceptowano do druku – Accepted for print: 15.07.2011