

EFEKT WARSTWY BRZEGOWEJ W WARSTWOWEJ PRZEGRODZIE O POPRZECZNEJ GRADACJI WŁASNOŚCI

Olga Szlachetka, Monika Wągrowa

Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie

Streszczenie. Rozpatrzono stacjonarne, jednowymiarowe zagadnienie przewodnictwa ciepła z uwzględnieniem wpływu efektu warstwy brzegowej na rozkład pól temperatury w warstwowej przegrodzie o poprzecznej gradacji własności. Przegroda zbudowana jest z dwóch jednorodnych, izotropowych przewodników ciepła.

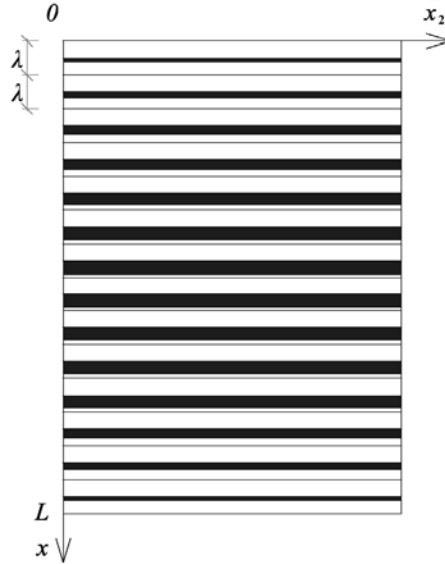
Słowa kluczowe: materiał o funkcyjnej gradacji własności, przewodnictwo ciepła, modelowanie asymptotyczne, efekt warstwy brzegowej

WSTĘP

Rozwój inżynierii materiałowej, trwający od końca ubiegłego stulecia, przyczynił się do znacznego wykorzystania elementów kompozytowych w budownictwie. Materiał kompozytowy rozumiany jest jako materiał złożony z co najmniej dwóch składników (faz), idealnie połączonych, charakteryzujących się różnymi w stosunku do siebie właściwościami.

Szczególnym przypadkiem materiału kompozytowego jest materiał o funkcyjnej gradacji własności (Functionally Graded Material – FGM). Struktura materiałów typu FGM jest niejednorodna i zazwyczaj ta niejednorodność występuje w określonym kierunku. Przykład takiego materiału w skali mikroskopowej, czyli z zarysowanymi granicami między składnikami poszczególnych warstw materiału, został zaprezentowany na rysunku 1.

Zmiana własności w przedstawionym kompozycie występuje w kierunku prostopadłym do uwarstwienia. Inne przykłady materiałów gradientowych, ich opis, historię oraz metody modelowania matematycznego można znaleźć w publikacjach Suresh i Mortensen [1998] oraz Woźniak i Nagórki [2007].



Rys. 1. Schemat materiału o poprzecznej gradacji własności

Fig. 1. Scheme of FGM with transversal gradation

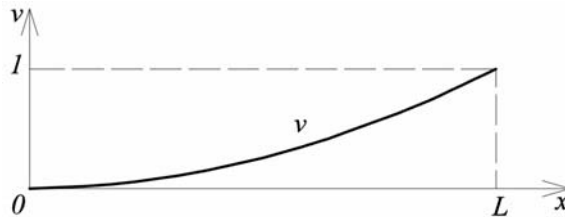
Największym wyzwaniem nauki, dotyczącym struktur gradientowych, jest opracowanie metod ich mikro- i makroprojektowania, jak również próba określenia za pomocą modelowania matematycznego właściwości tych materiałów, takich jak rozkład naprężeń, odkształceń czy temperatury.

Przedmiotem analizy jest przegroda wykonana z materiału typu FGM, o poprzecznej gradacji własności, poddana działaniu stacjonarnego przewodnictwa ciepła. Przegroda składa się z m warstw o stałej grubości $\lambda = L/m \left(\frac{1}{m} \ll 1 \right)$, gdzie $m = 3^n$, przy $n \in \mathbb{N}_+$.

Każda warstwa składa się z dwóch różnych pod względem własności cieplnych izotropowych, jednorodnych komponentów.

Rozpatrywana przegroda w konfiguracji odniesienia zajmuje obszar: $\Omega = (0, L) \times \Xi$, $\Xi = (0, H) \times R$, $x \in (0, L)$, $\bar{x} = (x_2, x_3) \in \Xi$. Dla kompozytu o grubości warstw λ oznaczono przez Ω_R^λ , Ω_M^λ podzbiory obszaru Ω zajęte przez poszczególne składniki, gdzie Ω_R^λ to wzmocnienie, a Ω_M^λ – osnowa. Współczynniki przewodzenia ciepła w tych podzbiorach wynoszą odpowiednio: $k_\lambda(x) = k_\lambda(x, \bar{x}) = k_R$, gdy $(x, \bar{x}) \in \Omega_R^\lambda$ i $k_\lambda(x) = k_\lambda(x, \bar{x}) = k_M$, gdy $(x, \bar{x}) \in \Omega_M^\lambda$. Płaszczyzna środkowa j -tej warstwy zdefiniowana jako $x = x_j^\lambda = \frac{\lambda}{2} + (j-1)\lambda$, $j = 1, \dots, m$ w przestrzeni Ox, x_2, x_3 jest jej materiałową płaszczyzną symetrii. Funkcja $v(\cdot) \in C^1(\bar{\Omega})$ jest funkcją opisującą frakcję materiału wzmocnienia występującego w każdej warstwie, która ze względu na budowę kompozytu zależy tylko od x . Przyjmuje ona wartości z przedziału $(0, 1)$ dla każdego $x \in (0, L)$. Udział materiału

osnowy w danej warstwie wynosi $1 - v(\cdot)$. Przykładowy rozkład funkcji $v(\cdot)$ przedstawia rysunek 2.



Rys. 2. Funkcja charakteryzująca frakcję materiału wzmacniającego kompozyt
Fig. 2. Function characterizing fraction of reinforcing material

Przewodnictwo ciepłe w rozpatrywanej przegrodzie opisane jest równaniem Fouriera:

$$\nabla \cdot q_\lambda(x, x_2, x_3) + f(x, x_2, x_3) = 0$$

$$q_\lambda(x, x_2, x_3) = -k_\lambda(x) \nabla \theta_\lambda(x, x_2, x_3) \quad (1)$$

gdzie $\nabla \equiv \left[\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial x_2}; \frac{\partial}{\partial x_3} \right]$, f są wewnętrznymi źródłami ciepła,

oraz zadanymi warunkami brzegowymi.

METODYKA

Rozpatrywana przegroda nie jest makroskopowo jednorodna, ponieważ występujące w równaniu (1) współczynniki k_λ są silnie oscylującymi nieciągłymi funkcjami. Mimo to zachowanie przepływającego strumienia ciepła można analizować, wykorzystując metody stosowane do opisu zjawisk zachodzących w materiałach jednorodnych.

Opis metod określających własności kompozytów typu FGM znajduje się w pracy Woźniak i innych [2008].

W dalszej części pracy ograniczono rozważania do jednowymiarowego zagadnienia przewodnictwa ciepła, w kierunku osi Ox , w płaszczyźnie Oxx_2 . Rozważany kompozyt w konfiguracji odniesienia zajmuje zatem obszar: $\Omega = (0, L) \times (0, H)$, natomiast pole temperatury zależy tylko od x . Równanie Fouriera dla zagadnienia jednowymiarowego redukuje się do postaci:

$$\frac{d}{dx} q_\lambda(x) + f(x) = 0$$

$$q_\lambda(x) = -k_\lambda(x) \frac{d}{dx} \theta_\lambda(x) \quad (2)$$

gdzie $\theta_\lambda(0) = 0$, $\theta_\lambda(L) = \vartheta_0$.

Rozkład temperatury w rozpatrywanym kompozycie o poprzecznej gradacji własności wyznaczono, stosując uśrednione równania modelu asymptotycznego [Woźniak i in. 2010]. Zgodnie z procedurą metody modelowania asymptotycznego dokonuje się rozkładu nieznanego pola temperatury:

$$\theta_{\lambda}(x) = \vartheta(x) + h_{\lambda}(x)\psi(x) \quad (3)$$

gdzie: $\vartheta(\cdot), \psi(\cdot) \in C^1(\overline{\Omega})$ – niewiadome pola,

$h_{\lambda}(\cdot)$ – dana z góry funkcja kształtu, spełniająca warunki: $h_{\lambda}(0) = h_{\lambda}(L) = 0$,

$h_{\lambda}(x_j^{\lambda} \pm v(x_j^{\lambda})\lambda/2) = \pm\lambda/2, j = 1, \dots, m$.

Ciągłość wektora strumienia ciepła w kierunku osi prostopadłej do uwarstwienia w ramach rozpatrywanego modelu asymptotycznego daje możliwość wyznaczenia nieznanego pola $\psi(\cdot)$. Pole to przyjmuje postać:

$$\psi(x) = -\frac{v(x)(1-v(x))(k_R - k_M)}{v(x)k_M + (1-v(x))k_R} \partial \vartheta(x)$$

Równanie na nieznanne pole temperatury $\vartheta(\cdot)$ w ramach modelu asymptotycznego z warunkami brzegowymi $\vartheta(0) = 0, \vartheta(L) = \vartheta_0$ przyjmie postać:

$$\frac{d}{dx} \left(k_0(x) \frac{d}{dx} \vartheta(x) \right) = 0 \quad (4)$$

gdzie:

$$k_0 \equiv \frac{k_R k_M}{v(x)k_M + (1-v(x))k_R}$$

z warunkami brzegowymi $\vartheta(0) = 0, \vartheta(L) = \vartheta_0$.

Dla zadanej funkcji, opisującej rozkład wzmocnienia w rozpatrywanym kompozycie o poprzecznej gradacji własności, przy zadanych warunkach brzegowych, można wyznaczyć rozkład temperatury $\vartheta(\cdot)$ w ramach modelu asymptotycznego, wykorzystując równanie (4).

Rozwiązanie na temperaturę dla rozpatrywanego kompozytu o poprzecznej gradacji własności, przyjęte zgodnie z formułą aproksymacyjną, można zapisać jako:

$$\theta_{\lambda}^{(1)}(x) = \vartheta(x) + h_{\lambda}(x)M(x)\partial_1 \vartheta(x) \quad (5)$$

gdzie:

$$M(x) = -\frac{v(x)(1-v(x))(k_R - k_M)}{k_R(1-v(x)) + k_M v(x)}$$

Nie spełnia ono zadanych warunków brzegowych, wynikających z modelowania asymptotycznego na brzegu $\Gamma_0 = (0, L) \times \{0\} \cup (0, L) \times \{H\} = \Gamma_0^0 \cup \Gamma_0^H$.

W celu spełnienia warunków brzegowych na brzegu Γ_0 zastosowano metodę modelowania tzw. efektu warstwy brzegowej zaproponowaną przez Woźniak [2010b]. W tym podejściu nieznanne pole temperatury w warstwie przyległej do brzegów Γ_0 można przedstawiać jako:

$$\theta_\lambda^{(2)}(x, \xi) = \vartheta_\lambda^{(1)}(x) + h_\lambda(x) v(x, \xi) \quad (6)$$

gdzie ξ jest współrzędną prostopadłą odpowiednio do brzegu Γ_0^0 oraz Γ_0^H i skierowaną do środka kompozytu.

W powyższej reprezentacji $\theta_\lambda^{(1)}(\cdot)$ jest temperaturą wyznaczoną dla danego kompozytu o poprzecznej gradacji własności, zgodnie z formułą (5), natomiast funkcja $v(\cdot)$ jest funkcją wolnozmienną ze względu na argument ξ i wyznaczoną w ramach modelu tolerancyjnego. Spełnia ona ogólne równanie (7) przewodnictwa ciepła bez źródeł ciepła w obszarze zajęтым przez kompozyt [Woźniak 2010b]:

$$\delta^{kl} \partial_k (k_\lambda \partial_l (h_\lambda v)) = 0 \quad (7)$$

które redukuje się do postaci:

$$\left\langle (h_\lambda)^2 k_\lambda \right\rangle (x) \partial_\xi^2 v(x, \xi) - \left\langle \left(\frac{d}{dx} h_\lambda \right)^2 h_\lambda \right\rangle (x) v(x, \xi) = 0 \quad (8)$$

gdzie $\partial_\xi \equiv \frac{\partial}{\partial \xi}$, z warunkiem brzegowym $v(x, \xi)|_{\Gamma_0^0} = -M(x) \frac{d}{dx} \vartheta(x)|_{\Gamma_0^0}$.

Rozwiązanie na poszukiwane pole temperatury dla rozpatrywanego kompozytu o poprzecznej gradacji własności z uwzględnieniem efektu warstwy brzegowej przyjmuje postać:

– na brzegu Γ_0^0

$$\theta_\lambda^{(2)}(x, \xi) = \vartheta(x) + h_\lambda(x) M(x) \frac{d}{dx} \vartheta(x) + h_\lambda(x) \left(-M(x) \frac{d}{dx} \vartheta(x) \right) \Big|_{\Gamma_0^0} \exp \left[-\sqrt{\frac{\left\langle \left(\frac{d}{dx} h_\lambda(x) \right)^2 k_\lambda(x) \right\rangle}{\left\langle (h_\lambda(x))^2 k_\lambda(x) \right\rangle}} \cdot \xi \right]$$

– na brzegu Γ_0^H

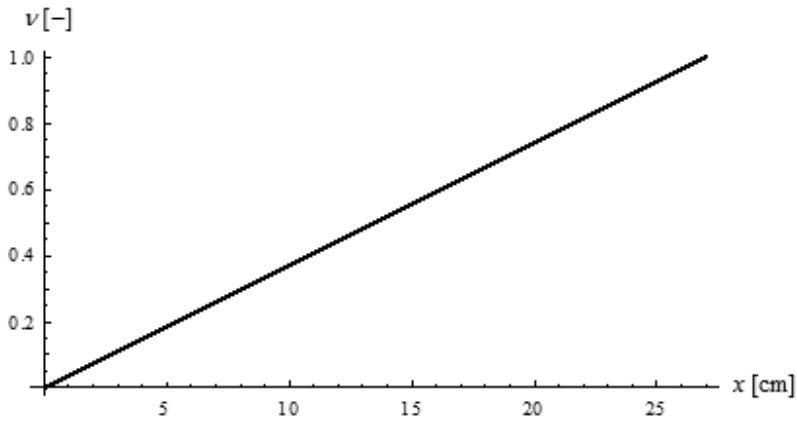
$$\theta_\lambda^{(2)}(x, \xi) = \vartheta(x) + h_\lambda(x) M(x) \partial_1 \vartheta(x) + h_\lambda(x) \left(-M(x) \frac{d}{dx} \vartheta(x) \right) \Big|_{\Gamma_0^H} \exp \left[-\sqrt{\frac{\left\langle \left(\frac{d}{dx} h_\lambda(x) \right)^2 k_\lambda(x) \right\rangle}{\left\langle (h_\lambda(x))^2 k_\lambda(x) \right\rangle}} \cdot \xi \right] \quad (9)$$

gdzie ξ jest współrzędną prostopadłą do brzegu Γ_0^0 oraz Γ_0^H , skierowaną do środka kompozytu.

Zjawisko efektu warstwy brzegowej występuje tylko w obszarach przybrzegowych prostopadłych do uwarstwienia. Na brzegu równoległym do warstw zjawisko to nie występuje z racji postawionych warunków na funkcję kształtu.

PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

Rozpatrzmy przegrodę o poprzecznej gradacji własności o grubości $L = 27$ cm i wysokości $H = 200$ cm, składającą się z 27 warstw o stałej grubości $\lambda = 1$ cm. W ramach modelu asymptotycznego przyjęto następujące warunki brzegowe na temperaturę: $\vartheta(0) = 0^\circ\text{C}$, $\vartheta(27) = 20^\circ\text{C}$. Rozkład funkcji $v(\cdot)$ zadano w postaci $v(x) = x/L$ [Szlachetka i Wągrowska 2010b] (rys. 3).



Rys. 3. Rozkład funkcji $v(\cdot)$

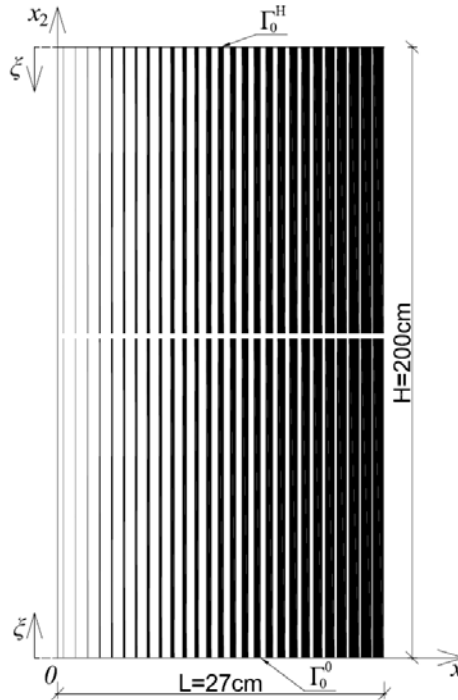
Fig. 3. Distribution of function $v(\cdot)$

Z wykresu odczytano wartości funkcji $v(\cdot)$ na przecięciu z płaszczyznami symetrii wszystkich warstw (tab. 1), które określają poszczególne nasycenia. Na podstawie danych z tabeli 1 przedstawiono odpowiadający im kompozyt dla $k_R = 0,045 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ i $k_M = 1,7 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ (rys. 4).

Tabela 1. Wartości funkcji charakteryzującej frakcję materiału wzmacniającego w każdej warstwie

Table 1. Values of the function characterizing fraction of the reinforcing material in each layer

Warstwa Layer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
v	0,02	0,06	0,09	0,13	0,17	0,20	0,24	0,28	0,31	0,35	0,39	0,43	0,46	0,50
Warstwa Layer	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	
v	0,54	0,57	0,61	0,65	0,69	0,72	0,76	0,80	0,83	0,87	0,91	0,94	0,98	

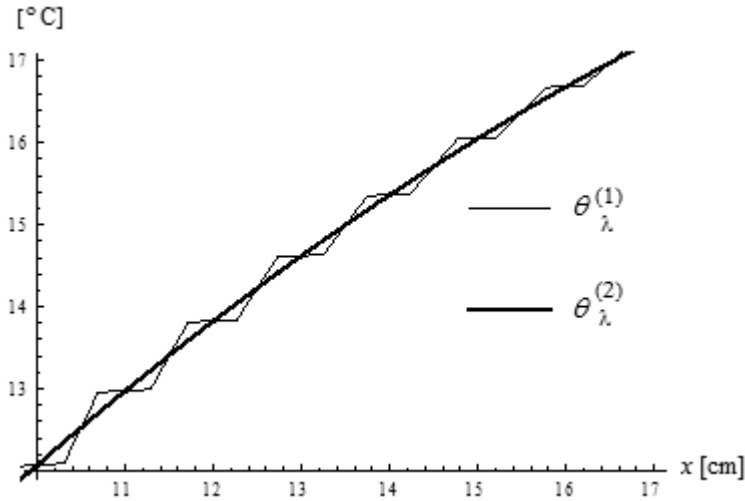
Rys. 4. Schemat kompozytu o gradacji poprzecznej dla zadanej funkcji $v(\cdot)$ Fig. 4. Scheme of FGM composite with transversal gradation for a given function $v(\cdot)$

Dla tak zadanej rozkładu funkcji $v(\cdot)$ rozkład temperatury w rozpatrywanym obszarze opisany będzie funkcją kwadratową wklęsłą o równaniu:

$$\vartheta(x) = -\frac{\vartheta_0}{L^2} x^2 + 2\frac{\vartheta_0}{L} x.$$

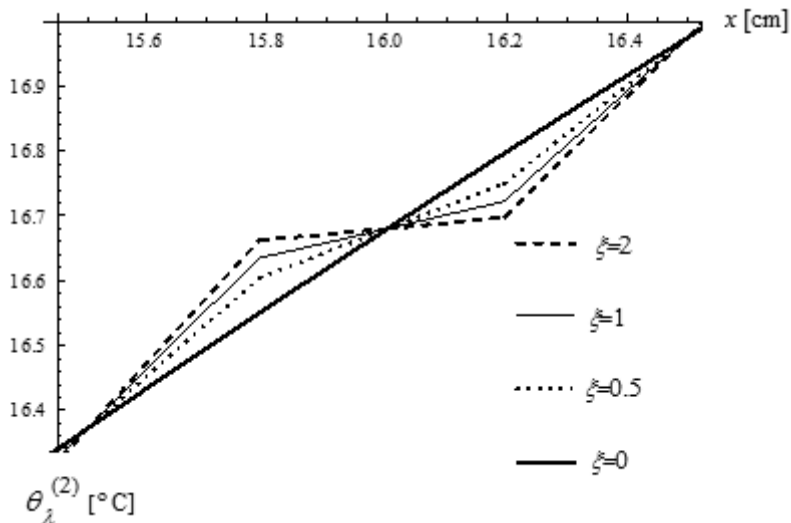
Rozkład temperatury bez uwzględnienia i z uwzględnieniem efektu warstwy brzegowej na brzegu Γ_0^0 dla fragmentu kompozytu zaprezentowano na rysunku 5. Uzyskane rozkłady temperatury wykazują, że rozwiązanie na temperaturę w postaci równania (6), oznaczone jako $\theta_\lambda^{(2)}$, spełnia zadane warunki brzegowe na brzegu Γ_0^0 (dla $\xi = 0$) w przeciwieństwie do rozwiązania (5), oznaczonego jako $\theta_\lambda^{(1)}$.

Rozwiązanie $\theta_\lambda^{(2)}(\cdot)$ opisuje rozkłady temperatury w obszarze przybrzegowym (uwzględnia efekt warstwy brzegowej) w odróżnieniu od rozwiązania $\theta_\lambda^{(1)}(\cdot)$. Na rysunku 6 wykreślono rozkład temperatury z uwzględnieniem efektu warstwy brzegowej w różnych odległościach ξ od brzegu Γ_0^0 dla fragmentu kompozytu. Wykres wykazuje, że wraz ze zbliżaniem się do brzegu zanikają oscylacje rozkładu temperatury.



Rys. 5. Rozkład temperatury z uwzględnieniem $\left(\theta_{\lambda}^{(2)}\right)$ i bez uwzględnienia efektu warstwy brzegowej $\left(\theta_{\lambda}^{(1)}\right)$ na brzegu Γ_0^0 dla fragmentu kompozytu

Fig. 5. Distribution of temperature with and without consideration of the boundary layer effect on the edge Γ_0^0 for a fragment of the composite



Rys. 6. Rozkład temperatury z uwzględnieniem efektu warstwy brzegowej $\left(\theta_{\lambda}^{(2)}\right)$ w różnych odległościach ξ od brzegu Γ_0^0 dla fragmentu kompozytu

Fig. 6. Distribution of temperature with consideration of the boundary layer effect at different distances ξ from the edge Γ_0^0 for a fragment of the composite

PODSUMOWANIE

Z postaci rozwiązania (9) wynika, że wpływ efektu warstwy brzegowej na rozkład temperatury zanika wraz z odległością od brzegu. Można łatwo wykazać, że na zanikanie efektu warstwy brzegowej wpływa budowa kompozytu oraz własności termiczne składników, z jakich jest on zbudowany. W wyniku przeprowadzonych obliczeń otrzymano, że dla rozpatrywanego kompozytu w przypadku $H = 200$ cm wpływ ten utrzymuje się do głębokości $\xi \approx 2$ cm.

PIŚMIENNICTWO

- Suresh S., Mortensen A., 1998. Fundamentals of functionally graded materials. The University Press, Cambridge.
- Szlachetka O., Wągrowa M., 2010a. Modelowanie przewodnictwa ciepła w kompozytach warstwowych z uwzględnieniem efektu warstwy brzegowej. Konferencja „Inżynierskie i przestrzenne aspekty zabudowy obszarów niezurbanizowanych”. Warszawa, 45–46.
- Szlachetka O., Wągrowa M., 2010b. Przewodnictwo ciepła w pewnych materiałach gradientowych. Konferencja „Mechanika ośrodków niejednorodnych”. Łągow, 78–79.
- Woźniak Cz., 2010a. Modelowanie asymptotyczne materiałów gradientowych o mikrostrukturze warstwowej. Konferencja „Mechanika ośrodków niejednorodnych”. Łągow, 99–100.
- Woźniak Cz., 2010b. Uśrednianie tolerancyjne, homogenizacja i efekt warstwy brzegowej w periodycznie warstwowym dwuskładnikowym przewodniku ciepła. Konferencja „Inżynierskie i przestrzenne aspekty zabudowy obszarów niezurbanizowanych”. Warszawa, 12–21.
- Woźniak Cz., Nagórko W., 2007. Modelowanie matematyczne materiałów z funkcjonalną gradacją własności efektywnych – wyniki badań i perspektywy rozwojowe w Polsce. Acta Scientiarum Polonorum, Architectura 6 (4), 23–32.
- Woźniak Cz., Michalak B., Jędrzyński J., 2008. Thermomechanics of microheterogeneous solids and structures. Wydawnictwa Politechniki Łódzkiej, Łódź.
- Woźniak i in., 2010. Mathematical modelling and analysis in continuum mechanics of microstructured media. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice.

BOUNDARY LAYER EFFECT IN THICK TRANSVERSAL FGM PLATE

Abstract. The stationary, one-dimensional heat conduction problem for transversal FGM was investigated. The influence of the boundary layer effect on the distribution of temperature fields in transversal FGM thick plate was considered. The plate was built of two homogeneous, isotropic heat conductors.

Key words: transversal FGM, heat conduction, asymptotic modelling, boundary layer effect

Zaakceptowano do druku – Accepted for print: 22.12.2010