

ZASTOSOWANIE METODY RÓŻNIC SKOŃCZONYCH W MODELU UŚREDNIONYM PRZEWODNICTWA CIEPLNEGO W PERIODYCZNYM OŚRODKU DWUWARSTWOWYM

Vazgen Bagdasaryan, Marek Chalecki

Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie

Streszczenie. Przedmiotem rozważań w niniejszej pracy są okresowe kompozyty warstwowe. Założono, że składniki kompozytów są jednorodny i izotropowy. W pracy skonstruowano model przewodnictwa cieplnego, w którym zamiast klasycznego równania Fouriera o nieciągłych i skokowo zmiennych współczynnikach występują równania o stałych współczynnikach. W pracy przeanalizowano zagadnienia stacjonarne bez źródeł ciepła. Rozwiązanie numeryczne otrzymano, stosując metodę różnic skończonych. Zbadano wpływ liczby komórek okresowości na dokładność wyników otrzymanych metodą różnic skończonych.

Słowa kluczowe: kompozyty warstwowe, równanie Fouriera, uśrednianie tolerancyjne, metoda różnic skończonych

PRZEWODNICTWO CIEPLNE W WARSTWOWYCH KOMPOZYTACH PERIODYCZNYCH

Przedmiotem pracy są niejednorodny ośrodki warstwowe, których składniki są jednorodny. Rozpatrywane ośrodki mają strukturę, w której wydzielić można powtarzające się elementy o własnościach zmieniających się okresowo.

Własności efektywne przewodników okresowo warstwowych są wyznaczone metodami homogenizacyjnymi. W celu rozwiązania zagadnienia przewodnictwa cieplnego w takich ośrodkach zastosowano technikę uśredniania tolerancyjnego. Podstawy tej metody można znaleźć w wielu monografiach [np. Woźniak i Wierzbicki 2000, Woźniak i in. 2008]. Zagadnienia dotyczące przewodzenia ciepła również omawiane były w licznych

Adres do korespondencji – Corresponding author: Vazgen Bagdasaryan, Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego, Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska, Zakład Mechaniki, ul. Nowoursynowska 159, 02-776 Warszawa, e-mail: vazgen_bagdasaryan@sggw.pl

© Copyright by Wydawnictwo SGGW, Warszawa 2016

pracach [np. Piwowarski 2006, Michalak i in. 2007, Jurczak 2011, Bagdasaryan i Nagórko 2013, Szlachetka i in. 2013]. Rozwiązanie zagadnienia dwuwymiarowego przewodzenia ciepła w ośrodku o funkcyjnej gradacji własności przy użyciu metody różnic skończonych znaleźć można w pracy Radzikowskiej i Wirowskiego [2012].

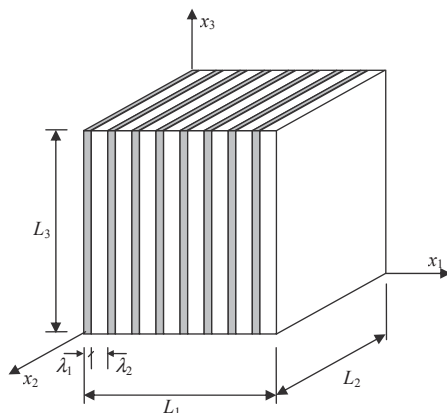
Konfiguracją rozpatrywanych w pracy ośrodków jest obszar $\Omega = (0, L_1) \times (0, L_2) \times (0, L_3)$. Przewodnik jest periodyczny w kierunku osi x_1 , z elementem reprezentatywnym $\Lambda \equiv \langle 0, \lambda \rangle$ podzielonym na 2 części o długościach λ_i , $i = 1, 2$, tak że $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda$. Przewodnik podzielony jest na n elementów reprezentatywnych, a więc na $2n$ warstw.

$$\text{Wprowadzono oznaczenia } \Lambda_i \equiv \left\langle \sum_i \left(\frac{i-1}{2} \lambda_1 + \frac{i-1}{2} \lambda_2 \right), \sum_i \left(\frac{i+1}{2} \lambda_1 + \frac{i-1}{2} \lambda_2 \right) \right\rangle$$

$$\text{dla } i = 1, 3, 5, \dots, 2n-1 \text{ oraz } \Lambda_i \equiv \left\langle \sum_i \left(\frac{i}{2} \lambda_1 + \frac{i-2}{2} \lambda_2 \right), \sum_i \left(\frac{i}{2} \lambda_1 + \frac{i}{2} \lambda_2 \right) \right\rangle \text{ dla } i = 2, 4, 6,$$

$\dots, 2n$. Wtedy $\Omega_i = \Lambda_i \times (0, L_2) \times (0, L_3)$ jest i -tą warstwą przewodnika, $i = 1, \dots, 2n$.

Na rysunku 1 przedstawiono periodyczny przewodnik dwuwarstwowy.



Rys. 1. Periodyczny kompozyt dwuwarstwowy

Fig. 1. Periodically stratified two-layered composite

Założono, że przewodnik jest niejednorodny oraz że każda warstwa jest jednorodna.

W przypadku przewodnika warstwowego współczynniki tensora przewodnictwa ciepła \mathbf{K} , ciepło właściwe c i gęstość masy ρ są funkcjami periodycznymi o okresie λ .

Dla ośrodków izotropowych współczynniki tensora przewodnictwa ciepła przyjęto jako $K_{kl} = K$, dla $k = l$ oraz $K_{kl} = 0$, dla $k \neq l$, $k, l = 1, 2, 3$.

Założono, że własności termiczne w ośrodku zmieniają się tylko w kierunku osi x_1 . I tak na przykład dla współczynnika przewodnictwa cieplnego: $K(x_1, x_2, x_3) = K(x_1)$ oraz

$$K(x_1)|_{(0,\lambda)} = \begin{cases} K' & \text{dla } x_1 \in (0, \lambda_1) \\ K'' & \text{dla } x_1 \in (\lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2) \end{cases}$$

Wielkości K' i K'' i są stałe.

Dla pozostałych wielkości zachodzi analogiczna zależność.

Oznaczono przez $\theta = \theta(x_1, x_2, x_3, t)$, $(x_1, x_2, x_3) \in \Omega$, $t \in \langle t_0, t_1 \rangle$ temperaturę, a przez $f = f(x_1, x_2, x_3, t)$ wydajność źródeł ciepła. Równanie przewodnictwa cieplnego rozpatrywanych przewodników ma postać:

$$c\rho\dot{\theta} - K\theta_{,ii} = f \quad (1)$$

Równanie przewodnictwa ciepła (1) jest równaniem różniczkowym liniowym o zmieniających się skokowo współczynnikach. Dla takiego opisu można zbudować model prostszy, w którym współczynniki będą stałe.

UŚREDNIONY MODEL PRZEWODNICTWA CIEPLNEGO PERIODYCZNYCH PRZEWODNIKÓW WARSTWOWYCH

Do modelowania zastosowano technikę uśredniania tolerancyjnego [Woźniak i Wierzbicki 2000]. Zgodnie z tą techniką przyjęto rozkład temperatury w postaci:

$$\theta(x_1, x_2, x_3, t) = \vartheta(x_1, x_2, x_3, t) + h^A(x_1) \cdot \psi^A(x_1, x_2, x_3, t) \quad (2)$$

gdzie, $A = 1, 2, \dots, M$, ϑ jest temperaturą uśrednioną, a ψ^A są funkcjami nazwanymi fluktuacjami, opisującymi wpływ niejednorodności na przewodnictwo ciepła. Funkcje h^A są danymi Λ -periodycznymi, oscylującymi funkcjami kształtu. Funkcjami poszukiwanymi są ϑ oraz ψ^A .

Równania modelu dla rozkładu (2) były wyprowadzane w wielu pracach [np. Woźniak i in. 2008, Bagdasaryan i Nagórko 2013] i mają postać:

$$\begin{aligned} \langle c\rho \rangle \dot{\vartheta} - \langle K \rangle \vartheta_{,11} - \langle K \rangle \vartheta_{,22} - \langle K \rangle \vartheta_{,33} - \langle Kh_{,1} \rangle \psi_{,1} &= \langle f \rangle \\ \langle c\rho h^2 \rangle \dot{\psi} - \langle Kh^2 \rangle (\psi_{,22} + \psi_{,33}) + \langle K(h_{,1})^2 \rangle \psi + \langle Kh_{,1} \rangle \vartheta_{,1} &= \langle fh \rangle \end{aligned} \quad (3)$$

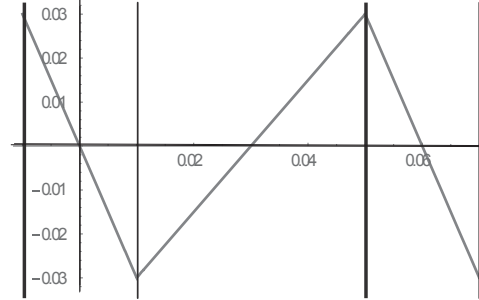
gdzie dla dowolnej funkcji g

$$\langle g \rangle = \frac{1}{|\Lambda|} \int_{\Lambda} g(y) dy \quad (4)$$

W przypadku przewodnika dwuwarstwowego funkcję kształtu założono w postaci funkcji przedziałami liniowej:

$$h(x_1) = \begin{cases} -\frac{\lambda}{\lambda_2} x_1 & \text{dla } x_1 \in \langle 0, \frac{\lambda_2}{2} \rangle \\ \frac{\lambda}{\lambda_1} x_1 - \frac{\lambda^2}{2\lambda_1} & \text{dla } x_1 \in \langle \frac{\lambda_2}{2}, \lambda - \frac{\lambda_2}{2} \rangle \\ -\frac{\lambda}{\lambda_2} x_1 + \frac{\lambda^2}{\lambda_2} & \text{dla } x_1 \in \langle \lambda - \frac{\lambda_2}{2}, \lambda \rangle \end{cases} \quad (5)$$

Na rysunku 2 przedstawiono wykresy przyjętych funkcji kształtu przy założeniu: $\lambda = 0,06$ m, $\lambda_1 = 0,04$ m, $\lambda_2 = 0,02$ m.



Rys. 2. Wykres funkcji kształtu z zaznaczonymi granicami warstw
Fig. 2. Graph of shape function with marked layer boundaries

W przypadku funkcji kształtu przyjętej w postaci (5) oraz periodycznego kompozytu dwuwarstwowego, dla którego własności termomechaniczne (ciepło właściwe c , współczynnik przewodnictwa cieplnego K , gęstość masy ρ) oznaczono ogólnie ϕ' ϕ'' odpowiednio w pierwszej oraz drugiej warstwie, występujące w równaniach wielkości uśrednione mają postać:

$$\begin{aligned} \langle \phi \rangle &= \eta_1 \phi' + \eta_2 \phi'', & \langle \phi h_{,1} \rangle &= \phi' - \phi'', & \langle \phi h^2 \rangle &= \frac{1}{12} (\eta_1 \phi' + \eta_2 \phi'') \cdot \lambda^2, \\ \langle \phi (h_{,1})^2 \rangle &= \frac{\phi'}{\eta_1} + \frac{\phi''}{\eta_2} \end{aligned} \quad (6)$$

We wzorze (6): $\eta_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda}$, $\eta_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda}$, $\eta_1 + \eta_2 = 1$.

MODEL ASYMPTOTYCZNY

Jeśli wykorzystując przejście graniczne $\lambda \rightarrow 0$, w równaniach (3) pominiemy wyrazy rzędu $O(\lambda^2)$, a dodatkowo założymy brak źródeł ciepła, to układ równań modelowych przyjmie następującą postać:

$$\begin{aligned} \langle c\rho \rangle \dot{\vartheta} - \langle K \rangle \vartheta_{,11} - \langle K \rangle \vartheta_{,22} - \langle K \rangle \vartheta_{,33} - \langle Kh_{,1} \rangle \psi_{,1} &= 0 \\ \langle K(h_{,1})^2 \rangle \psi + \langle Kh_{,1} \rangle \vartheta_{,1} &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Z równania (7)₂ wyznaczyć można amplitudę fluktuacji w postaci:

$$\psi = - \frac{\langle Kh_{,1} \rangle}{\langle K(h_{,1})^2 \rangle} \vartheta_{,1} \quad (8)$$

Po podstawieniu amplitudy fluktuacji do (7)₁ otrzymano znane równanie na temperaturę uśrednioną w postaci:

$$\langle c\rho \rangle \dot{\vartheta} - K^{eff} \vartheta_{,11} - \langle K \rangle \vartheta_{,22} - \langle K \rangle \vartheta_{,33} = 0 \quad (9)$$

gdzie przez K^{eff} oznaczono efektywny współczynnik przewodnictwa cieplnego:

$$K^{eff} = \langle K \rangle - \frac{\langle Kh_{,1} \rangle^2}{\langle K(h_{,1})^2 \rangle} \quad (10)$$

Równanie (9) przyjmuje postać analogiczną do równania Fouriera (1), z tym że występują w nim uśrednione stałe współczynniki.

Jeśli do równania (2) wstawi się wartość fluktuacji (8), to otrzyma się poszukiwaną temperaturę θ w postaci:

$$\theta(x, \xi_2, \xi_3, t) = \vartheta(x, \xi_2, \xi_3, t) - h(x) \frac{\langle Kh_{,1} \rangle}{\langle K(h_{,1})^2 \rangle} \vartheta_{,1}(x, \xi_2, \xi_3, t) \quad (11)$$

Równania (7)–(11) przedstawiają model przewodnictwa cieplnego przewodników warstwowych uzyskany w ramach techniki uśredniania tolerancyjnego.

PRZYKŁAD ROZWIĄZANIA

Założenia

Niech przedmiotem rozważań będzie dwuwarstwowy przewodnik o konfiguracji odniesienia $\Pi = (0, L_1) \times (0, L_2)$. Założono, że składa się on z jednorodnych i izotropowych warstw równoległych do osi. W przypadku dwuwymiarowego zagadnienia stacjonarnego przewodzenia ciepła równanie (9) na temperaturę uśrednioną ϑ przyjmuje postać:

$$K^{eff} \vartheta_{,11} + \langle K \rangle \vartheta_{,22} = 0 \quad (12)$$

gdzie K^{eff} określono związkami (10).

Równanie (12) można zapisać w postaci:

$$\vartheta_{,11} + \kappa^2 \vartheta_{,22} = 0 \quad (13)$$

gdzie $\kappa^2 = \frac{\langle K \rangle}{K^{eff}}$

Warunki brzegowe przyjęto w postaci:

$$\vartheta(x_1, 0) = \vartheta(x_1, L_2) = 0, \quad \vartheta(0, x_2) = f_1(x_2), \quad \vartheta(L_1, x_2) = f_2(x_2) \quad (14)$$

Metoda różnic skończonych

Problem opisany równaniem (13) rozwiązano, stosując metodę różnic skończonych. Rozwiązania otrzymano dla przewodnika, w którym $L_1 = 1,2$ m, $L_2 = 1,0$ m. Niech rozpa-
trywany przewodnik będzie złożony z dwu jednorodnych i izotropowych warstw – styro-

pianu $\left(K' = 0,042 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}}, \lambda_1 = 0,02 \text{ m} \right)$ oraz betonu komórkowego o klasie gęstości 600 $\left(K'' = 0,210 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}}, \lambda_2 = 0,04 \text{ m} \right)$. Nasylenie każdej warstwy poszczególnymi materiałami jest równe $\eta_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda} = \frac{1}{3}$, $\eta_2 = 1 - \eta_1 = \frac{2}{3}$, odpowiednio dla warstwy 1 i warstwy 2.

Rozwiązanie otrzymano dla różnych wielkości komórki periodyczności λ : 0,03 m; 0,06 m; 0,12 m; 0,15 m; 0,24 m; 0,6 m.

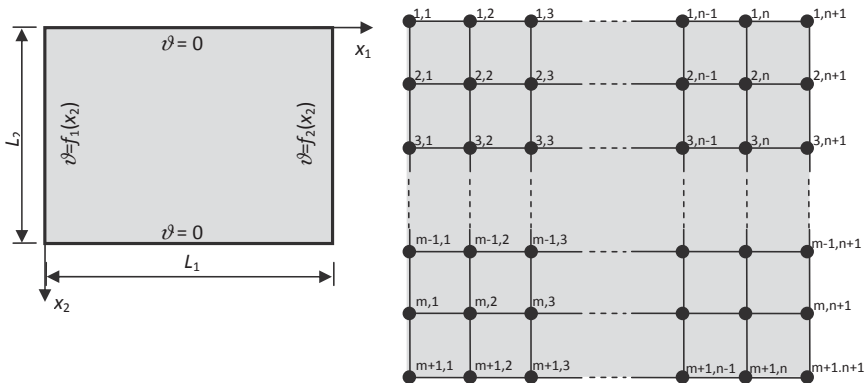
W przypadku funkcji kształtu (5) otrzymano następujące wartości uśrednione:

$$\begin{aligned} \langle K \rangle &= 0,154 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}} & \langle K, h_1 \rangle &= 0,168 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}} \\ \langle K_i (h_1)^2 \rangle &= 0,441 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}} & K^{eff} &= 0,09 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}} \end{aligned} \quad (15)$$

Po obliczeniu podstawowych wielkości uzyskano występującą w równaniu (13) wartość współczynnika $\kappa^2 = \frac{\langle K \rangle}{K^{eff}} = 1,711$.

Przyjęto ponadto, że na brzegach $x_1 = 0$ oraz $x_1 = L_1$ zadana jest temperatura w formie funkcji $f_1(x_2) = f_2(x_2) = 40 \sin\left(\frac{\pi \cdot x_2}{L_2}\right)$.

Rysunek 3 przedstawia siatkę MRS dla rozpatrywanego przewodnika. W lewej części pokazano warunki brzegowe, w prawej – numerację węzłów przy założeniu, że oczko siatki jest kwadratem o boku $h = \frac{L_1}{n} = \frac{L_2}{m}$, i podziale na n elementów wzdłuż osi x_1 oraz na m elementów wzdłuż osi x_2 .



Rys. 3. Warunki brzegowe i siatka MRS dla rozpatrywanego przewodnika
Fig. 3. Boundary conditions and FDM mesh for the conductor under considerations

Należy zatem znaleźć wartości temperatury w $(n + 1)(m + 1) = mn + m + n + 1$ węzłach. Warunki brzegowe dają $2(m + 1) + 2(n + 1) - 2m + 2n$ wartości, czyli niewiadomych pozostaje $mn - m - n + 1$.

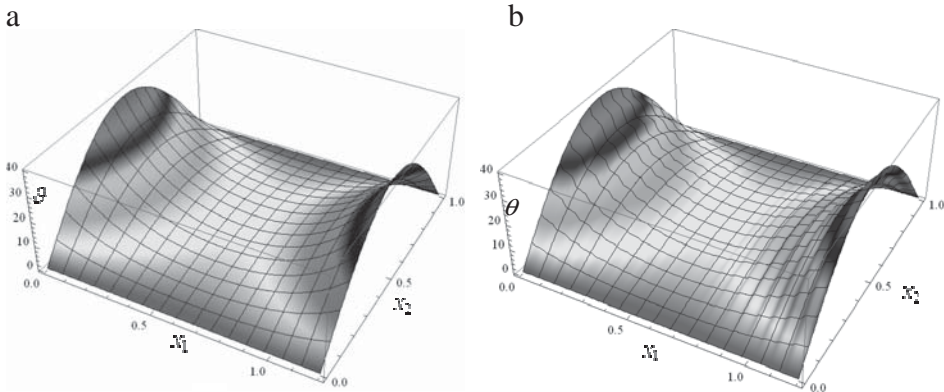
Dla punktu wewnętrznego o współrzędnych i, j ($i = 2, \dots, m; j = 2, \dots, n + 1$) równanie (13) przekształcono na równanie różnicowe następująco:

$$\vartheta_{i+1,j} + \vartheta_{i-1,j} - 2(\kappa^2 + 1)\vartheta_{i,j} + \kappa^2\vartheta_{i,j+1} + \kappa^2\vartheta_{i,j-1} = 0 \quad (16)$$

Do wyznaczenia amplitudy fluktuacji (8) potrzebna jest pochodna $\vartheta_{,1}$, którą przybliżono ilorazem różnicowym:

$$\vartheta_{,1} \cong \frac{\vartheta_{i+1,j} - \vartheta_{i,j}}{h} \quad (17)$$

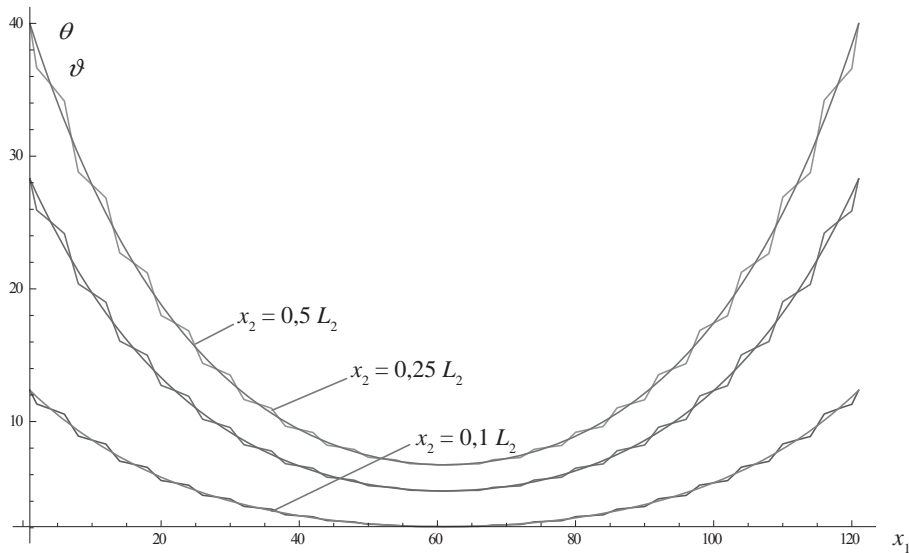
Rozwiązanie otrzymano, przyjmując siatkę kwadratową o wymiarach 1 cm na 1 cm, co daje $m = 100$ i $n = 120$, a więc 11 781 równań różnicowych. Równania te rozwiązano w środowisku MATHEMATICA®. Wyniki przedstawiono dla $\lambda = 0,06$ m. Rysunek 4a pokazuje rozkład temperatury uśrednionej z warunkami brzegowymi przyjętymi w postaci równania (14), a rysunek 4b rozkład temperatury całkowitej $\theta(x_1, x_2)$ z uwzględnieniem dekompozycji mikro-makro (równanie 13). Rysunek 5 przedstawia wykresy temperatury całkowitej i temperatury uśrednionej w przekrojach $x_2 = 0,1L, x_2 = 0,25L, x_2 = 0,5L$.



Rys. 4. Rozkład temperatur dla liniowej funkcji kształtu: a – temperatura uśredniona, b – temperatura całkowita

Fig. 4. Distribution of temperatures for linear shape function: a – averaged temperature, b – total temperature

Na rysunkach 4b i 5 wyraźnie widać wpływ warstwowej struktury przewodnika na przepływ ciepła. Wpływ ten maleje wzdłuż osi x_1 , co wynika z równania (8).



Rys. 5. Rozkład temperatury uśrednionej i całkowitej w wybranych przekrojach dla liniowej funkcji kształtu

Fig. 5. Distribution of averaged and total temperature in selected sections for linear shape function

Rozwiązanie ściśle

Rozwiązanie równania (13) otrzymać można również w postaci ściślej [Zill i Wright 2012]. Rozwiązanie to otrzymuje się metodą separacji zmiennych i z zastosowaniem zasady superpozycji (rys. 6):

$$\vartheta(x_1, x_2) = \vartheta_1^i(x_1, x_2) + \vartheta_2^i(x_1, x_2) \quad (18)$$

gdzie:

$$\vartheta_1^i(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cosh \frac{\kappa n \pi}{L_1} x_2 + B_n \sinh \frac{\kappa n \pi}{L_1} x_2 \right) \sin \frac{n \pi}{L_1} x_1$$

$$\vartheta_2^i(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \cosh \frac{\kappa n \pi}{L_2} x_1 + D_n \sinh \frac{\kappa n \pi}{L_2} x_1 \right) \sin \frac{n \pi}{L_2} x_2$$

$$A_n = \frac{2}{L_1} \int_0^{L_1} f(x_1) \sin \frac{n \pi}{L_1} x_1 dx_1$$

$$B_n = \frac{1}{\sinh \frac{\kappa n \pi}{L_1} L_2} \left(\frac{2}{L_1} \int_0^{L_1} g(x_1) \sin \frac{n \pi}{L_1} x_1 dx_1 - A_n \cosh \frac{\kappa n \pi}{L_1} L_2 \right)$$

$$C_n = \frac{2}{L_2} \int_0^{L_2} F(x_2) \sin \frac{n\pi}{L_2} x_2 dx_2$$

$$D_n = \frac{1}{\sinh \frac{\kappa n \pi}{L_2} L_1} \left(\frac{2}{L_2} \int_0^{L_2} G(x_2) \sin \frac{n\pi}{L_2} x_2 dx_2 - C_n \cosh \frac{\kappa n \pi}{L_2} L_1 \right)$$

Rys. 6. Zasada superpozycji przy rozwiązywaniu równania (13) [Zill i Wright 2012]

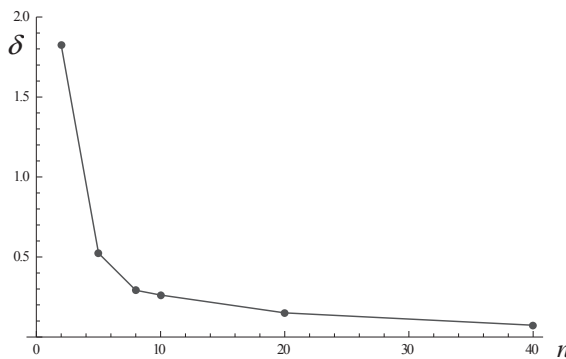
Fig. 6. Rule of superposition by solving of equation (13)

Rozwiązanie ściśle dało wykresy niemal identyczne jak wykresy otrzymane metodą różnic skończonych, z tego powodu nie zostały one zamieszczone w pracy.

ANALIZA DOKŁADNOŚCI ROZWIĄZAŃ PRZYBLIŻONYCH

Sprawdzono dokładność zastosowanej metody różnic skończonych w zależności od liczby komórek periodyczności, na które podzielony został przewodnik. Porównania dokonano, wyznaczając największe błędy względne wartości temperatury całkowitej θ , otrzymane metodą różnic skończonych, w stosunku do wyników ścisłych. Wykres zależności wartości błędu względnego δ od liczby komórek periodyczności n przedstawia wykres (rys. 7), przy czym:

$$\delta = \max \left| \frac{\theta^{MRS} - \theta^{ściśle}}{\theta^{ściśle}} \cdot 100\% \right| \tag{19}$$



Rys. 7. Błąd względny (równanie 19) w zależności od liczby komórek

Fig. 7. Relative error (eq. 19) vs. number of periodicity cells

Z wykresu na rysunku 7 wynika, że dokładność rozwiązania metodą różnic skończonych rośnie (tzn. błąd względny maleje) wraz z liczbą komórek periodyczności (przy zachowaniu tej samej siatki podziału MRS). Błąd ten jest bardzo mały, co oznacza, że w porównaniu z rozwiązaniem ścisłym metoda różnic skończonych daje zadowalające wyniki. Rozwiązanie metodą różnic skończonych można uznać za zgodne ze ścisłym już przy kilkunastu komórkach periodyczności. Można zatem przyjąć, że w przypadku rozwiązywania zagadnień o nieznanymi rozwiązaniami ścisłymi metoda różnic skończonych da wystarczająco dokładne wyniki już przy stosunkowo niedużej liczbie komórek periodyczności.

PODSUMOWANIE

W klasycznym modelu przewodzenia ciepła, opisanym równaniem Fouriera na małych przedziałach określoności funkcji dla rozważanych przewodników, występują współczynniki nieciągłe, skokowo zmienne. Przedstawiony model, opisany równaniem na uśrednioną temperaturę, ma współczynniki stałe.

Rozwiązania numeryczne otrzymano metodą różnic skończonych przy przyjęciu kwadratowej siatki podziału. Metoda ta jest stosunkowo prosta oraz wygodna ze względu na swobodę wyboru warunków brzegowych. Wyniki otrzymano dla różnej liczby komórek periodyczności i porównano je z rozwiązaniami ścisłymi. Okazuje się, że metoda różnic skończonych daje wyniki porównywalne z wynikami ścisłymi już przy kilkunastu komórkach periodyczności. Błąd względny wyników otrzymanych MRS-em w stosunku do wyników ścisłych maleje wraz ze zwiększaniem liczby komórek periodyczności.

Skonstruowany model wydaje się być wygodnym narzędziem do badania przewodnictwa ciepła w warstwowych materiałach wieloskładnikowych.

PIŚMIENNICTWO

- Bagdasaryan, V., Nagórko, W. (2013). Model asymptotyczny przewodnictwa cieplnego w ośrodkach wieloskładnikowych o funkcyjnej gradacji własności materiałowych. *Acta Sci. Pol., Architectura*, 12 (3), 3–15.
- Jurczak, T. (2011). Modelowanie tolerancyjne przewodzenia ciepła w materiałach periodycznie niejednorodnych. Praca doktorska. Warszawa.
- Michalak, B., Woźniak, Cz., Woźniak, M. (2007). Modelling and analysis of certain functionally graded heat conductors. *Arch. Appl. Mech.*, 77, 823–834.
- Piwowarski, M., 2006. Przewodnictwo cieplne w ośrodkach periodycznie wieloskładnikowych. Praca doktorska. Częstochowa.
- Radzikowska, A., Wirowski, A. (2012). Two-dimensional heat conduction in the laminate with the functionally graded properties. *Civil and Environmental Engineering reports*, 8, 61–68.
- Szlachetka, O., Wągrowka, M., Woźniak, Cz. (2013). Effective heat conductivities in certain biperiodically stratified composites. *Acta Sci. Pol., Architectura*, 12 (4), 5–15.
- Woźniak, Cz., Wierzbicki, E. (2000). Averaging techniques in thermomechanics of composite solids. Tolerance averaging versus homogenization. Wydawnictwo Politechniki Częstochowskiej, Częstochowa.

- Woźniak, Cz., Michalak, B., Jędrzyński, J., red. (2008). Thermomechanics of microheterogeneous solids and structures. Tolerance averaging approach. Politechnika Łódzka, Łódź.
- Zill, D.G., Wright, W.S. (2012). Differential Equations with boundary-value problems. Brooks/Cole – Cengage Learning.

APPLICATION OF FINITE DIFFERENCE METHOD IN AN AVERAGED MODEL OF HEAT CONDUCTION IN PERIODICALLY STRATIFIED TWO-LAYERED MEDIUM

Abstract. The subject of the paper are periodically layered composites. It is assumed that the components of the composites are homogeneous and isotropic. A model of heat conduction was constructed in which the classical Fourier equation with discontinuous and jump-type varying coefficients was substituted with an equation with constant coefficients. In the paper, stationary problems without heat sources were analysed. The numerical solution was obtained as a result of application of finite difference method. The influence of the number of periodicity cells on the accuracy of results obtained with finite difference method was investigated.

Key words: layered composites, Fourier's law, tolerance averaging, finite difference method

Zaakceptowano do druku – Accepted for print: 12.06.2016

Cytowanie: Bagdasaryan, V., Chalecki, M. (2016). Zastosowanie metody różnic skończonych w modelu uśrednionym przewodnictwa cieplnego w periodycznym ośrodku dwuwarstwowym. *Acta Sci. Pol. Architectura*, 15 (2), 55–65.