

ZAGADNIENIE EFEKTU WARSTWY BRZEGOWEJ W LINIOWO-SPRĘŻYSTEJ PRZEGRODZIE BUDOWLANEJ O POPRZECZNEJ GRADACJI WŁASNOŚCI

Monika Wągrowska, Joanna Witkowska-Dobrev

Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie

Streszczenie. Rozpatrzono zagadnienie efektu warstwy brzegowej w wielowarstwowej przegrodzie budowlanej charakteryzującej się poprzeczną gradacją własności dla zagadnienia stacjonarnego. Każda warstwa rozpatrywanej przegrody zbudowana jest z dwóch izotropowych, jednorodnych, sprężystych materiałów. Rozwiązanie bez uwzględnienia efektu warstwy brzegowej ograniczono do jednowymiarowego zagadnienia w ramach wariantu asymptotycznego modelowania tolerancyjnego – homogenizacji lokalnej. Równania efektu warstwy brzegowej przedstawiono w ramach modelu tolerancyjnego.

Słowa kluczowe: poprzeczna gradacja własności, asymptotyczny wariant modelowania tolerancyjnego – homogenizacja lokalna, efekt warstwy brzegowej

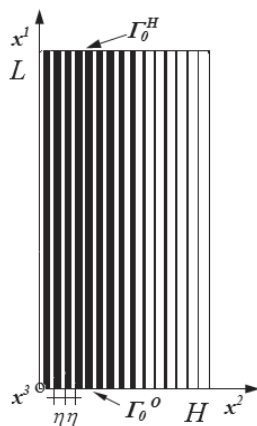
WSTĘP

Materiały z funkcjonalną gradacją własności efektywnej (*functionally graded materials* – FGM) są od dawna przedmiotem zainteresowania mechaniki materiałów. Ze względu na budowę materiałów o strukturze FGM równania równowagi są równaniami o nieciągłych współczynnikach. Aby je rozwiązać, należy się posłużyć metodami przybliżonymi. W pracy został wybrany wariant asymptotycznego modelowania tolerancyjnego – homogenizacji lokalnej, zaproponowany przez Woźniaka i innych [2008]. Metoda ta pozwala na wyznaczenie przybliżonego rozkładu pola przemieszczeń, naprężeń i odkształceń.

Korzystając z niej, należy jednak pamiętać, iż każdy taki rozkład nie spełnia zadanych warunków brzegowych na brzegach przecinających uwarstwienie. W związku z tym konieczna jest modyfikacja rozwiązania na pole przemieszczenia otrzymanego w ramach metody homogenizacji lokalnej. Polega ona na dodaniu do rozwiązania otrzymanego

w ramach homogenizacji lokalnej składnika, który spełnia równanie tzw. efektu warstwy brzegowej. Otrzymane w ten sposób przybliżone rozwiązanie spełnia warunki brzegowe.

W artykule rozpatrzono przegrodę budowlaną o strukturze wielowarstwowej, charakteryzująca się poprzeczną gradacją własności efektywnych (rys. 1), która w konfiguracji odniesienia zajmuje obszar: $\Omega \equiv (0, L) \times (0, H) \times R$, $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3) \in \Omega$, $x^1 \in (0, L)$, $(x^2, x^3) \in (0, H) \times R$. Każda warstwa kompozytu ma stałą grubość $\eta = \frac{L}{p}$ (gdzie: p – liczba warstw, $\frac{1}{p} \ll 1$) i składa się z dwóch izotropowych liniowo-sprężystych, idealnie przylegających materiałów. Jeden z materiałów nazywany jest umownie osnową, oznaczoną na rysunku 1 kolorem białym, a drugi – wzmocnieniem, oznaczonym kolorem czarnym. Rozpatrywany kompozyt charakteryzuje się poprzeczną gradacją własności. Oznacza to, że nasycenie w ramach wszystkich warstw zmienia się bardzo wolno w kierunku prostopadłym do uwarstwienia, tj. w kierunku osi Ox^2 . Funkcja $\nu^R(\cdot)$, $\nu^R(x^2) \in (0, 1)$, $x^2 \in (0, H)$, $\nu^R \in C^1([0, H])$, jest funkcją opisującą średnią frakcję wzmocnienia w warstwie, natomiast $\nu^M(\cdot)$, które opisuje średnią frakcję osnowy w warstwie, wynosi $\nu^M(x^2) = 1 - \nu^R(x^2)$, $x^2 \in [0, H]$.



Rys. 1. Schemat struktury o poprzecznej gradacji własności dla $x^3 = 0$: η – grubość warstwy, Γ_0^H , Γ_0^O – brzegi kompozytu

Fig. 1. Scheme of FGM structure with transversal gradation of properties for $x^3 = 0$: η – thickness of layer, Γ_0^H , Γ_0^O – boundaries of composite

Własności materiałowe składników opisane są stałymi sprężystości Lamego i wynoszą odpowiednio μ_M , λ_M w osnowie i μ_R , λ_R we wzmocnieniu. Część obszaru kompozytu zajęta przez materiał osnowy oznaczona jest jako Ω_M , a przez wzmocnienie – jako Ω_R .

Płaszczyzna środkowa j -tej warstwy zdefiniowana jest jako: $x^2 = x = x_j^\eta = \frac{\eta}{2} + (j-1)\eta$, $j = 1, \dots, m$.

W pracy rozważania zawężono do zagadnienia jednowymiarowego w ramach modelu homogenizacji lokalnej dla płaskiego stanu odkształcenia.

METODYKA

Zgodnie z procedurą wariantu asymptotycznego modelowania tolerancyjnego – homogenizacji lokalnej [Woźniak i in. 2008, 2010, Wągrowka i Witkowska-Dobrev 2010] dla rozpatrywanego kompozytu znajdującego się w płaskim stanie odkształcenia dla zagadnienia stacjonarnego poszukiwane pole przemieszczenia w danej warstwie o płaszczyźnie środkowej $x^2 = x$ przybliżamy przez funkcję $\tilde{w}_x(\cdot)$:

$$\begin{aligned}\tilde{w}_x &= (\tilde{w}_{x^1}, \tilde{w}_{x^2}) \\ \tilde{w}_{x^2}(x) &= u_2(x) + h_x(x^2) v_2(x) \\ \tilde{w}_{x^1}(x) &= u_1(x) + h_x(x^2) v_1(x)\end{aligned}\quad (1)$$

gdzie: $u_1(\cdot), u_2(\cdot), v_1(\cdot), v_2(\cdot) \in C^1(\bar{\Omega})$ – nieznanne pola noszące nazwę uśrednionego pola przemieszczeń i amplitudy fluktuacji przemieszczenia,

$h_x(\cdot) \in C^0(\bar{\Omega})$ – lokalna funkcja kształtu, która dla rozpatrywanego kompozytu jest funkcją kawałkami liniową [Woźniak i in. 2008] i przyjmuje na interfejsach wartości z przedziału $\left(-\frac{\eta}{2}, \frac{\eta}{2}\right)$.

W wyniku zastosowania procedury – homogenizacji lokalnej [Woźniak i in. 2010, Wągrowka i Witkowska-Dobrev 2010] dla rozpatrywanego zagadnienia otrzymujemy $u_1 = 0$, $v_1 = 0$, a $u_2 \neq 0$ i $v_2 \neq 0$.

Nieznanne pole $v_2(\cdot)$ można przedstawić za pomocą $u_{2,2}(\cdot)$:

$$\begin{aligned}v_2 &= \left(\frac{v^R v^M}{(2v^M \mu_R + 2v^R \mu_M) + (\lambda^R v^M + \lambda^M v^R)} \right) \times \\ &\times \left[(2\mu_R - 2\mu_M) u_{2,2} + (\lambda^R - \lambda^M) u_{2,2} \right]\end{aligned}\quad (2)$$

Natomiast równanie na nieznanne pole $u_2(\cdot)$ redukuje się do postaci:

$$\overline{(2\mu + \lambda)} u_{2,2} = 0 \quad (3)$$

Po rozwiązaniu równania (3) na nieznanne $u_2(\cdot)$ pole przemieszczenia $w_2(\cdot)$ może być aproksymowane w postaci:

$$w_2 \approx u_2 + hM \partial_2 u_2 \quad (4)$$

gdzie:

$$M = - \left(\frac{v^R v^M}{(\lambda_R + 2\mu_R)v^M + (\lambda_M + 2\mu_M)v^R} \right) [(\lambda_R - \lambda_M)(2\mu_R - 2\mu_M)] \quad (5)$$

oraz $h(\cdot)$ jest globalną fluktuacyjną funkcją kształtu.

Z postaci rozwiązania na $w_2(\cdot)$ danego związkem (4) wynika, że warunek brzegowy na brzegu:

$$\Gamma_0 = ((0, L) \times \{0\} \times R) \cup ((0, L) \times \{H\} \times R) = \Gamma_0^0 \cup \Gamma_0^H$$

nie jest spełniony (rys. 1).

Zgodnie z procedurą zaproponowaną przez Woźniaka [2010] pole przemieszczenia w obszarze przyległym do Γ_0 poszukiwane jest w postaci:

$$w_2^{(2)} = w_2 + h q_2 = u_2 + hM \partial_2 u_2 + h q_2 \quad (6)$$

gdzie: $w_2(\cdot)$ – rozwiązanie dane wzorem (4) w ramach modelu homogenizacji lokalnej,

$h(\cdot)$ – dana globalna fluktuacyjna funkcja kształtu.

Nieznanne pole $q_2(\cdot)$ wyznacza się z równania tzw. efektu warstwy brzegowej, otrzymanego w ramach procesu modelowania tolerancyjnego [Woźniak i in. 2008]. Równanie na nieznanne pole [Woźniak i in. 2010] przyjmuje postać:

$$\langle (2\mu + \lambda) h^2 \rangle q_{2, \xi\xi\xi} - \langle (h_{,2})^2 \mu \rangle q_2 = 0 \quad (7)$$

gdzie $q_2(\cdot)$ na brzegu Γ_0^0 i Γ_0^H spełnia warunki odpowiednio:

$$q_2|_{\Gamma_0^0} = -M \partial_2 u_2|_{\Gamma_0^0} \quad \text{i} \quad q_2|_{\Gamma_0^H} = -M \partial_2 u_2|_{\Gamma_0^H} \quad (8)$$

Równanie (7) można przedstawić w postaci:

$$A_0 q_{2, \xi\xi\xi} + B_0 q_2 = 0 \quad (9)$$

gdzie:

$$A_0 \equiv \langle (2\mu + \lambda) h^2 \rangle = \frac{\eta^2}{12} \langle 2\mu + \lambda \rangle$$

$$B_0 \equiv \langle \mu (h)^2 \rangle = \frac{\mu_M v^R + \mu_R v^M}{v^R v^M} \quad (10)$$

Wielkości A_0 i B_0 , dane związkami (10), zależą od współrzędnej x^2 . Równanie (9) jest więc równaniem różniczkowym, liniowym, o współczynnikach zależnych tylko od x^2 (w pobliżu Γ_0^0 : $\xi = x^1$, Γ_0^H : $\xi = H - x^1$).

Po rozwiązaniu równania (9) i spełnieniu warunków brzegowych (8) otrzymuje się przybliżone rozwiązanie na pole przemieszczenia $w_2(\cdot)$ w obszarze warstwy brzegowej w postaci:

– w obszarze przylegającym do brzegu Γ_0^0

$$w_2(x) \approx w_2^{(2)} = u_2 + h(x^2)M(x^2)\partial_2 u_2(x) - h(x^2)M(0)\partial_2 u_2(x^1, 0, x^3) \exp\left(-\frac{2}{\eta} \sqrt{\frac{3B_0^0}{A_0^0}} x^1\right) \quad (11a)$$

– w obszarze przylegającym do brzegu Γ_0^H

$$w_2(x) \approx w_2^{(2)} = u_2 + h(x^2)M(x^2)\partial_2 u_2(x) - h(x^2)M(H)\partial_2 u_2(x^1, H, x^3) \exp\left(-\frac{2}{\eta} \sqrt{\frac{3B_0^H}{A_0^H}} (H - x^1)\right) \quad (11b)$$

Z postaci otrzymanych rozwiązań wynika, że wraz z oddalaniem się od brzegów Γ_0^0 i Γ_0^H składnik otrzymany z rozwiązania efektu warstwy brzegowej zanika.

WYNIKI BADAŃ

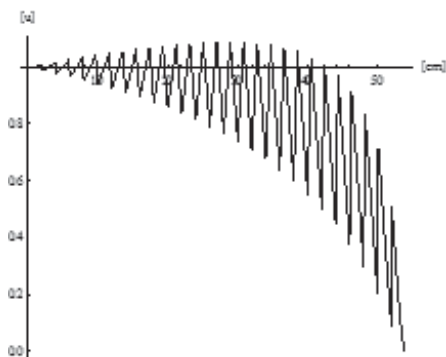
W pracy rozważana jest struktura wielowarstwowa (przegrody budowlanej) o poprzecznej gradacji własności dla $\lambda_M = 0,128$, $\mu_M = 0,055$, $\lambda_R = 0,5035$, $\mu_R = 0,2594$. Wysokość przegrody wynosi $H = 200$ cm, szerokość $L = 54$ cm i posiada nieskończoną długość w kierunku osi x^3 .

Kompozyt ma 27 warstw, o stałej grubości $\eta = 2$ cm. Przyjęto następujące warunki brzegowe: $u_2(x^1, 0, x^3) = u_o$, $u_2(x^1, L, x^3) = 0$, $x^1 \in [0, H]$, $x^3 \in R$. Przybliżone rozwiązanie na $w_2(\cdot)$, otrzymane w wyniku wariantu asymptotycznego modelowania tolerancyjnego – homogenizacji lokalnej, otrzymano w postaci: $w_2 \approx u_2 + hM\partial_2 u_2$, $w_1 = 0$.

W pracy zostały rozpatrzone dwa przypadki dla różnych postaci funkcji nasycenia: 1 – funkcja nasycenia liniowa, 2 – funkcja nasycenia kwadratowa.

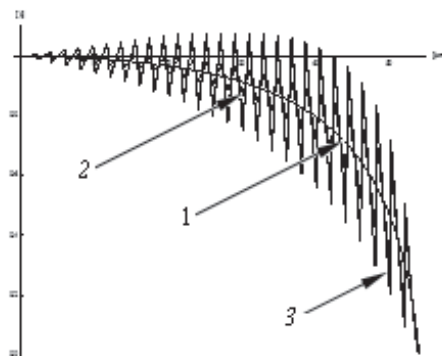
Przykład 1. Opisuje przypadek, gdy rozkład średniej frakcji nasycenia $v^R(\cdot)$ dany jest w postaci funkcji liniowej. Rozkład poszukiwanego pola przemieszczenia, opisany rozwiązaniem danym wzorem (4), bez uwzględnienia efektu warstwy brzegowej, przedstawiono na rysunku 2. Rozwiązanie na poszukiwane pole przemieszczenia uwzględniające efekt warstwy brzegowej o postaci (6), oznaczone jako $w_2^{(2)}$, które spełnia warunek brzegowy na brzegu Γ_0^0 , dane jest związkami (11a) i (11b).

Rysunek 3 przedstawia przybliżony rozkład pola przemieszczenia $w_2^{(2)}$, który uwzględnia efekt warstwy brzegowej. Wykresy te są wykreślone dla różnych wartości rzędnej ξ (0; 0,25; 2,5) fragmentu kompozytu od brzegu. Wykres ilustruje, że wraz ze zbliżaniem się do brzegu zanikają oscylacje rozkładu pola przemieszczenia.



Rys. 2. Wykres w_2 bez uwzględnienia efektu warstwy brzegowej

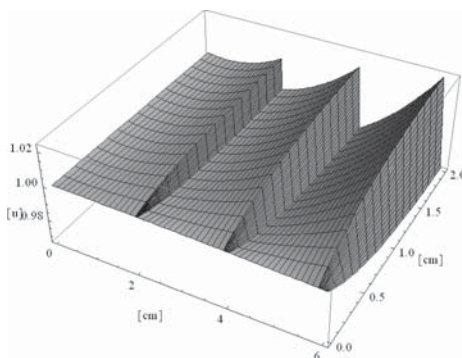
Fig. 2. The graph w_2 without boundary layer effect



Rys. 3. Wykres w_2 z efektem warstwy brzegowej dla różnych wielkości ξ : 1 – $\xi = 0$; 2 – $\xi = 0,25$; 3 – $\xi = 2,5$

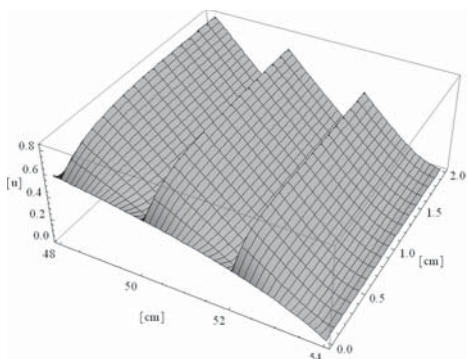
Fig. 3. The graph w_2 boundary layer effect for different sizes ξ : 1 – $\xi = 0$; 2 – $\xi = 0,25$; 3 – $\xi = 2,5$

Kształt i wielkość oscylacji pola przemieszczenia dla $\xi = 0,25$ został przedstawiony na rysunku 4 dla pierwszych trzech warstw kompozytu, a na rysunku 5 dla ostatnich trzech warstw kompozytu.



Rys. 4. Wykres dla pierwszych trzech warstw, gdy $\xi = 2,5$

Fig. 4. The graph for the first layers, when $\xi = 2,5$ three



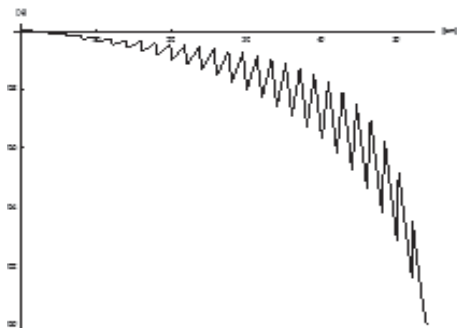
Rys. 5. Wykres dla ostatnich trzech warstw, gdy $\xi = 2,5$

Fig. 5. The graph for the last three layers, when $\xi = 2,5$

Przykład 2. Przedstawia przypadek, gdy rozkład średniej frakcji nasycenia $v^R(\cdot)$

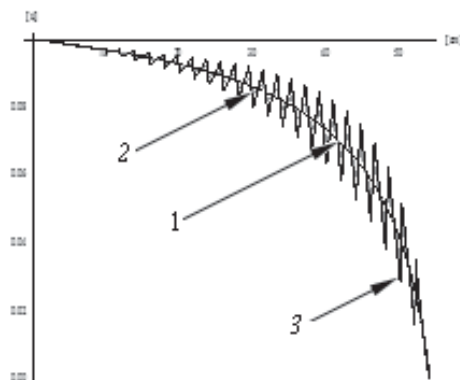
dany jest w postaci funkcji kwadratowej $v^R(x^2) = 1 - \frac{(x^2)^2}{L^2}$. Rozkład poszukiwanego pola przemieszczenia $w_2(\cdot)$, opisany rozwiązaniem danym wzorem (4), bez uwzględnienia efektu warstwy brzegowej, przedstawiono na rysunku 6. Rozwiązanie na poszukiwane pole przemieszczenia uwzględniające efekt warstwy brzegowej o postaci (6), oznaczone

jako $w_2^{(2)}$, które spełnia warunek brzoowy na brzegu Γ_0^0 , dane jest związkami (11a) i (11b). Rysunek 7 przedstawia przybliżony rozkład pola przemieszczenia $w_2^{(2)}$, który uwzględnia efekt warstwy brzoowej.



Rys. 6. Wykres w_2 bez uwzględnienia efektu warstwy brzoowej

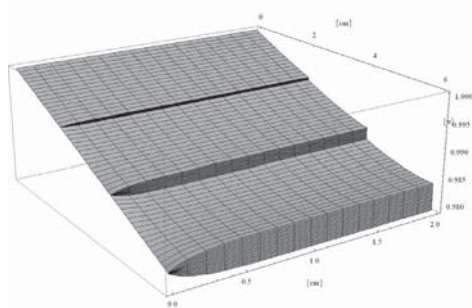
Fig. 6. The graph of w_2 without boundary layer effect



Rys. 7. Wykres w_2 z efektem warstwy brzoowej dla różnych wielkości ξ : 1 – $\xi = 0$; 2 – $\xi = 0,25$; 3 – $\xi = 2,5$

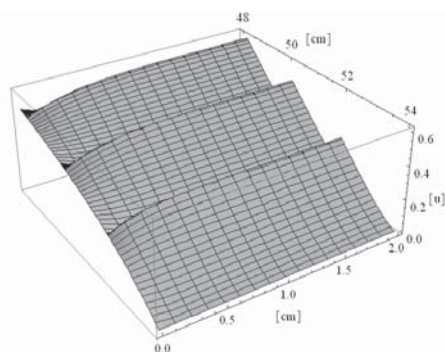
Fig. 7. The graph of w_2 with the boundary layer effect for different sizes ξ : 1 – $\xi = 0$; 2 – $\xi = 0,25$; 3 – $\xi = 2,5$

Wykresy te są powstały dla różnej wielkości rzędnej $\xi(0; 0,25; 2,5)$ fragmentu kompozytu od brzegu Γ_0^0 . Zmiany współrzędnej x^2 wiążą się ściśle ze zmianą zawartości materiału wtrącenia, które słabiej się odkształcają od drugiego składnika, którym jest materiał osnowy. Wykres wykazuje, że wraz ze zbliżaniem się do brzegu zanikają oscylacje rozkładu pola przemieszczenia.



Rys. 8. Wykres oscylacji dla pierwszych trzech warstw, gdy $\xi = 2,5$

Fig. 8. The graph of oscillations for the first three layers, when $\xi = 2,5$



Rys. 9. Wykres oscylacji dla ostatnich trzech warstw, gdy $\xi = 2,5$

Fig. 9. The graph of oscillations for the last three layers, when $\xi = 2,5$

Kształt i wielkość oscylacji pola przemieszczenia dla $\xi = 2,5$ został przedstawiony na rysunku 8 dla pierwszych trzech warstw kompozytu, a na rysunku 9 dla ostatnich trzech warstw kompozytu.

PODSUMOWANIE

Rozwiązanie na $w_2(\cdot)$, otrzymane w ramach asymptotycznego wariantu modelowania tolerancyjnego – homogenizacji lokalnej, nie spełnia warunków brzegowych na brzegach przecinających warstwy.

W wyniku zastosowania równań tzw. efektu warstwy brzegowej, otrzymane rozwiązanie na pole przemieszczenia $w_2^{(2)}$ spełnia warunki brzegowe na brzegach przecinających uwarstwienie.

Z postaci rozwiązania (11a) i (11b) wynika, że wpływ efektu warstwy brzegowej na rozkład przybliżonego pola przemieszczenia zanika wraz z odległością od brzegu.

Można wykazać, że zasięg efektu warstwy brzegowej w omawianych przypadkach zanika po osiągnięciu 2,5 grubości warstwy od każdego z brzegów, bez względu na postać funkcji nasycenia i liczbę warstw, na jaki podzielono kompozyt.

PIŚMIENNICTWO

- Wągrow ska M., Witkowska-Dobrev J., 2010. Wpływ struktury gradientowej na własności sprężyste kompozytów warstwowych. *Acta Scientiarum Polonorum, Architectura* 9 (4), 5–13.
- Woźniak Cz., 2010. Asymptotic Modelling and Boundary – layer Effect for Functionally Graded Microlayered Composites. *Acta Scientiarum Polonorum, Architectura* 9 (2), 3–9.
- Woźniak Cz., Michalak B., Jędrzyński J., 2008. Thermomechanics of Heterogeneous Solids and Structures. Tolerance Averaging Approach. Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź.
- Woźniak Cz. et al., 2010. Mathematical Modelling and Analysis in Continuum Mechanics of Microstructured Media. Professor Margaret Woźniak pro Memoria. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice.

EFFECT OF BOUNDARY LAYER IN A WALL WITH TRANSVERSAL GRADATION OF EFFECTIVE PROPERTIES

Summary. Effect of boundary layer for multilayered wall with transversal gradation of effective properties was investigated. Every layer of considered wall had thickness η and was made of two isotropic, homogeneous linear elastic materials. The consideration without effect of boundary layer was reduced to the one dimensional stationary problem within the frames of asymptotic variant of tolerance modelling – local homogenization. The equations of boundary layer effect were presented within the frames of tolerance model.

Key words: transversal gradation of properties, asymptotic variant of tolerance modelling – local homogenization, boundary layer effect